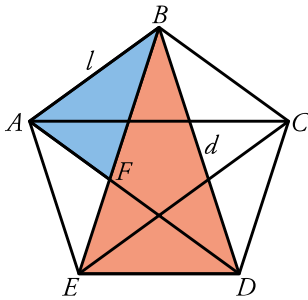


1 LOS NÚMEROS REALES

Página 29

Resuelve

El pentágono estrellado



Observa el pentágono estrellado de la derecha.

- 1 Demuestra que los triángulos ABF y EBD son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).
- 2 Si llamamos l al lado del pentágono y d a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación d/l y comprueba que es el número áureo:

$$\frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36^\circ$ en el triángulo ABF , y $\hat{B} = 36^\circ$ en el triángulo EBD . Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo \hat{A} en el triángulo ABF , y \hat{D} en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD ; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

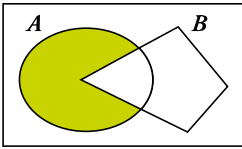
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$

1 LENGUAJE MATEMÁTICO. CONJUNTOS Y SÍMBOLOS

Página 31

1 ¿Verdadero o falso?



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B .

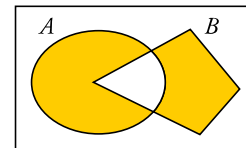
b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B , ya que B' es el complementario de B .

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A - B) \cup (B - A)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B , o está en B y no está en A .



d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B , pero no puede estar en los dos a la vez ($A \cap B$).

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B , o está en B y no está en A .

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3}) \text{ y } x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

(\dot{n}) es el conjunto de los múltiplos de n .

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B , luego están en A y en B' .

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B .

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \subset B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A , es porque todos los elementos de A están en B , luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A .

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo $(0, 1)$ está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ pero

$$\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0,5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que -2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que -5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$.

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que -5 y menores que 7, están en el intervalo $(-5, 7)$ y además son enteros.

r) $(x \text{ es un número real pero no es racional}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 ► NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

Página 33

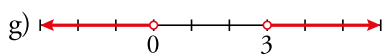
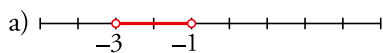
1 Representa sobre la recta real estos conjuntos:

a) $(-3, -1)$

c) $(3, 9]$

e) $\{x / -2 \leq x < 5\}$

g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

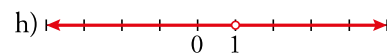
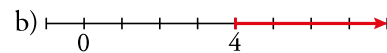


b) $[4, +\infty)$

d) $(-\infty, 0)$

f) $[-2, 5) \cup (5, 7]$

h) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones y representa cada conjunto.

a) $|x| = 5$

b) $|x - 4| \leq 2$

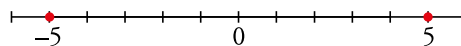
c) $|x| \leq 5$

d) $|x - 4| > 2$

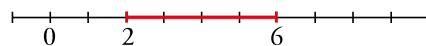
e) $|x - 4| = 2$

f) $|x + 4| > 5$

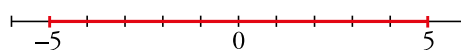
a) 5 y -5



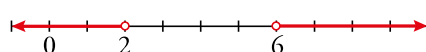
b) $2 \leq x \leq 6$; $[2, 6]$



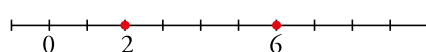
c) $-5 \leq x \leq 5$; $[-5, 5]$



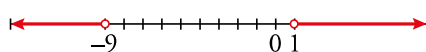
d) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$



e) 6 y 2



f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 ▶ RAÍCES Y RADICALES

Página 34

1 Simplifica.

- a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$
d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$
- a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4} = x^3\sqrt{x}$ Se dividen índice y exponente entre 3. b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$
c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$ d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$
e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 Simplifica y expresa el resultado en forma de raíz.

- a) $\sqrt[9]{512x^3}$ b) $\sqrt[4]{121x^{10}}$
c) $\sqrt[8]{\frac{225}{x^4}}$ d) $\sqrt[6]{125x^3}$
- a) $\sqrt[9]{512x^3} = \sqrt[9]{2^9 \cdot x^3} = \sqrt[9]{2^9} \cdot \sqrt[9]{x^3} = 2\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[4]{121x^{10}} = \sqrt{11 \cdot x^5} = x^2\sqrt{11 \cdot x}$
c) $\sqrt[8]{\frac{225}{x^4}} = \sqrt[8]{\frac{5^2 \cdot 3^2}{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{5 \cdot 3}}{\sqrt[2]{x}} = \frac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[2]{x}}$ d) $\sqrt[6]{125x^3} = \sqrt[6]{5^3 \cdot x^3} = \sqrt{5x}$

Página 35

3 Compara reduciendo a índice común en cada caso.

- a) $\sqrt[12]{2^5}$ y $\sqrt[18]{2^7}$ b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$
c) $\sqrt[4]{31}$ y $\sqrt[3]{13}$ d) $\sqrt[5]{245}$ y $\sqrt[7]{2185}$
- a) $\left. \begin{array}{l} \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[36]{2^{15}} \\ \sqrt[18]{2^7} = \sqrt[36]{2^{14}} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[12]{2^5} > \sqrt[18]{2^7}$ b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651} \Rightarrow \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132650}$
c) $\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$ d) $\left. \begin{array}{l} \sqrt[5]{245} = \sqrt[35]{52986177566328125} \\ \sqrt[7]{2185} = \sqrt[35]{49803195206115625} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[5]{245} > \sqrt[7]{2185}$

4 Extrae fuera del radical cuando sea posible.

- a) $\sqrt[12]{32}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt[3]{54}$
e) $\sqrt[4]{a^7}$ f) $\sqrt{x^5}$ g) $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3}$ h) $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2}$
- a) $\sqrt[12]{32} = \sqrt[12]{2^5}$. No se puede extraer. b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$
c) $\sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = 2\sqrt{5}$ d) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$
e) $\sqrt[4]{a^7} = a\sqrt[4]{a^3}$ f) $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$
g) $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3} = b \cdot c\sqrt{a \cdot c}$ h) $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

5 Expresa bajo un único radical en cada caso.

- a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt[3]{5}$ d) $3^2 \cdot \sqrt[5]{2}$
 e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3}$ f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ g) $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ h) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4}$

- a) $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{12}$
 b) $3\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{18}$
 c) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{40}$
 d) $32\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \cdot 2^{25}} = \sqrt[5]{2^{26}} = \sqrt[5]{67\,108\,864}$
 e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^3} = \sqrt{24}$
 f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{200}$
 g) $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt{3 \cdot 10^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 100^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{675\,000\,000}$
 h) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[10]{3^{10} \cdot 2^5 \cdot 4^2} = \sqrt[10]{30\,233\,088}$

6 Reduce.

- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$
 d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ f) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

- a) $15\sqrt[2^5]{2^5} \cdot 15\sqrt[2^3]{2^3} = 15\sqrt[2^8]{2^8}$
 b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$
 c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$
 d) $12\sqrt[8]{8^3} \cdot 12\sqrt[4]{4^4} = 12\sqrt[(2^3)^3 \cdot (2^2)^4]}{2^{17}} = 12\sqrt[2^{17}]{2} = 2^{12}\sqrt[2^5]{2}$
 e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:
 $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$
 f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:
 $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2} \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

Página 36

7 Simplifica.

- a) $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$
 c) $\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$
 a) $15\sqrt{\frac{x^3}{x^5}} = 15\sqrt{\frac{1}{x^2}} = 15\sqrt{x^{-2}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{a b}$
 c) $\sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{bc^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{bc}}$

8 Simplifica.

- a) $(\sqrt{\sqrt{k}})^8$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$
 a) $(\sqrt[8]{k})^8 = k$ b) $15\sqrt{x^{10}} = 3\sqrt{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

9 Suma y simplifica.

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$

b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

f) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 0$$

Página 37

10 Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

11 Racionaliza denominadores y simplifica estas expresiones cuanto puedas.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

d) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$a) \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$

$$b) \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$$

$$c) \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$$

$$d) \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$

$$e) \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$$

$$f) \frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \frac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \frac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6}$$

$$g) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$h) \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{2\sqrt{x}}{x-y}$$

4 ► LOGARITMOS

Página 38

1 Halla.

a) $\log_2 16$

c) $\log_9 1$

e) $\log_4 64$

g) $\log_7 7$

i) $\log_5 0,04$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

c) $\log_9 1 = 0$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

g) $\log_7 7 = 1$

i) $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2$

b) $\log_2 0,25$

d) $\log_{10} 0,1$

f) $\log_7 49$

h) $\log_\pi \left(\frac{1}{\pi}\right)$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

b) $\log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2$

d) $\log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

h) $\log_\pi \frac{1}{\pi} = \log_{\pi} \pi^{-1} = -1$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de...

a) $\log_2 60$

c) $\log_{10} 43\,000$

e) $\log_9 60$

g) $\log_{20} 450\,000$

i) $\log_2 3$

b) $\log_5 700$

d) $\log_{10} 0,084$

f) $\log_7 14$

h) $\log_{5,4} 900$

j) $\log_5 0,1$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5, \dots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4, \dots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \dots$

d) $10^{-2} = 0,01$; $10^{-1} = 0,1$; $0,01 < 0,084 < 0,1$

$-2 < \log_{10} 0,084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0,084 = -1, \dots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1, \dots$

f) $\log_7 14$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $7^1 = 7$ y $7^2 = 49$.

Con la calculadora: $\log_7 14 = 1,3562$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4,0337$

$5,4^4 = 850,31$; $5,4^5 = 4\,591,7$

Como $5,4^4 = 850,31 < 900 < 4\,591,7 = 5,4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

i) $\log_2 3$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$.

Con la calculadora: $\log_2 3 = 1,58496$

j) $\log_5 0,1$ es un número decimal entre -1 y -2 ya que $5^{-1} = 0,2$ y $5^{-2} = 0,04$.

Con la calculadora: $\log_5 0,1 = -1,4307$

Página 39

3 Si $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$, calcula.

a) $\log_5 125AB^2$

b) $\log_5 \frac{A}{25}$

c) $\log_5 \frac{25A}{B}$

d) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$

e) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

f) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}}$

a) $\log_5 125AB^2 = \log_5 125 + \log_5 A + \log_5 B^2 = 3 + 1,8 + 2 \cdot 2,4 = 9,6$

b) $\log_5 \frac{A}{25} = \log_5 A - \log_5 25 = 1,8 - 2 = -0,2$

c) $\log_5 \frac{25A}{B} = \log_5 25A - \log_5 B = \log_5 25 + \log_5 A - 2,4 = 2 + 1,8 - 2,4 = -0,2$

d) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$

e) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

f) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}} = \frac{1}{3} \log_5 \frac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2} = \frac{1}{3} (\log_5 \sqrt[3]{A^4} - \log_5 (5B)^2) = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \log_5 A - 2 \log_5 5B \right) =$
 $= \frac{1}{3} \left[\frac{4}{3} \cdot 1,8 - 2 (\log_5 5 + \log_5 B) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{7,2}{3} - 2(1 + 2,4) \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{7,2 - 3 \cdot 6,8}{3} \right) = \frac{-13,2}{9}$

Página 40

4 Averigua la relación que hay entre x e y , sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

$$\ln y = 2x - \ln 5 \rightarrow \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$$

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$$

5 Determina si es cierta la siguiente igualdad e indica qué propiedad o propiedades has utilizado:

$$\log e \cdot \ln 10 = 1$$

Como $\ln 10 = \log_e 10$ y usando un cambio de base tenemos que:

$$\log_e 10 = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{\log e}$$

$$\text{Así: } \log e \cdot \ln 10 = \log e \cdot \frac{1}{\log e} = \frac{\log e}{\log e} = 1$$

8 Si $\log A = 1,45$; $\log B = 2,3$ y $\log C = 0,52$; calcula cada una de las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$

b) $\log \frac{100A}{B^2 \sqrt[3]{10C^4}}$

c) $\log \left(\frac{A}{10} \sqrt[5]{\frac{B^2}{0,001C}} \right)$

d) $\log \frac{A \cdot \sqrt[3]{0,1C^4}}{(1000B)^2}$

e) $\log \left(10 \cdot \sqrt[3]{\frac{0,1A^2}{10B}} \right)$

f) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt[3]{C^4}}{(100A)^2} \right)^2$

a) $\log \frac{AB^2}{\sqrt[3]{C}} = \log AB^2 - \log \sqrt[3]{C} = \log A + \log B^2 - \frac{1}{3} \log C = 1,45 + 2 \cdot 2,3 + \frac{1}{3} \cdot 0,52 = 5,87\widehat{6}$

b) $\log \frac{100A}{B^2 \sqrt[3]{10C^4}} = \log 100A - \left(\log B^2 + \frac{1}{3} \log 10C^4 \right) = \log 100 + \log A - 2 \log B - \frac{1}{3} (\log 10 + \log C^4) =$
 $= 2 + 1,45 - 2 \cdot 2,3 - \frac{1}{3} (1 + 4 \cdot \log C) = -1,15 - \frac{1}{3} (1 + 2,08) = -2,17\widehat{6}$

c) $\log \left(\frac{A}{10} \sqrt[5]{\frac{B^2}{0,001C}} \right) = \log \frac{A}{10} + \log \left(\sqrt[5]{\frac{B^2}{0,001C}} \right) = \log A - \log 10 + \frac{1}{5} (2 \log B - \log 0,001C) =$
 $= 1,45 - 1 + \frac{1}{5} [2 \cdot 2,3 - (\log 0,001 + \log C)] = 0,45 + \frac{1}{5} [4,6 - (\log 10^{-3} + 0,52)] =$
 $= 0,45 + \frac{1}{5} (4,6 + 3 - 0,52) = 1,866$

d) $\log \frac{A \sqrt[3]{0,1C^4}}{(1000B)^2} = \log A + \log \sqrt[3]{0,1C^4} - \log [(1000B)^2] = 1,45 + \frac{1}{3} \log 0,1C^4 - 2 (\log 1000 + \log B) =$
 $= 1,45 + \frac{1}{3} (\log 0,1 + 4 \log C) - 2 (3 + 2,3) = 1,45 + \frac{1}{3} (-1 + 4 \cdot 0,52) - 2 (3 + 2,3) = -8,79$

e) $\log 10 \sqrt[3]{\frac{0,1A^2}{10B}} = \log 10 + \frac{1}{3} (\log 0,1A^2 - \log 10B) = 1 + \frac{1}{3} (\log 0,1 + 2 \log A - \log 10 - \log B) =$
 $= 1 + \frac{1}{3} (-1 + 2 \cdot 1,45 - 1 - 2,3) = 0,5\widehat{3}$

f) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt[3]{C^4}}{100A^2} \right)^2 = \log \sqrt[3]{C^4} - \log [(100A)^2] = \frac{4}{3} \log C - 2 (\log 100 + \log A) = \frac{4}{3} \cdot 0,52 - 2 (2 + 1,45) =$
 $= -6,80\widehat{6}$

9 Halla en cada caso el valor de A :

a) $\ln A + \ln A^2 + \ln A^3 = 6$

b) $\log A^2 + \log A^3 + \log A^7 = 6$

c) $\ln A^7 + \ln A^9 + \ln A^{14} = 330$

d) $\log_A 27^3 + \log_A 27^2 + \log_A 27^4 + \log_A 27^7 = 48$

e) $\log_A 6^2 + \log_A 6^3 + \log_A 6^5 = 30$

f) $\log_A 2^2 + \log_A 0,5^3 + \log_A 4^4 + \log_A 0,25 = 10$

a) $\ln A + \ln A^2 + \ln A^3 = 6 \rightarrow \ln A^6 = 6 \rightarrow e^6 = A^6 \rightarrow e = A$

b) $\log A^2 + \log A^3 + \log A^7 = 6 \rightarrow \log A^{12} = 6 \rightarrow 10^6 = A^{12} \rightarrow A = \sqrt[12]{10}$

c) $\ln A^7 + \ln A^9 + \ln A^{14} = 330 \rightarrow \ln A^{30} = 330 \rightarrow e^{330} = A^{30} \rightarrow e^{33} = A^3 \rightarrow e^{11} = A^1 \rightarrow A = e^{11}$

d) $\log_A 27^3 + \log_A 27^2 + \log_A 27^4 + \log_A 27^7 = 48 \rightarrow \log_A 27^{16} = 48 \rightarrow A^{48} = 27^{16} \rightarrow A^{3^{16}} = 27^{16} \rightarrow A = \sqrt[3]{27} = 3$

e) $\log_A 6^2 + \log_A 6^3 + \log_A 6^5 = 30 \rightarrow \log_A 6^{10} = 30 \rightarrow A^{30} = 6^{10} \rightarrow A^3 = 6 \rightarrow A = \sqrt[3]{6}$

f) $\log_A 2^2 + \log_A 0,5^3 + \log_A 4^4 + \log_A 0,25 = 10 \rightarrow \log_A 4 + 3 \log_A 0,5 + 4 \log_A 4 + 2 \log_A 0,5 = 10 \rightarrow$
 $\rightarrow 5 \log_A 4 + 5 \log_A 0,5 = 10 \rightarrow 5 \log_A (4 \cdot 0,5) = 10 \rightarrow \log_A 2 = 2 \rightarrow A = \sqrt{2}$

5 ► EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS

Página 43

1 ¿Verdadero o falso?

- a) El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.
- b) El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En a) el error absoluto es mucho mayor que en b), pero el error relativo es menor.

$$a) \text{ E.R. } < \frac{10000}{390000} = 2,5641 \cdot 10^{-2} = 0,025641 \rightarrow \text{E.R. } < 2,6\%$$

$$b) \text{ E.R. } < \frac{1}{12} = 8,3333 \cdot 10^{-2} = 0,083333 \rightarrow \text{E.R. } < 8,3\%$$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en a) que en b). Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

- a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m².
- b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.
- c) Juana gana unos 25 000 € al año.

$$a) \text{ E.A. } < 0,05 \text{ m}^2; \text{ E.R. } < \frac{0,05}{96,4} = 5,1867 \cdot 10^{-4} = 0,00051867 \rightarrow \text{E.R. } < 0,05\%$$

$$b) \text{ E.A. } < 0,5 \text{ millones de horas} = 500\,000 \text{ horas}$$

$$\text{E.R. } < \frac{0,5}{37} < 0,014 \rightarrow 1,4\%$$

- c) Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 25 000, redondeando a los «miles de euros»), entonces:

$$\text{E.A. } < 0,5 \text{ miles de } \text{€} = 500 \text{ €}; \text{ E.R. } < \frac{0,5}{25} < 0,02 \rightarrow 2\%$$

Si suponemos que es 25 000 € exactamente:

$$\text{E.A. } < 0,5 \text{ €}; \text{ E.R. } < \frac{0,5}{25\,000} < 0,00002 \rightarrow 0,002\%$$

Página 44

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora.

$$a) (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$$

$$b) 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$$

$$a) (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} = ((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})) \cdot 5 \cdot 10^{11} = \\ = (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$$

$$b) 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} = 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} = \\ = 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6}$$

4 Opera con la calculadora:

$$a) (3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$$

$$b) 8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$$

$$a) (3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$$

$$b) 8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 45

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú

- Indica, en cada caso, qué números cumplen estas condiciones:

a) $|x + 2| \geq 5$

b) $|4 - x| < 3$

a) $|x + 2| \geq 5 \rightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 5 \\ x + 2 \leq -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -7 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$

b) $|4 - x| < 3 \rightarrow -3 < 4 - x < 3 \rightarrow -7 < -x < -1$

Cambiamos de signo:

$1 < x < 7 \rightarrow x \in (1, 7)$

2. Operaciones con intervalos

Hazlo tú

- Expresa como un único intervalo:

a) $(-5, 4) \cup [0, 6]$

b) $(-5, 4) \cap [0, 6]$

a) $(-5, 4) \cup [0, 6] = (-5, 6]$

b) $(-5, 4) \cap [0, 6] = [0, 4)$

Página 46

4. Forma exponencial de los radicales

Hazlo tú

- Expresa como potencia:

a) $\frac{x^2}{\sqrt{x}}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81}$

a) $\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2 - \frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81} = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^4)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} = 3^2$

5. Simplificación de radicales

Hazlo tú

- Simplifica.

a) $\sqrt[7]{x^{21}}$

b) $\sqrt[3]{27} : \sqrt[6]{81}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$

a) $\sqrt[7]{x^{21}} = \sqrt[7]{x^{7 \cdot 3}} = x^3$

b) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^{3 \cdot 2}}}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{3^{6-4}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x}$

9. Definición de logaritmo

Hazlo tú

- **Calcula x :**

a) $\log_x 5 = 1/2$

b) $\log x^2 = -4$

a) $\log_x 5 = \frac{1}{2} \rightarrow x^{1/2} = 5 \rightarrow x = 5^2 \rightarrow x = 25$

b) $\log x^2 = -4 \rightarrow 10^{-4} = x^2 \rightarrow \frac{1}{10^4} = x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{10^4}} \rightarrow x = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

Página 48

10. Logaritmos sin calculadora

Hazlo tú

- **Halla el valor de $\log_3 0,3$ y de $\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}}$ sin utilizar la calculadora.**

$0,3 = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow \log_3 3^{-1} = -1$

$\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 \sqrt{\frac{1}{2^3}} = \log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$

11. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú

- **Calcula x en estos casos:**

a) $\ln 3^{x-1} = 5$

b) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

a) $\ln 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $\log_a m^n = n \log_a m$.

$(x-1) \ln 3 = 5 \rightarrow x-1 = \frac{5}{\ln 3} \rightarrow x = \frac{5}{\ln 3} + 1 \rightarrow x = 5,5512$

b) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$\log x^2 - \log 4 = \log 3^2$

$\log \frac{x^2}{4} = \log 9; \frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6, x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

12. Errores y notación científica

Hazlo tú

- **Expresa el resultado de estas operaciones en notación científica y acota el error absoluto y el error relativo cometidos:**

a) $(15\,000\,000 : 0,0003)^2 \cdot (0,008)^3$

b) $1,5 \cdot 10^{-8} + 2,4 \cdot 10^{-7} - (1,2 \cdot 10^{-4})^2$

a) $(15\,000\,000 : 0,0003)^2 \cdot (0,008)^3 = \left(\frac{15 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^3 =$

$$= \frac{(15)^2 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{-8}} \cdot 8^3 \cdot 10^{-9} = \frac{(15)^2 \cdot 8^3}{9} 10^{12+8-9} = 12\,800 \cdot 10^{11} = 1,28 \cdot 10^{15}$$

$$\text{E.A.} < 0,005 \cdot 10^{15} = 5 \cdot 10^{12}$$

$$\text{E.R.} < \frac{5 \cdot 10^{12}}{1,28 \cdot 10^{15}} = 0,0039 = 0,39 \%$$

b) $1,5 \cdot 10^{-8} + 2,4 \cdot 10^{-7} - (1,2 \cdot 10^{-4})^2 = 1,5 \cdot 10^{-8} + 2,4 \cdot 10^{-7} - 1,44 \cdot 10^{-8} =$

$$= 1,5 \cdot 10^{-8} + 24 \cdot 10^{-8} - 1,44 \cdot 10^{-8} = (1,5 + 24 - 1,44) \cdot 10^{-8} = 24,06 \cdot 10^{-8} = 2,406 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{E.A.} < 0,0005 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-11}$$

$$\text{E.R.} < \frac{5 \cdot 10^{-11}}{2,406 \cdot 10^{-7}} = 2,078 \cdot 10^{-4} = 0,0002078 = 0,02 \%$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 49

1. Simplificación de radicales

- Simplificar las siguientes expresiones:

$$a) \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12-\sqrt{3}}}{\sqrt{108}}}}$$

$$b) \sqrt{4a^2cd + 8abcd + 4b^2cd}$$

$$a) \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 \cdot 3 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2^2 \cdot 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$b) \sqrt{4a^2cd + 8abcd + 4b^2cd} = \sqrt{4cd(a^2 + 2ab + b^2)} = 2(a+b)\sqrt{cd}$$

2. Notificación científica

- Calcular en notación científica sin usar la calculadora y expresar el resultado con tres cifras significativas.

$$\frac{13,3 \cdot 10^3 - 0,072 \cdot 10^5}{0,85 \cdot 10^{-3} - 3,2 \cdot 10^{-4} - 4,5 \cdot 10^{-5}}$$

- Dar una cota del error absoluto y del error relativo cometido.

$$a) \frac{13,3 \cdot 10^3 - 7,2 \cdot 10^3}{8,5 \cdot 10^{-4} - 3,2 \cdot 10^{-4} - 0,45 \cdot 10^{-4}} = \frac{6,1 \cdot 10^3}{4,85 \cdot 10^{-4}} = 1,26 \cdot 10^7$$

$$b) E_a < 0,005 \cdot 10^7 < 5 \cdot 10^4$$

$$E_r < \frac{5 \cdot 10^4}{1,26 \cdot 10^7} < 0,39\%$$

3. Aplicaciones de los logaritmos

- Calcular, en cada caso, el valor de x para que se cumplan las siguientes igualdades:

$$a) 3^{x-1} = 173$$

$$b) 3 - \ln \frac{1}{x} = 5$$

$$c) \ln x = \frac{1}{4}(2 \ln 5 - 3 \ln 10 + 5 \ln 2)$$

$$d) \log 5^x = 12$$

$$a) \log(3^{x-1}) = \log(173) \rightarrow (x-1)\log(3) = \log(173) \rightarrow x-1 = \frac{\log(173)}{\log(3)} \rightarrow x = 1 + \frac{\log(173)}{\log(3)} = 5,69$$

$$b) 3 - 5 = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -2 = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \frac{1}{x} = e^{-2} \rightarrow x = e^2$$

$$c) \text{Aplicamos primero la propiedad: } m \ln A = \ln A^m$$

$$\ln x = \frac{1}{4}(\ln 5^2 - \ln 10^3 + \ln 2^5) = \frac{1}{4}(\ln 25 - \ln 1000 + \ln 32) \quad (*)$$

$$\text{Aplicamos ahora la propiedad: } \ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$(*) = \frac{1}{4}\left(\ln \frac{25}{1000} + \ln 32\right) = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1}{40}\right) + \ln 32\right) \quad (**)$$

Y aplicamos ahora la propiedad: $\ln A + \ln B = \ln(A \cdot B)$

$$(**) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{32}{40}\right) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \quad (***)$$

Y volvemos a aplicar la primera propiedad:

$$(***) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \rightarrow \ln x = \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \rightarrow x = \left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$$

$$d) x \log 5 = 12 \rightarrow x = \frac{12}{\log 5} = 17,17$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 50

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} , pertenecen y si son irracionales:

$$5; -7; \frac{5}{4}; \sqrt{\frac{18}{2}}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; 4,\widehat{7}; \frac{\pi}{2}$$

$$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N} \quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z} \quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q} \quad 5; \sqrt{\frac{18}{2}}; -7; \frac{5}{4}; 4,\widehat{7}; -\sqrt{3}; \sqrt[3]{-5}; \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

2 ¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible:

- a) 3,181818... b) $\sqrt{1,\widehat{7}}$ c) $\sqrt{8}$ d) 1,020020002...
 e) -4,0333... f) $\sqrt[3]{81}$ g) 1,3999... h) 2π

$$a) 3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$$

$$b) \sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

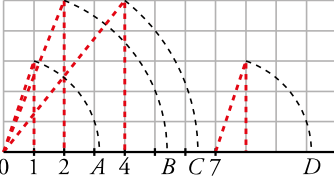
d) 1,020020002... Irracional.

$$e) -4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

$$g) 1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$$

h) 2π Irracional.

3  ¿Qué números irracionales representan los puntos A, B, C y D? Justifica la respuesta.

$$A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad B = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \quad C = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \quad D = 7 + \sqrt{1^2 + 3^2} = 7 + \sqrt{10}$$

7 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos o semirrectas:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|----------------------|
| a) $[-2, 7]$ | b) $[13, +\infty)$ | c) $(-\infty, 0)$ |
| d) $(-3, 0]$ | e) $[3/2, 6)$ | f) $(0, +\infty)$ |
| a) $-2 \leq x \leq 7$ | b) $x \geq 13$ | c) $x < 0$ |
| d) $-3 < x \leq 0$ | e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$ | f) $0 < x < +\infty$ |

8 Expresa como un único intervalo.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ | b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$ |
| c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ | d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$ |
| e) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ | f) $[2, +\infty) \cap (0, 10)$ |
| a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ | b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$ |
| c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ | d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$ |
| e) $[-3, 2] \cap [0, 5] = [0, 2]$ | f) $[2, +\infty) \cap (0, 10) = [2, 10)$ |

9 Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:

- | | | |
|---------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ x < 7$ | b) $ x \geq 5$ | c) $ 2x < 8$ |
| d) $ x - 1 \leq 6$ | e) $ x + 2 > 9$ | f) $ x - 5 \geq 1$ |
| a) $(-7, 7)$ | b) $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$ | c) $(-4, 4)$ |
| d) $[-5, 7]$ | e) $(-\infty, -11) \cup (7, +\infty)$ | f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$ |

10 Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.

- | | | |
|---|--------------------|-----------------------------|
| a) $\sqrt{x - 4}$ | b) $\sqrt{2x + 1}$ | c) $\sqrt{-x}$ |
| d) $\sqrt{3 - 2x}$ | e) $\sqrt{-x - 1}$ | f) $\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$ |
| a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4; [4, +\infty)$ | | |
| b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}; \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ | | |
| c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0; (-\infty, 0]$ | | |
| d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}; \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ | | |
| e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x; (-\infty, -1]$ | | |
| f) $1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2; [-2, +\infty)$ | | |

11 Se denomina entorno de centro a y radio r al intervalo abierto $(a - r, a + r)$.

- a) Describe como entorno el intervalo $I = (-3, 5)$. Ten en cuenta que el centro es el punto medio entre -3 y 5 y el radio la distancia del centro a uno de sus extremos.
- b) Expresa como intervalo el entorno de centro $-5,2$ y radio $0,8$.
- a) Es el entorno de centro $a = 1$ y radio $r = 4$.
- b) $I = (-6; -4,4)$

Radicales y potencias

12 Calcula:

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\sqrt[3]{343}$ | b) $-\sqrt{0,64}$ | c) $\sqrt[3]{0,001}$ |
| d) $\sqrt[4]{2^{-4}}$ | e) $\sqrt[3]{-8^{-4}}$ | f) $\sqrt[5]{32^{-1}}$ |
| a) 7 | b) -0,8 | c) 0,1 |
| d) $\frac{1}{2}$ | e) $-\frac{1}{16}$ | f) $\frac{1}{2}$ |

13 Expresa como una potencia de base 2:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | b) $(-32)^{1/5}$ | c) $(\sqrt[8]{2})^4$ |
| a) $2^{-1/2}$ | b) $(-2^5)^{1/5} = -2$ | c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$ |

14 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

- | | |
|--|--|
| a) $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ | b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$ |
| c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-8)^3 \cdot (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ | d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$ |
| a) $2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-3^2}{2} = \frac{-9}{2}$ | |
| b) $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{256}$ | |
| c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \frac{18}{125}$ | |
| d) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\frac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \frac{-3}{400}$ | |

15 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

- | | |
|---|--|
| a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ | b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$ |
| c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ | d) $\frac{a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c^7}{a^{-5} \cdot b^2 \cdot c^{-1}}$ |
| a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{5}{2}$ | b) $\frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \frac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \frac{80}{27}$ |
| c) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^8 \cdot 3} = \frac{1}{768}$ | d) $\frac{c^7 a^5 c}{a^3 b^4 b^2} = \frac{a^2 c^8}{b^6}$ |

16 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

- | | | |
|--|-------------------------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ | b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ | c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ |
| a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$ | | |
| b) $\frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$ | | |
| c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$ | | |

17 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$

b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\frac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

Página 51

18 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.

a) $\sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[4]{20}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3}, \sqrt[12]{3^4}, \sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{125}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64} \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16} \rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776}, \sqrt[20]{10000} \rightarrow \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3}, \sqrt[12]{9^4}, \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{8000}, \sqrt[12]{6561}, \sqrt[12]{10000} \rightarrow \sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{20} < \sqrt[6]{100}$

19 Introduce los factores dentro de cada raíz.

a) $2^3\sqrt{3}$

b) $4^3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$

e) $2^4\sqrt[4]{4}$

f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

20 Saca de la raíz el factor que puedas.

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $4\sqrt{8}$

c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$

e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$

f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$

h) $\sqrt{4a^2 + 4}$

i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$

i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

21 Simplifica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[6]{49}$ b) $\sqrt[15]{a^{12}}$ c) $\sqrt[6]{25}$
 d) $\sqrt[4]{48}$ e) $\sqrt[7]{a^{10}}$ f) $\sqrt[4]{128}$
- a) $\sqrt[6]{49} = 7^{2/6} = 7^{1/3} = \sqrt[3]{7}$
 b) $\sqrt[15]{a^{12}} = a^{12/15} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$
 c) $\sqrt[6]{25} = 5^{2/6} = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$
 d) $\sqrt[4]{48} = (3 \cdot 2^4)^{1/4} = 2\sqrt[4]{3}$
 e) $\sqrt[7]{a^{10}} = \sqrt[7]{a^7 \cdot a^3} = \sqrt[7]{a^7} \cdot \sqrt[7]{a^3} = a\sqrt[7]{a^3}$
 f) $\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3}$

22 Simplifica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{-108}$
 d) $\sqrt[12]{64y^3}$ e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$
 g) $\sqrt[6]{0,027}$ h) $\sqrt[8]{0,0016}$ i) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$
- a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$
 d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$ e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
 f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$ g) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3} \cdot 3^3} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$
 h) $\sqrt[8]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4} \cdot 2^4} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$ i) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{2^4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

23 Reduce a índice común y simplifica.

- a) $\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ c) $\sqrt[7]{81} \cdot \sqrt{3}$
- a) $\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{4^2}} = \frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{16}} = 1$
 b) $\sqrt[3]{4} \sqrt[5]{8} = \sqrt[15]{4^5 \cdot 15 \cdot 8^3} = \sqrt[15]{2^{10} \cdot 2^9} = \sqrt[15]{2^{19}} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{16}$
 c) $\sqrt[7]{81} \sqrt[2]{3} = \sqrt[14]{3^8 \cdot 3^7} = \sqrt[14]{3^{15}} = 3\sqrt[14]{3}$

24 Realiza la operación y simplifica, si es posible.

- a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$
 d) $(\sqrt[3]{12})^2$ e) $(\sqrt[6]{32})^2$ f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$
- a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$
 c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ d) $(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$
 e) $(\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[2]{2^5} = \sqrt{2^5} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

25 Efectúa y simplifica, si es posible.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[6]{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{2^5}}{2^9}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[6]{1}}{2^4}\right)^3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2} \cdot 3} : \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

26 Expresa con una única raíz.

a) $\sqrt[4]{3\sqrt{4}}$

b) $\sqrt[3]{2^4\sqrt{8}}$

c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

a) $12\sqrt[4]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $12\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^3} = 12\sqrt[4]{2^7} = 12\sqrt[12]{128}$

c) $20\sqrt{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = 20\sqrt{a^{21}} = a^{20}\sqrt{a}$

27 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6} = \frac{(\sqrt{2^3 \cdot 3^2} - \sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{12} - 8\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

28 Calcula y simplifica.

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4} + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \frac{21}{5} \cdot 5\sqrt[3]{2} = -15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2 \cdot 3^3} + 3\sqrt{2^3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7^2} = -3\sqrt{2 \cdot 3} + 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3} - 5\sqrt{2 \cdot 3} + 7\sqrt{2 \cdot 3} = 5\sqrt{6}$

29 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{72}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{7}{2} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} =$
 $= \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} = \left(1 - \frac{12}{5} + \frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4 a} - 2\sqrt[3]{3a^4} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \frac{7}{5}3\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} - \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{21}{5} - 2a - \frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a} = (4 - 2a)\sqrt[3]{3a}$

30 Efectúa y simplifica.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

b) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

c) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $5 - 6 = -1$

c) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

d) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

31 Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$

f) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} - 2}{3 \cdot 2} = \frac{2(\sqrt{6} - 1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6} - 1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2(3 - 5)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} = 3(\sqrt{5} + 2) = 3\sqrt{5} + 6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})} = \frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{5 - 9 \cdot 2} = \frac{65\sqrt{2} + 78\sqrt{5}}{-13} = -5\sqrt{2} - 6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 3^2 - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

32 Efectúa y simplifica.

$$a) \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$b) \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

$$a) \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

$$b) \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{7+5-2\sqrt{35} - (7+5+2\sqrt{35})}{7-5} = \frac{-4\sqrt{35}}{2} = -2\sqrt{35}$$

Logaritmos

33 Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.

$$a) \log_2 1024$$

$$b) \log 0,001$$

$$c) \log_2 \frac{1}{64}$$

$$d) \log_5 0,04$$

$$e) \log_3 \sqrt{3}$$

$$f) \log_2 \sqrt{8}$$

$$g) \log_4 0,25$$

$$h) \log_{\pi} 1$$

$$i) \ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

$$a) \log_2 2^{10} = 10$$

$$b) \log 10^{-3} = -3$$

$$c) \log_2 2^{-6} = -6$$

$$d) \log_5 0,04 = \log_5 \frac{4}{100} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$e) \log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$f) \log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$$

$$g) \log_4 0,25 = \log_4 \frac{25}{100} = \log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$$

$$h) 0$$

$$i) \ln e^{-1/3} = -\frac{1}{3}$$

34 Calcula la base de estos logaritmos:

$$a) \log_x 125 = 3$$

$$b) \log_x \frac{1}{9} = -2$$

$$c) \log_x \frac{1}{4} = 2$$

$$d) \log_x 2 = 1/2$$

$$e) \log_x 0,04 = -2$$

$$f) \log_x 4 = -1/2$$

$$a) x^3 = 125 \rightarrow x = 5$$

$$b) x^{-2} = \frac{1}{9} \rightarrow x = 3$$

$$c) x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$d) x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$$

$$e) x^{-2} = 0,04 \rightarrow x = 5$$

$$f) x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$$

35 Calcula el valor de x en estas igualdades:

$$a) \log 3^x = 2$$

$$b) \log x^2 = -2$$

$$c) 7^x = 115$$

$$d) 5^{-x} = 3$$

$$e) \log_7 3x = 0,5$$

$$f) 3^{2+x} = 172$$

$$a) x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$$

$$b) 2\log x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$c) x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$$

$$d) x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$$

$$e) 7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$f) 2 + x = \log_3 172 \rightarrow x = \log_3 172 - 2$$

Página 52

36 Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.

- a) $\log \sqrt{148}$ b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$ c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$
 d) $\log_3 42,9$ e) $\log_5 1,95$ f) $\log_2 0,034$

- a) $1,085 \rightarrow 10^{1,085} \approx 12,16 \approx \sqrt{148}$ b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11}) \approx 26,16 \rightarrow e^{26,16} \approx 2,3 \cdot 10^{11}$
 c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5}) \approx -9,54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$ d) $3,42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42,9$
 e) $0,41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1,95$ f) $-4,88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0,034$

37 Desarrolla las siguientes expresiones:

- a) $\log \frac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $\log a^2 \sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log \sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2 \log a + \frac{3}{5} \log b - 2 - 4 \log c$

b) $\ln \frac{\sqrt[4]{x^3} e^5}{\sqrt{y}} = \ln \sqrt[4]{x^3} e^5 - \ln \sqrt{y} = \ln \sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln \sqrt{y} = \frac{3}{4} \ln x + 5 - \frac{1}{2} \ln y$

38 Sabiendo que $\log x = 0,28$ calcula el valor de:

- a) $\log \frac{\sqrt[3]{x^2}}{100}$ b) $\log 1000x^3$
 c) $\log \frac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\log 10x + \log \frac{1}{x^2}$

a) $\log \frac{\sqrt[3]{x^2}}{100} = \log \frac{x^{2/3}}{100} = \log x^{2/3} - \log 100 = \frac{2}{3} \log x - 2 = \frac{2}{3} \cdot 0,28 - 2 = -1,8133$

b) $\log 1000x^3 = \log 1000 + \log x^3 = \log 1000 + 3 \log x = 3 + 3 \cdot 0,28 = 3,84$

c) $\log \frac{1}{\sqrt{x}} = \log 1 - \log x^{1/2} = 0 - \frac{1}{2} \log x = -\frac{1}{2} \cdot 0,28 = -0,14$

d) $\log 10x + \log \frac{1}{x^2} = \log 10 + \log x + \log 1 - 2 \log x = 1 + 0,28 + 0 - 2 \cdot 0,28 = 0,72$

39 Calcula x utilizando los logaritmos y sus propiedades.

- a) $35 = 21 \cdot 1,04^x$ b) $1,5 \cdot 10^{12} = 2^{-10x}$
 c) $\log_x 0,3 = 2 - \log_x 2$ d) $\ln 5x + \ln \frac{x}{2} = 1$

a) Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 21 y simplificamos:

$$\frac{35}{21} = 1,04^x \rightarrow \frac{5}{3} = 1,04^x$$

Aplicamos logaritmo a cada miembro de la ecuación para poder despejar la x , y luego usamos sus propiedades:

$$\log \frac{5}{3} = \log(1,04^x) = x \log 1,04 \rightarrow \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 1,04} = x$$

Con la calculadora aproximamos x con 4 cifras significativas $x = 13,02$.

b) $\log 1,5 + \log 10^{12} = -10x \log 2 \rightarrow x = \frac{\log 1,5 + \log 10^{12}}{-10 \log 2}$

c) $\log_x 0,3 + \log_x 2 = 2 \rightarrow \log_x (0,3 \cdot 2) = 2 \rightarrow \log_x 0,6 = 2 \rightarrow x^2 = 0,6 \rightarrow x = \sqrt{0,6}$

d) $\ln \frac{5x^2}{2} = 1 \rightarrow e^1 = \frac{5x^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{(2e)/5}$

40 Halla el valor de x en estas expresiones:

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$

b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$

d) $\log x = 3 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2; \ln x = \ln \frac{5^3}{10^2}; x = \frac{5^3}{5^2 \cdot 2^2}; x = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2}; \log x = \log 2^3 - \log 5; \log x = \log \frac{8}{5}; x = \frac{8}{5}$

41 Si $\log k = x$, escribe en función de x .

a) $\log 100k$

b) $\log \frac{k}{1000}$

c) $\log k^3$

d) $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \frac{1}{k}$

f) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$

b) $\log k - \log 1000 = x - 3$

c) $3 \log k = 3x$

d) $\frac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \frac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$

f) \sqrt{x}

42 ¿Cuál es la relación, sin logaritmos, que hay entre x , y , z ?

a) $\log z = 2 \log x - \log y$

b) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2} \log y$

c) $\log z = 1 - \frac{1}{2} (\log x - \log y)$

d) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

a) $\log z = \log x^2 - \log y; \log z = \log \frac{x^2}{y}; z = \frac{x^2}{y}$

b) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y}; \log z = \log \frac{100}{x\sqrt{y}}; z = \frac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2} \log \frac{x}{y}; \log z = \log 10 - \log \sqrt{\frac{x}{y}}; \log z = \log \frac{10}{\sqrt{\frac{x}{y}}}; z = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2; \ln z = \ln \frac{e \cdot y^2}{x^2}; z = \frac{e \cdot y^2}{x^2}$

Errores y notación científica

43 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$

b) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9) (3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

- a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$
 E.R. $< \frac{0,5}{141} < 0,00355$
- b) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$
 E.R. $< \frac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$
- c) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$
 E.R. $< \frac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

44 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.

- a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$
 b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$
 a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$
 b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

Para resolver

45 El precio de una caja de 40 pastillas para lavavajillas es 4,75 €. Para aumentar las ventas, el fabricante se plantea hacer tres tipos de oferta:

- a) La caja con 50 pastillas al mismo precio 4,75 €.
 b) Lleve 3 cajas de 40 pastillas y solo pague 2.
 c) La segunda unidad al 50 %.

Compara estas ofertas. ¿Qué porcentaje de descuento nos hacen en cada caso?

Para comparar los precios veremos cuánto cuesta cada pastilla en cada caso:

El precio inicial de cada pastilla es:

$$\frac{4,75}{40} = 0,1188 \text{ €}$$

- a) Oferta de 50 pastillas por 4,75 €. El precio de cada pastilla es: $\frac{4,75}{50} = 0,095 \text{ €}$

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

$$0,1188 - 0,095 = 0,0238 \text{ €}$$

$$\text{El porcentaje de descuento será: } \frac{0,1188 - 0,095}{0,1188} \cdot 100 = 20 \%$$

- b) Oferta de 3 cajas pagando solamente 2. El precio de cada pastilla es:

$$\frac{4,75 \cdot 2}{120} = 0,0792 \text{ €}$$

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

$$0,1188 - 0,0792 = 0,0396 \text{ €}$$

$$\text{El porcentaje de descuento será: } \frac{0,1188 - 0,0792}{0,1188} \cdot 100 = 33,4 \%$$

- c) Segunda unidad al 50 %. El precio de cada pastilla es:

$$\frac{4,75 + \frac{4,75}{2}}{80} = 0,089 \text{ €}$$

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

$$0,1188 - 0,089 = 0,0298 \text{ €}$$

$$\text{El porcentaje de descuento será: } \frac{0,1188 - 0,0298}{0,1188} \cdot 100 = 25,1 \%$$

La mejor oferta es la del apartado b).

46 En una granja hay 75 gallinas que consumen 450 kg de maíz en 30 días. Para aumentar la producción de huevos, se aumenta el número de gallinas a 200 y se compran 800 kg de maíz. ¿Cuántos días se podrá dar de comer a las gallinas?

$450 : 30 = 15$; $15 : 75 = 0,2$ kg de maíz es lo que come una gallina en un día.

$200 \cdot 0,2 = 40$ kg por día para alimentar 200 gallinas.

$800 : 40 = 20$ días podrán comer las 200 gallinas.

47 La construcción de un centro hospitalario tuvo un sobrecoste del 35% con respecto al presupuesto inicial y su coste final fue 918 millones de €. La diferencia entre ambos precios deben pagarla tres municipios A, B y C, de forma inversamente proporcional a su distancia al hospital que son 40 km, 50 km y 60 km. Calcula lo que debe pagar cada uno.

Si llamamos x al pago inicial previsto, podemos decir que el pago final fue:

$$918 = \frac{135x}{100} \rightarrow x = \frac{91800}{135} = 680$$

El pago inicial era de 680 millones de euros, por lo que deben pagar una diferencia de:

$$918 - 680 = 238 \text{ millones de euros}$$

Esta cantidad la pagan de forma inversamente proporcional a su distancia al hospital. Para ello buscamos un valor y al que aplicarle la proporcionalidad inversa:

$$\frac{y}{40} + \frac{y}{50} + \frac{y}{60} = 238$$

Buscamos su denominador común y operamos:

$$\frac{15y + 12y + 10y}{600} = \frac{37y}{600} = 238 \rightarrow y = 3859,5$$

El pueblo A pagará $\frac{3859,5}{40} = 96,49$ millones de euros.

El pueblo B pagará $\frac{3859,5}{50} = 77,19$ millones de euros.

El pueblo C pagará $\frac{3859,5}{60} = 64,32$ millones de euros.

48 Un depósito de agua tiene dos grifos. Si los abrimos a la vez, el depósito se llena en dos horas. Si abrimos solo el primero, se llena en seis horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si abrimos solamente el segundo grifo?

Llamamos $x = n.º$ de horas que tarda en llenar el depósito el segundo grifo.

El primer grifo llena $\frac{1}{6}$ del depósito en una hora.

El segundo grifo llena $\frac{1}{x}$ del depósito en una hora.

Los dos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.

Por otra parte, los dos juntos, en una hora, llenan $\frac{1}{6} + \frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{x} \rightarrow \frac{3x}{6x} = \frac{x}{6x} + \frac{6}{6x} \rightarrow 3x = x + 6 \rightarrow x = 3$$

El segundo grifo tarda 3 horas en llenar el depósito.

49 Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.

El primero recorre $\frac{1}{3}$ del camino en 1 hora.

El segundo recorre $\frac{1}{5}$ del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30" en encontrarse.

50 TOI 700 es una estrella enana pequeña y fría que se encuentra a 100 años luz de la Tierra. Su masa es 40 % de la del Sol.

a) Expresa la distancia de TOI a la Tierra en kilómetros.

b) Calcula la masa de la estrella en kilogramos (la masa del Sol es de $1,989 \cdot 10^{30}$ kg).

c) Si el récord de velocidad de una nave espacial tripulada está en 40 000 km/h, aproximadamente, ¿cuánto tardaría una nave de ese tipo en llegar a TOI?

Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año a la velocidad de 300 000 km/s

$$1 \text{ año en s} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$1 \text{ año luz} = 300\,000 \cdot 3,2 \cdot 10^7 = 9,6 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

a) Distancia de TOI a la Tierra

$$D = 100 \cdot 9,6 \cdot 10^{12} \text{ km} = 9,6 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

b) Masa de TOI

$$0,40 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} = 7,956 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

c) $9,6 \cdot 10^{14} \text{ km} : 40\,000 \text{ km/h} = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ h}$

$$\text{En años: } \frac{2,4 \cdot 10^{10}}{365 \cdot 24} = 2\,729\,726 \text{ años}$$

51 El lado de un cuadrado ABCD mide $1 + \sqrt{45}$ cm. Si los lados de un rectángulo MNPQ miden $3\sqrt{5} + 3$ cm y $\sqrt{45} - 1$ cm compara sus perímetros y sus áreas.

• Cuadrado:

$$\text{Perímetro} = 4(1 + \sqrt{45}) = 4(1 + 3\sqrt{5}) = 4 + 12\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = (1 + \sqrt{45})^2 = 45 + 1 + 2\sqrt{45} = 46 + 6\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

• Rectángulo:

$$\text{Perímetro} = 2(3\sqrt{5} + 3 + \sqrt{45} - 1) = 2(3\sqrt{5} + 3 + 3\sqrt{5} - 1) = 12\sqrt{5} + 4 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = (3\sqrt{5} + 3)(3\sqrt{5} - 1) = 42 + 6\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

Los perímetros son iguales. El área del cuadrado es mayor.

Página 53

52 La cantidad de un fármaco que hay en la sangre de un paciente en mg/L al cabo de t horas, después de haberle inyectado puede estimarse mediante la función $f(t) = 5e^{-t/10}$. ¿Cuántas horas tardará en reducirse a la mitad?

Cuando le inyectan el fármaco, $t = 0$, por lo que la cantidad que tiene en sangre es $f(0) = 5e^0 = 5$.

Queremos saber cuánto tiempo tiene que pasar para que el resultado sea $\frac{5}{2}$:

$$f(t) = 5e^{-t/10} = \frac{5}{2} \rightarrow e^{-t/10} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el logaritmo neperiano a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{-t}{10} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow t = -10 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 6,93$$

53 El volumen de un cubo es $6\sqrt{6} \text{ cm}^3$. Halla:

- Su arista.
- La diagonal de una cara.
- La diagonal de un cubo.

Da, en cada caso, el valor exacto con radicales.

- $V_{\text{CUBO}} = a^3 = 6\sqrt{6} = \sqrt{6^3} \rightarrow a = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt{6}$
- Diagonal de una cara $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Diagonal del cubo $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6+6+6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

54 Halla el área y el volumen de un tetraedro regular cuya arista mide $\sqrt{6} \text{ cm}$. Expresa el resultado con radicales.

Un tetraedro tiene cuatro caras iguales y cada cara es un triángulo equilátero del que conocemos que su lado mide $\sqrt{6} \text{ cm}$, ya que es su arista a . Calculemos el área de uno de estos triángulos:

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

La base la conocemos, a , buscaremos la altura mediante el teorema de Pitágoras aplicado a medio triángulo, que será rectángulo:

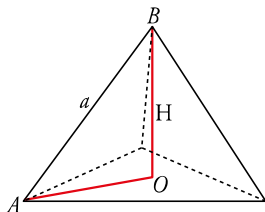
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{6}^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \rightarrow 6 = h^2 + \frac{6}{4} \rightarrow h = \sqrt{6 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Y ya podemos calcular el área del tetraedro ya que sus 4 caras son iguales:

$$A = 4A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Para encontrar el volumen del tetraedro: $V = \frac{1}{3} \text{ Área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} A_{\text{TRIÁNGULO}} \cdot H$



En este caso, para encontrar la altura del tetraedro H usaremos el triángulo AOB para volver a aplicar el teorema de Pitágoras, del que conocemos:

- $\overline{AB} = \sqrt{6}$

- $\overline{AO} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$a^2 = H^2 + \overline{AO}^2 \rightarrow 6 = H^2 + 2 \rightarrow H^2 = 4 \rightarrow H = 2 \rightarrow V = \frac{1}{3} A_T \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3} \text{ cm}^3$$

55 El área total de una pirámide cuadrangular regular es $25(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$. Calcula su arista.

Una pirámide cuadrangular regular tiene base cuadrada. Sus caras laterales son triángulos equiláteros, necesitamos hallar la altura del triángulo para encontrar su área. Lo haremos aplicando el teorema de Pitágoras a una de sus mitades, y llamando a a la arista que queremos encontrar:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área de la base} = a^2$$

$$\text{Área total} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(1 + \sqrt{3}) = 25(1 + \sqrt{3}) \rightarrow 25 = a^2 \rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

56 En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4 - \sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7 + 2\sqrt{5}$ cm y la altura $4(1 + \sqrt{5})$ cm. Halla el perímetro del trapecio, utilizando radicales.

Calculamos primero x :

$$7 + 2\sqrt{5} - (4 - \sqrt{5}) = x \rightarrow x = 3(1 + \sqrt{5})$$

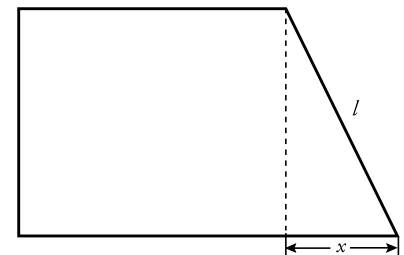
Calculamos ahora l usando el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = x^2 + h^2 = [3(1 + \sqrt{5})]^2 + [4(1 + \sqrt{5})]^2 = 9(1 + \sqrt{5})^2 + 16(1 + \sqrt{5})^2 = 25(1 + \sqrt{5})^2$$

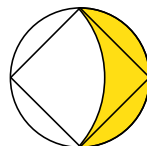
Por lo tanto, $l = 5(1 + \sqrt{5})$.

Solamente nos queda calcular el perímetro sumando los lados del trapecio:

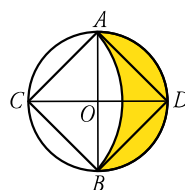
$$P = 7 + 2\sqrt{5} + (4 - \sqrt{5}) + 4(1 + \sqrt{5}) + 5(1 + \sqrt{5}) = 10(2 + \sqrt{5}) \text{ cm}$$



57 Si el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia mide 1 m, ¿cuál es el área de la parte coloreada?



Llamaremos r al radio de la circunferencia dibujada, d a su diámetro, O al centro de la circunferencia.



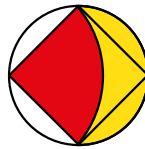
- Calculemos el diámetro, d , y el radio, r .

Como el área del cuadrado $ABCD$ es 1 ya que su lado mide 1, podemos deducir que el área del triángulo ABC es la mitad del área del cuadrado $ABCD$. Así $A_1 = \frac{1}{2}$ y aplicamos la fórmula de su área, sabiendo que el radio es la mitad del diámetro:

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{d \cdot r}{2} = \frac{d \cdot \left(\frac{d}{2}\right)}{2} = \frac{d^2}{4}$$

Entonces $\frac{d^2}{4} = 1$ y de aquí deducimos que $d = \sqrt{2}$ y $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Busquemos el área de la circunferencia del dibujo, cuyo radio es r : $A_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$.
- Busquemos el área de la circunferencia cuyo radio es el lado del cuadrado. Así podremos saber el área roja del dibujo.



$$A_3 = \pi r^2 = \pi \text{ (área de la circunferencia completa)}$$

$$A_4 = \frac{\pi}{4} \text{ (área roja)}$$

- Busquemos ahora el área verde: $A_5 = A_4 - A_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$



- Ya solamente nos queda restar para encontrar el área amarilla:

$$A_6 = \frac{A_2}{2} - A_5 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Cuestiones teóricas

58 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

- Hay números irracionales que son enteros.
 - Todo número irracional es real.
 - Todos los números decimales son racionales.
 - Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.
- Falso. Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.
 - Verdadero.
 - Falso. El número π es decimal pero no es racional, puesto que no puede expresarse como cociente de dos números enteros.
 - Verdadero.

59 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\pi/2$.

Aproximamos su valor: $\frac{\pi}{2} = 1,5708 \rightarrow \frac{\pi}{2} \in (1, 2)$

60 Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) x^{-2} es negativo si lo es x .

b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x .

c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.

a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x .

b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.

c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

61 ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$ b) $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$ d) $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$

b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log m}{\log n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

AUTOEVALUACIÓN

Página 53

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} pertenecen:

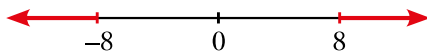
$$-\frac{58}{45}; \frac{51}{17}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[3]{-8}; \sqrt[5]{2^3}; 1,0\overline{7}$$

$$\mathbb{N}: \frac{51}{17} \quad \mathbb{Z}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8} \quad \mathbb{Q}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\overline{7} \quad \mathbb{R}: \frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\overline{7}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[5]{2^3}; \sqrt[4]{-3}$$

2 Expresa en forma de intervalo y haz la representación

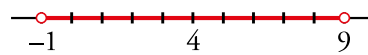
a) $|x| \geq 8$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $|x - 4| < 5$

b) $(-1, 9)$



3 Escribe como potencia y simplifica.

$$(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}) : (a\sqrt{a})$$

$$(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}) : (a\sqrt{a}) = (a^{3/4} \cdot a^{-1}) : (a \cdot a^{1/2}) = (a^{3/4-1}) : (a^{1+1/2}) = (a^{-1/4}) : (a^{3/2}) = a^{-1/4-3/2} = a^{-7/4}$$

4 Calcula y simplifica: $\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{5^3}{3^3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{25-9}{3\sqrt{15}} = \frac{16}{3\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{45}$$

5 Racionaliza.

a) $\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

b) $\frac{2}{3 - \sqrt{3}}$

a) $\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4 + \sqrt{6})(\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{18}}{2 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$

6 Simplifica: $\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$

$$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7} + \sqrt{5^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

7 Sabiendo que $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D &= \left(\frac{3,24 \cdot 10^6}{5,1 \cdot 10^{-5}} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = \left(\frac{3,24}{5,1} 10^{11} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = \\ &= (0,63529 + 3,8) \cdot 10^{11} \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = 4,4353 \cdot 6,2 \cdot 10^5 = 27,499 \cdot 10^5 = \\ &= 2,7499 \cdot 10^6 = 2,75 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

$$E.A. < 0,5 \cdot 10^4$$

$$E.R. < \frac{0,5 \cdot 10^4}{2,75 \cdot 10^6} = 1,8182 \cdot 10^{-3} = 0,00182 = 0,18 \%$$

8 Aplica la definición de logaritmo y obtén x .

a) $\log_3 x = -1$

b) $\log x = 2,5$

c) $\ln x = 2$

a) $\log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $\log x = 2,5 \rightarrow x = 10^{2,5} \rightarrow x = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 10^2 \sqrt{10}$

c) $\ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

9 Calcula x en cada caso.

a) $2,5^x = 0,0087$

b) $1,005^{3x} = 143$

a) $x \log 2,5 = \log 0,0087 \rightarrow x = \frac{\log 0,0087}{\log 2,5} = -5,18$

b) $1,005^{3x} = 143$

Tomamos logaritmos:

$$\log 1,005^{3x} = \log 143 \rightarrow 3x \log 1,005 = \log 143 \rightarrow x = \frac{\log 143}{3 \log 1,005} \approx 331,68$$

10 Expresa como un solo logaritmo y di el valor de A :

$$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log A$$

$$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log 5 + \log 3^2 - \log 4 = \log \left(\frac{5 \cdot 9}{4} \right) \rightarrow A = \frac{45}{4}$$

11 Si $\log k = 0,8$, ¿cuál es el valor de $\log 10k^3 + \log \frac{\sqrt{k}}{100}$?

$$\log 10k^3 + \log \frac{\sqrt{k}}{100} = \log 10 + \log k^3 + \log \sqrt{k} - \log 100 = 1 + 3 \log k + \frac{1}{2} \log k - 2 = 1 + 3 \cdot 0,8 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 - 2 = 1,8$$

12 El área total de un cubo es 12 cm^2 . ¿Cuál es el área total del cilindro inscrito en el cubo? Da el valor exacto.

El área total del cubo es $6a^2 = 12 \rightarrow a = \sqrt{2}$.

El radio del cilindro inscrito es $r = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

El área de una base del cilindro es $\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$.

El área lateral del cilindro es $2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 2\pi$.

El área total del cilindro es $2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi = 3\pi \text{ cm}^2$.

