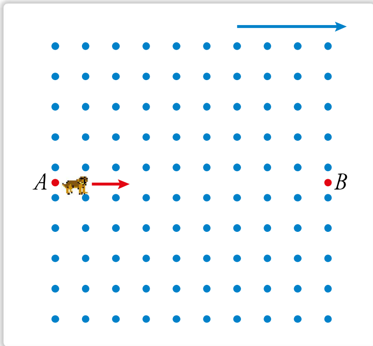
3 ÁLGEBRA

Página 76

Resuelve

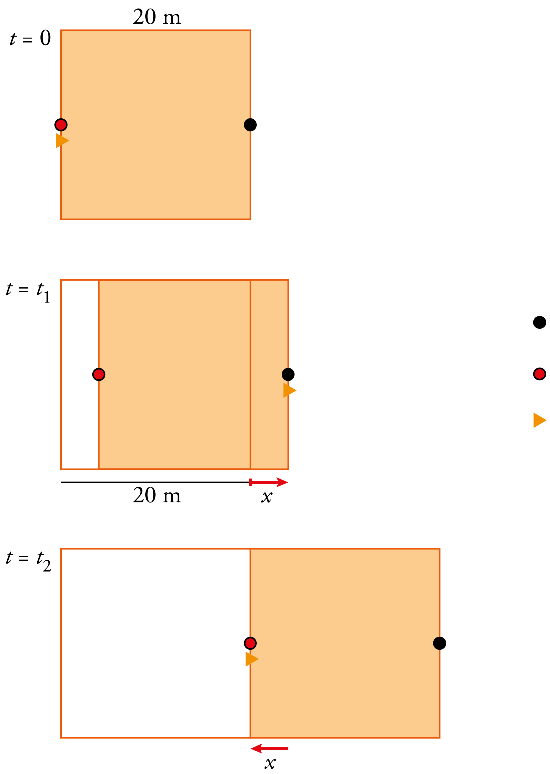
Los cadetes que desfilan con su mascota

Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 metros de lado, avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño perro, parte del centro de la última fila, punto *A*, camina en línea recta hasta el centro de la fila de cabeza, punto *B*, y regresa del mismo modo hasta el centro de la última fila. En el momento de volver a alcanzar *A*, los cadetes han recorrido exactamente 20 metros.



Suponiendo que el perro camina con velocidad constante y que no pierde tiempo en los giros, ¿cuántos metros ha recorrido?

Representamos esquemáticamente el movimiento de la mascota y de los cadetes:



Llamamos x al espacio que recorre el soldado de cabeza hasta que la mascota lo alcanza, y usaremos la fórmula $tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$.

El tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el soldado de cabeza, t_1, es el mismo que el que tarda el soldado de cabeza en recorrer los x metros.

Llamamos $v_{mascota}$ a la velocidad de la mascota y v_{cadete} a la velocidad de los cadetes.

La ventaja del cadete de cabeza es de 20 m.

t_1 = tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el cadete de cabeza

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}}$$

t_1 = tiempo que tarda el cadete de cabeza en recorrer los x metros

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadete}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}} = \frac{x}{v_{cadete}}$$

El espacio recorrido por la mascota cuando avanza con los cadetes es $20 + x$. El espacio recorrido por la mascota al volver es x, puesto que al final se queda a 20 m del principio. Luego el espacio total recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x$.

El tiempo total durante el cual avanza la compañía, t_2, es el mismo que el tiempo que está la mascota corriendo.

t_2 = tiempo total durante el cual avanza la compañía

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadete}}$$

t_2 = tiempo total durante el cual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadete}} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operamos en la igualdad I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadete}) = 20 \cdot v_{cadete} \rightarrow x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadete} + xv_{cadete} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot v_{mascota} = v_{cadete}(20 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{mascota} = v_{cadete}\frac{(20 + x)}{x} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hemos obtenido la razón entre las dos velocidades. Usamos esta relación en la igualdad II y obtenemos:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operamos y obtenemos:

$$2x^2 = 400 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

El espacio recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 POLINOMIOS. FACTORIZACIÓN

Página 79

1 Descompón factorialmente estos polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -9 & 24 & -20 \\
2 & & 2 & -14 & 20 \\
\hline
 & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -10 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)^2\,(x - 5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\
1 & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & 2 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -3 & -2 & -8 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & 4 & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$ (no tiene solución)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 4)\,(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\
-1 & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\
\hline
 & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} & & \\
1 & & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -1$ (no tiene solución)

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x + 3)^2\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\ 2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\ \hline & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -4 & -4 & 3 & \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

2 **a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +4x^3 & +8x^2 & +7x & +4 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2+3x+4 \\ \cline{1-5} & 3x^3 & +7x^2 & +7x & +4 & \\ & -3x^3 & -3x^2 & -3x & & \\ \cline{2-5} & & 4x^2 & +4x & +4 & \\ & & -4x^2 & -4x & -4 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución).

Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3 **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-1/2$ y $1/3$ son raíces suyas y comprueba tus resultados con la calculadora.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\ -1/2 & & -3 & -2 & -2 & 1 \\ \hline & 6 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0} \\ 1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$6x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$6(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \text{(no tiene solución)}$$

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6(x^2 + x + 1) = (2x+1)(3x-1)(x^2+x+1)$$

2 FRACCIONES ALGEBRAICAS

Página 81

1 ¿Verdadero o falso?

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x-3}{x^2-1}=\dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{x+1}{x}-1=\dfrac{1}{x}$

a) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, luego es falso.

b) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x-1)(x+1)=x^2-1$, luego es verdadero.

c) La primera fracción es el triple de $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, y la segunda es el triple de $\dfrac{1}{x+1}$ que son las fracciones del apartado anterior, luego es verdadero.

d) Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{x+1-x}{x}=\frac{1}{x}$$

Obtenemos el miembro de la derecha, luego es verdadero.

2 Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x \\ x^2+x=x(x+1) \\ x+1=x+1 \end{array}\right\} \text{ mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x}=\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1}=-\frac{(2x+1)x}{x(x+1)}=-\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x}+\frac{x-2}{x^2+x}-\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}+\frac{x-2}{x(x+1)}+\frac{-2x^2-x}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x}=\frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

3 **Efectúa.**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$

$=\dfrac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x=\dfrac{x+5x(x+1)}{x+1}=\dfrac{x(5x+6)}{x+1}=\dfrac{5x^2+6x}{x+1}$

4 **Efectúa estas operaciones:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)}=\dfrac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

5 **Calcula.**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{x+2}{x}:\dfrac{x(x-1)}{3(2x+1)}=\dfrac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)}$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}=\dfrac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)x^4}=\dfrac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)x^4}=\dfrac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)x^4}=x^2-1$

3 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Página 82

Hazlo tú

1 Resuelve esta ecuación:

$$\boldsymbol{x^4 - 2x^2 + 1 = 0}$$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 2y + 1 = 0 \to y = 1 \to x = \pm\sqrt{1}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

Piensa y practica

1 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 12 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 8x^2 - 9 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$ $\begin{cases} 4 \to x = \pm 2 \\ -3 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2}$ $\begin{cases} 9 \to x = \pm 3 \\ -1 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

2 Resuelve:

a) $\boldsymbol{x^4 + 10x^2 + 9 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 2 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2}$ $\begin{cases} -1 \to \text{(no vale)} \\ -9 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

No tiene solución.

b) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x^2 = -1 \to \text{(no vale)} \\ x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$

Página 83

Hazlo tú

1 Resuelve.

a) $\boldsymbol{\sqrt{19 - 6x} - 2 = x}$ **b)** $\boldsymbol{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5}$

a) $\sqrt{19 - 6x} - 2 = x \to \sqrt{19 - 6x} = x + 2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$19 - 6x = x^2 + 4x + 4 \to x^2 + 10x - 15 = 0 \to x_1 = -5 + 2\sqrt{10},\ x_2 = -5 - 2\sqrt{10}$ (no vale)

Solución: $x = -5 + 2\sqrt{10}$

b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5 \to \sqrt{x-2} = 5 - \sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = x - 10\sqrt{x-3} + 22 \to 10\sqrt{x-3} = 24 \to x - 3 = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 \to x = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 + 3 = \dfrac{219}{25}$, que es válida.

Solución: $x = \dfrac{219}{25}$

Piensa y practica

3 **Resuelve.**

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$ **b)** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$

c) $2+\sqrt{x}=x$ **d)** $2-\sqrt{x}=x$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{2x+1}+1=\sqrt{3x}$

a) $1-x=\sqrt{2x-3}$

$1+x^2-2x=2x-3$

$x^2-4x+4=0;\ \ x=2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x-3=16+x+7+8\sqrt{x+7}$

$x-26=8\sqrt{x+7}$

$x^2+676-52x=64(x+7)$

$x^2+676-52x=64x+448$

$x^2-116x+228=0$

$$x=\frac{116\pm 112}{2}=\begin{cases}114\\ 2\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$$

$x=114$

c) $\sqrt{x}=x-2;\ \ x=x^2+4-4x;\ \ 0=x^2-5x+4$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\ 1\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$$

$x=4$

d) $2-x=\sqrt{x};\ \ 4+x^2-4x=x;\ \ x^2-5x+4=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\ \to\ \text{(no vale)}\\ 1\end{cases}$$

$x=1$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$

$3x+3=1+8-2x+2\sqrt{8-2x}$

$5x-6=2\sqrt{8-2x}$

$25x^2+36-60x=4(8-2x)$

$25x^2-52x+4=0$

$$x=\frac{52\pm 48}{50}=\begin{cases}2\\ 0{,}08\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$$

Así, $x=2$.

f) $\sqrt{2x+1}+1=\sqrt{3x}$

$2x+1+1+2\sqrt{2x+1}=3x$

$2\sqrt{2x+1}=x-2$

$4(2x+1)=x^2+4-4x$

$x^2-12x=0\ \to\ x=0$ (no vale) y $x=12$

Así, $x=12$

4 **Resuelve.**

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ **b)** $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$ **d)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$ **f)** $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$

$\sqrt{4x+9} = 2 + \sqrt{2x+1}$

$4x + 9 = 4 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x+1}$

$x + 2 = 2\sqrt{2x+1}$

$x^2 + 4 + 4x = 4(2x + 1)$

$x^2 - 4x = 0;\ \ x(x - 4) = 0$

$x_1 = 0,\ \ x_2 = 4$

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

$\sqrt{3x+4} = \sqrt{1-x} + 1$

$3x + 4 = 1 - x + 1 + 2\sqrt{1-x}$

$2\sqrt{1-x} = 4x + 2$

$4(1 - x) = 16x^2 + 16x + 4$

$4x^2 + 5x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0,\ \ x_2 = \dfrac{-5}{4}$ (no vale)

$x = 0$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$

$\sqrt{x+3} = x - 3$

$x + 3 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \ \rightarrow\ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 6$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

$\sqrt{x-2} = -\sqrt{x+1} + 3$

$x - 2 = (x + 1) + 9 - 6\sqrt{x+1}$

$6\sqrt{x+1} = 12$

$36(x + 1) = 144$

$x = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$3x = x + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x}$

$x - 1 = \sqrt{2}\sqrt{x}$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \ \rightarrow\ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 2 + \sqrt{3}$

f) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$-5-7x+4+x+2\sqrt{-5-7x}\,\sqrt{4+x} = 7-6x$

$\sqrt{(-5-7x)(4+x)} = 4$

$7x^2 + 33x + 36 = 0$

$x = \dfrac{-33 \pm 9}{14} = \begin{cases} x = -\dfrac{12}{7} \\ x = -3 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{-12}{7},\; x_2 = -3$

Página 84

Hazlo tú

1 **Resuelve esta ecuación:**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{3}$$

$3(x-2) + 3x = 4x(x-2)$

$2x^2 - 7x + 3 = 0;\; x = \dfrac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = 3,\; x_2 = \dfrac{1}{2}$

Las dos soluciones son válidas.

Piensa y practica

5 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$ **b)** $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$ **c)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

a) $10(x+3) - 10x = 3x(x+3)$

$10x + 30 - 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 + 9x - 30;\; x = \dfrac{-9 \pm 21}{6} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$

$x_1 = -2;\; x_2 = 2$

b) $12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\; x = \dfrac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\; x_2 = \dfrac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\; 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \dfrac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\; x_2 = \dfrac{-2}{3}$

6 **Resuelve.**

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$ **b)** $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{26}{35}$

a) $x(x+1)+2x(x-1)=3(x^2-1)$

$x^2+x+2x^2-2x=3x^2-3$

$x=3$

b) $10(x+3)+2x(x+2)=3(x^2+5x+6)$

$10x+30+2x^2+4x=3x^2+15x+18$

$0=x^2+x-12$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

$x_1=3;\ x_2=-4$

c) $35(x+3)\,(x+1)-35(x^2+1)=26\,(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3)-35(x^2+1)=26(x^2-1)$

$35x^2+140x+105-35x^2-35=26x^2-26$

$26x^2-140x-96=0$

$x=\dfrac{70\pm\sqrt{70^2-4\cdot 13\cdot(-48)}}{26}=\dfrac{70\pm 86}{26}=\begin{cases}6\\-8/13\end{cases}$

$x_1=6;\ x_2=\dfrac{-8}{13}$

Página 85

Hazlo tú

1 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}$ **b)** $7^{x^2+2x-15}=1$ **c)** $3^x+3^{x-1}=36$

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}\ \to\ 5^{6-x^2}=5^{-3}\ \to\ 6-x^2=-3\ \to\ x^2=9\ \to\ x_1=3,\ x_2=-3$

b) $7^{x^2+2x-15}=1\ \to\ 7^{x^2+2x-15}=7^0\ \to\ x^2+2x-15=0\ \to\ x_1=3,\ x_2=-5$

c) $3^x+3^{x-1}=36$

Hacemos el cambio de variable $3^x=y$. Nos queda:

$y+\dfrac{y}{3}=36\ \to\ y=27\ \to\ 3^x=27\ \to\ x=3$

Piensa y practica

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$ **c)** $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}}=186$ **d)** $7^{x+2}=5\,764\,801$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2}\ \to\ 3x=-3x-2\ \to\ 6x=-2\ \to\ x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2}=3^{-2}\ \to\ 4-x^2=-2\ \to\ x^2=6\ \to\ x=\pm\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=186\ \to\ 2^{2x-2-x-2}=186\ \to\ 2^{x-4}=186\ \to$

$\to\ \log 2^{x-4}=\log 186\ \to\ (x-4)\log 2=\log 186\ \to\ x=4+\dfrac{\log 186}{\log 2}=11{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8\ \to\ x=6$

8 Resuelve.

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

c) $\frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3\,125$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6}$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30 \to 3^x(10) = 30 \to 3^x = 3 \to x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \frac{5^x}{5} = \frac{31}{5} \to 5^x \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{5} \to x = 0$

c) $\frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3\,125 \to \frac{5^{x^2+1}}{5^{2(x+2)}} = 5^5 \to 5^{x^2+1-2(x+2)} = 5^5 \to$

$\to x^2 + 1 - 2(x+2) = 5 \to x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6} \to 5^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-6} \to 5^{2x} = 5^{-(4x-6)} \to 2x = -(4x-6) \to 6x = 6 \to x = 1$

Página 86

Hazlo tú

1 Resuelve.

a) $log\, x - log\, 4 = 2$

b) $3\, log_5\, (x - 1) = log_5\, 125$

c) $2\, ln\, x = ln\, (2x + 3)$

Recuerda: ***ln*** **es logaritmo neperiano o logaritmo en base *e* y *log* es logaritmo decimal o logaritmo en base 10.**

a) $log\, x - log\, 4 = 2 \to log\left(\frac{x}{4}\right) = log\, 10^2 \to \frac{x}{4} = 100 \to x = 400$

b) $3log_5\,(x - 1) = log_5\, 125 \to 3log_5\,(x-1) = 3log_5\, 5 \to x - 1 = 5 \to x = 6$

c) $2ln\, x = ln\,(2x+3) \to ln\, x^2 = ln\,(2x+3) \to x^2 = 2x + 3 \to x_1 = 3,\ x_2 = -1$ (no válida)

Solución: $x = 3$

Piensa y practica

9 ¿Verdadero o falso?

a) Al resolver una ecuación con algún radical cuadrático siempre aparece alguna raíz falsa.

b) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4$.

c) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = 2$.

a) Falso, hemos resuelto ecuaciones de este tipo en las que todas las soluciones eran válidas.

Ejemplo: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ en la página 83.

b) Verdadero, si sustituimos x por 4 o por –4 obtenemos una igualdad.

c) Falso, solo es solución $x = 4$. Al sustituir x por –4 no sale una igualdad.

10 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ **d)** $x^4 - 18x^2 = 0$

a) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - 5y + 4 \to y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \to y_1 = 4,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2;\ x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0 \to y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \to y_1 = -3,\ y_2 = -2$

$x = \sqrt{-3};\ x = \sqrt{-2} \to$ no hay solución

c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \to y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \to x_1 = 2;\ x_2 = -2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) $x^4 - 18x^2 = 0 \to x^2(x^2 - 18) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

11 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-5}{x}$ **b)** $\dfrac{3+x}{x-1} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{-x}{x+1} + \dfrac{2x+1}{2x} + \dfrac{1}{x^2-1} = 0$ **d)** $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x+2}{x+1}$

a) $x(3x-2) - 4 = x(2x-5) \to 3x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 5x \to x^2 + 3x - 4 = 0 \to x_1 = 1, x_2 = -4$

b) $(3+x)(x+1) + 5(x-1) = x - 2 \to 3x + 3 + x^2 + x + 5x - 5 = x - 2 \to x^2 + 8x = 0 \to x_1 = 0, x_2 = -8$

c) $2x(-x)(x-1) + (2x+1)(x^2-1) + 2x = 0 \to 3x^2 - 1 = 0 \to x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $x^2 - (x+1) = x(3x+2) \to x^2 - x - 1 = 3x^2 + 2x \to 2x^2 + 3x + 1 = 0 \to x_1 = -\dfrac{1}{2}, x_2 = -1$ (no válida)

12 **Resuelve.**

a) $\sqrt{3x-2} + x = 2$ **b)** $\sqrt{7+x} - \sqrt{19+x} = -2$

c) $6 - \sqrt{x} = x$ **d)** $\sqrt{x+3} - 7 = \sqrt{3x-2}$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$ **f)** $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

a) $\sqrt{3x-2} = 2 - x$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$3x - 2 = 4 + x^2 - 4x \to x^2 - 7x + 6 = 0 \to x_1 = 1,\ x_2 = 6$$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_2 = 6$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 1$

b) $\sqrt{7+x} - \sqrt{19+x} = -2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$7 + x + 19 + x - 2\sqrt{7+x}\sqrt{19+x} = 4 \to x + 11 = \sqrt{7+x}\sqrt{19+x}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$x^2 + 121 + 22x = (7+x)(19+x) = 1\,333 + 26x + x^2 \to -4x = 12 \to x = -3$$

Si comprobamos la solución, observamos que es válida.

Solución: $x = -3$

c) $6 - x = \sqrt{x} \;\rightarrow\; 36 + x^2 - 12x = x \;\rightarrow\; x^2 - 13x + 36 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 9,\; x_2 = 4$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_1 = 9$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 4$

d) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x + 3 + 49 - 14\sqrt{x+3} = 3x - 2 \;\rightarrow\; -2x + 54 = 14\sqrt{x+3}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$4x^2 + 2\,916 - 216 = 196\,(x+3) \;\rightarrow\; 4x^2 - 196x + 2\,658 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 98 + 1\,329 = 0$$

Vemos que no tiene solución ya que nos queda un número negativo dentro de la raíz:

$$x = \frac{98 \pm \sqrt{-1\,028}}{4}$$

e) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$3x + x - 2 - 2\sqrt{3x}\sqrt{x-2} = x + 1 \;\rightarrow\; 3x - 3 = 2\sqrt{3x}\sqrt{x-2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$9x^2 + 9 - 18x = 4 \cdot 3x \cdot (x-2) \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 3,\; x_2 = -1$$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_2 = -1$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 3$

f) $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1} = \sqrt{27+3x} - 2$

$5x + 1 = 3x - 4\sqrt{3x+27} + 31$

$4\sqrt{3x+27} = -(5x+1) + 3x + 31$

$16\,(3x+27) = 4x^2 - 120\,x + 900$

$16\,(3x+27) - 4x^2 + 120x - 900 = 0 \;\rightarrow\; x = 39,\; x = 3$

Comprobación:

$x = 39 \;\rightarrow\; \sqrt{5 \cdot 39 + 1} + 2 = \sqrt{27 + 3 \cdot 39} \;\rightarrow\; 14 + 2 \neq 12 \;\rightarrow$ (no vale)

$x = 3 \;\rightarrow\; \sqrt{5 \cdot 3 + 1} + 2 = \sqrt{27 + 3 \cdot 3} \;\rightarrow\; 4 + 2 = 6$

Solución: $x = 3$

13 Resuelve.

a) $\mathbf{2^{x^2-4x} = \dfrac{1}{16}}$ **b)** $\mathbf{5^{x^2-1} = 7}$

c) $\mathbf{3^{x+2} - 3^x = 72}$ **d)** $\mathbf{7^{x^2-x-2} = 1}$

a) $2^{x^2-4x} = 2^{-4} \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

b) Aplicamos logaritmos a ambos lados de la igualdad y operamos:

$(x^2 - 1)\,log\,5 = log\,7 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{log\,7}{log\,5} + 1 \;\rightarrow\; x = \pm 1{,}4863$

c) Sacamos factor común: $3^x(3^2 - 1) = 72 \;\rightarrow\; 3^x = \dfrac{72}{8} = 9 = 3^2 \;\rightarrow\; x = 2$

d) Sabemos que $1 = 7^0$

Por tanto:

$7^{x^2-x-2} = 7^0 \;\rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 2$

14 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{log\,(x + 4) + log\,(x + 1) = 1}$ **b)** $\boldsymbol{log_3\, x + log_3\,(x - 2) = 3\, log_3\,(x - 2)}$

c) $\boldsymbol{2\, log\, x - log\,(x + 6) = 3\, log\, 2}$ **d)** $\boldsymbol{4\, log_2\,(x^2 + 1) = log_2\, 625}$

a) Aplicamos la propiedad de la suma de logaritmos:

$log[(x+4)(x+1)] = 1 \rightarrow (x+4)(x+1) = 10^1 \rightarrow x^2 + 5x + 4 - 10 = 0 \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \rightarrow x_1 = 1,\, x_2 = -6$$

b) $log_3 x + log_3 (x-2) = 3\, log_3 (x-2) \rightarrow log_3 x = 2\, log_3 (x-2) \rightarrow log_3 x = log_3 (x-2)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x = (x-2)^2 \rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 4,\; x_2 = 1$ donde descartamos la solución $x = 1$ ya que no existe el logaritmo de un número negativo $(log(x-2) = log(-1))$.

Solución: $x = 4$

c) $log \dfrac{x^2}{x+6} = log\, 8$

$x^2 = 8x + 48;\; x^2 - 8x - 48 = 0;\; x = \dfrac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 12$

d) $log_2 (x^2 + 1)^4 = log_2\, 5^4;\; x^2 + 1 = 5;\; x^2 = 4;\; x = \pm 2$

$x_1 = 2;\; x_2 = -2$

4 ▶ RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 88

1 ¿Verdadero o falso?

a) El sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ **tiene dos soluciones:** $x = 4,\ y = 1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ **tiene solo dos soluciones:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1]$ **y** $[x_2 = -2,\ y_2 = -1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ **tiene cuatro soluciones:**

$[x_1 = 2,\ y_1 = 1];\ [x_2 = 2,\ y_2 = -1]$

$[x_3 = -2,\ y_3 = 1];\ [x_4 = -2,\ y_4 = -1]$

a) Falso, $x = 4$ e $y = 1$ no son dos soluciones, sino una solución para cada incógnita, luego son una solución del sistema.

b) Falso, como las dos incógnitas están al cuadrado, también son soluciones $x_3 = -2,\ y_3 = 1$ y $x_4 = 2,\ y_4 = -1$.

c) Verdadero, por el razonamiento del apartado anterior.

2 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 16 \\ \sqrt{5-4y} - x = -(x+y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{array}\right\}$

$x^2 - 9 = 2x - 1;\ x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ y_1 = 7$

$x_2 = -2;\ y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$

$y = 5 - x$

$x(5 - x) = 6;\ 5x - x^2 = 6;\ x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ y_1 = 3$

$x_2 = 3;\ y_2 = 2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \rightarrow x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \begin{cases} y = 1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ y = -5 \end{cases}$

$25 - x^2 = 16 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

3 Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log (x^2 + y) - \log (x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log (2x - y^2) = \log (2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} \log \dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ log\,\dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$\dfrac{x}{y} = 10 \rightarrow x = 10y$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + log\,10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,10\,(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 10\,(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;$

$y\,(y - 4) = 0;\ \ y = 4,\ \ y = 0$

$y = 4$ no es válida porque aparecería $log\,(-2)$ en la primera ecuación.

$x = 10;\ \ y = 0$

5 ▶ INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Página 89

1 Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \le 10$ **b)** $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \ge 6$ **d)** $3x + 1 \le 15$

a) $3x - 2 \le 10 \;\to\; 3x \le 12 \;\to\; x \le 4$

Soluciones: $\{x \,/\, x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \;\to\; x > 3$

Soluciones: $\{x \,/\, x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \;\to\; 2x \ge 1 \;\to\; x \ge \frac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \ge \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \;\to\; 3x \le 14 \;\to\; x \le \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \le \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2 Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 2 \le 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \ge 6 \\ 3x + 1 \le 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones:* $\{x \,/\, 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le \frac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones:* $\left\{x \,/\, \frac{1}{2} \le x \le \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

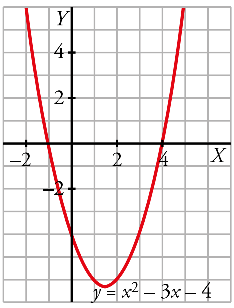
Página 90

3 Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 \ge 0$

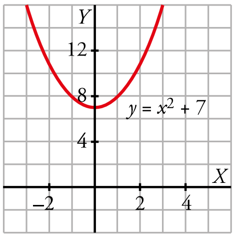
c) $x^2 + 7 < 0$ **d)** $x^2 - 4 \le 0$

a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \;\to\;$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \;\to\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c) 

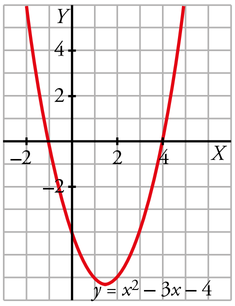
$x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $x^2 - 4 \leq 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo (–2, 2); y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo [–2, 2].

4 Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a) 

$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{array} \right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son los puntos del intervalo [–2, 2]. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

6 ▶ INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Página 91

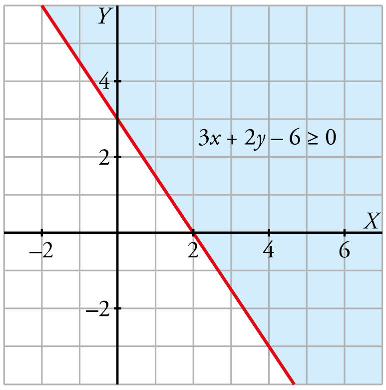
1 Resuelve.

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibujamos la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

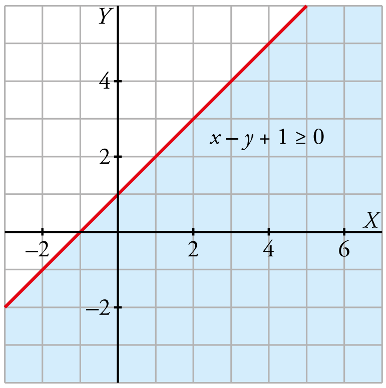
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.



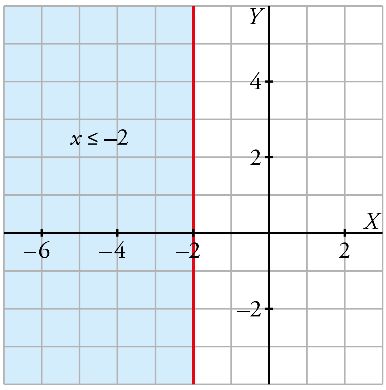
2 Resuelve.

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibujamos la recta $r: x = -2$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 2 \leq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

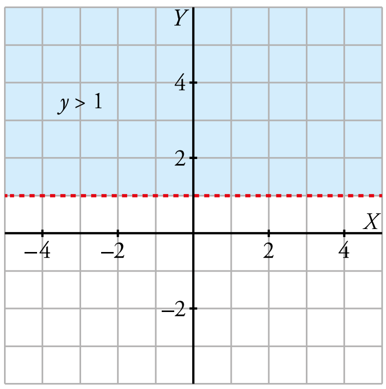


b) Dibujamos la recta $r: y = 1$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 \geq 1$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

La recta $y = 1$ no pertenece al conjunto de soluciones.



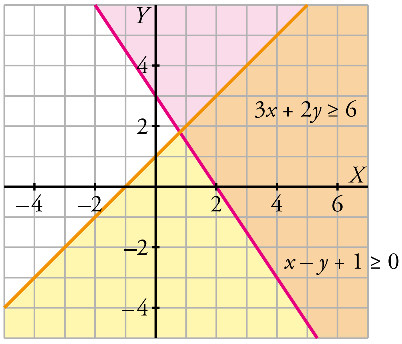
Página 92

3 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

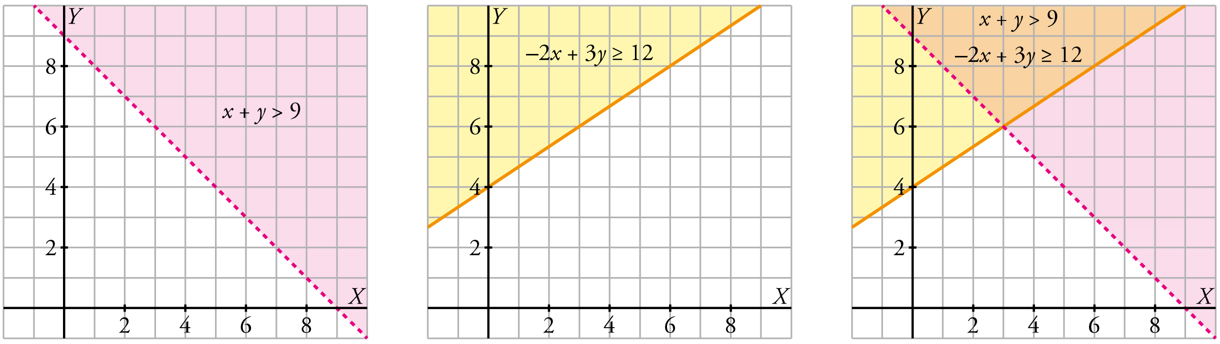
a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y > 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y < 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y < 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y > -3 \\ x + y > 11 \\ x \leq 2 \end{cases}$

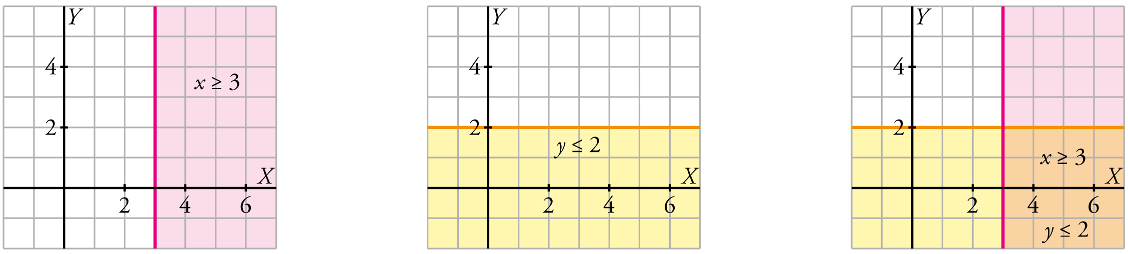
a) Ambas inecuaciones han sido resueltas en el ejercicio 1 anterior. El recinto solución del sistema es la intersección de los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones. Es decir, es el recinto de color marrón.



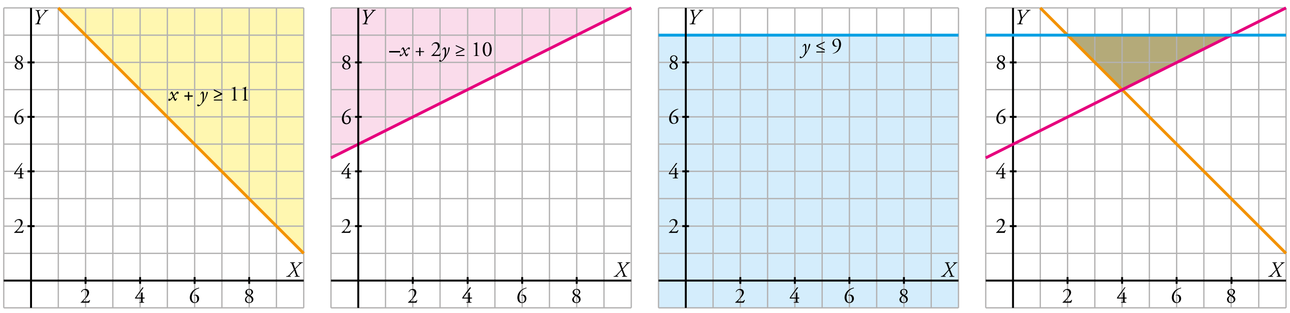
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.



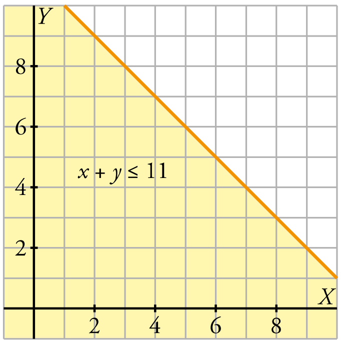
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

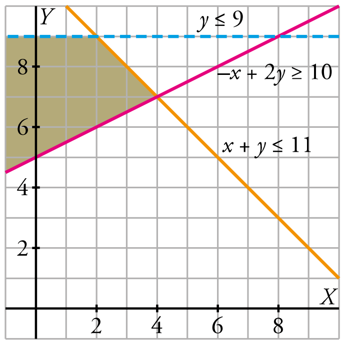


d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los semiplanos. La solución es el triángulo de intersección.

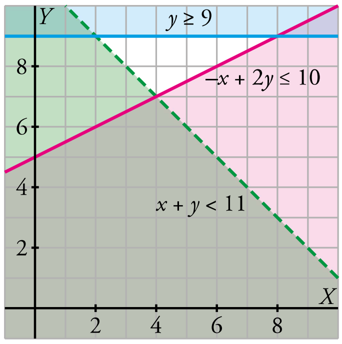


e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. Los semiplanos de la segunda y tercera inecuaciones coinciden con los del apartado d). Representamos el semiplano de la primera inecuación. La solución es la región común a los recintos.

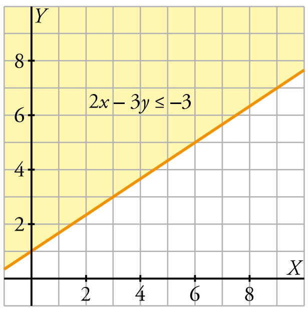


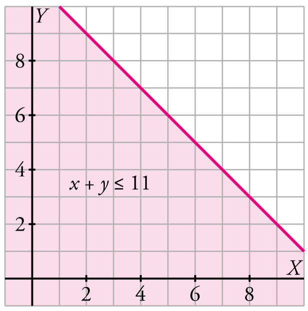


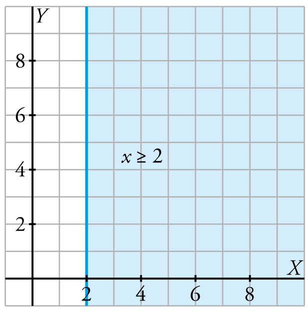
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.

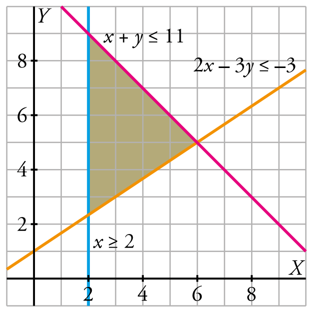


g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. La solución es el triángulo común a los semiplanos.

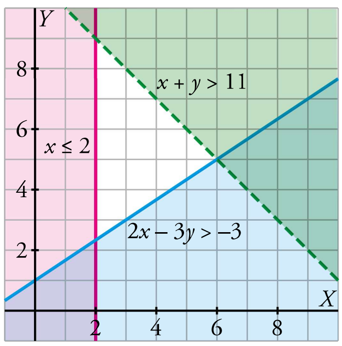








h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 93

1. Ecuaciones polinómicas de grado tres o superior

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

$12x^4 + 14x^3 - 2x = 0$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común $2x$:

$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$

Buscamos ahora las raíces enteras del nuevo polinomio entre los divisores del término independiente y factorizamos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$

Como no hay más raíces enteras, para descomponer el polinomio de segundo grado resolvemos la ecuación asociada y como el coeficiente principal es 6, nos queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Ecuaciones con valores absolutos

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $|x^2 - 2| = 2$

b) $|3x + 1| = |2x + 4|$

c) $|x + 3| = |2x| + 2$

a) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado a).

$x^2 - 2 = 2 \ \to\ x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \ \to\ x_3 = 0$

b) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado b).

$3x + 1 = 2x + 4 \ \to\ x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \ \to\ x_2 = -1$

c) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado c).

$$|x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } x \ge -3 \end{cases} \qquad |2x| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

	$x < -3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert 2x\rvert$	$-2x$	$-2x$	$2x$
$\lvert 2x\rvert+2$	$-2x+2$	$-2x+2$	$2x+2$

$x < -3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$-x-3 = -2x+2$	$x+3 = -2x+2$	$x+3 = 2x+2$
$x = 5 \notin (-\infty, -3)$	$x = -1/3 \in [-3, 0)$	$x = 1 \in [0, +\infty)$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{1}{3},\ x_2 = 1$

Página 94

3. Ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

  $\boldsymbol{x^8 - 15x^4 - 16 = 0}$

  Hacemos el cambio de variable: $x^4 = y$

  La ecuación queda: $y^2 - 15y - 16 = 0 \to y_1 = 16,\ y_2 = -1$

  $x = \pm\sqrt[4]{16} \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

  $x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existe.

  Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

  a) $\boldsymbol{3^{x^2+1} - 9^x = 0}$

  b) $\boldsymbol{2\,log\,x - log\,(x-1) = log\,4}$

  a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0 \to 3^{x^2+1} - (3^2)^x = 0 \to 3^{x^2+1} - 3^{2x} = 0 \to 3^{x^2+1} = 3^{2x}$

  Igualamos los exponentes: $x^2 + 1 = 2x \to x = 1$

  b) $2log\,x - log\,(x-1) = log\,4 \to log\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = log\,4 \to \dfrac{x^2}{x-1} = 4 \to x = 2$ que es solución válida.

5. Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Hazlo tú

- **Resuelve, si es posible, por el método que creas conveniente:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y + z = 5 \\ 4x + y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y la restamos a la segunda:

$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ -y - 4z = -3 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

Sumamos la primera y la tercera:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - 4z = -3 \\ 5y + 2z = 3 \end{cases}$

Multiplicamos por 2 la tercera y le sumamos la segunda:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - 4z = -3 \\ 9y = 3 \end{cases}$

Por tanto:

$y = \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} - 4z = -3 \;\rightarrow\; z = \frac{2}{3}$

$x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \;\rightarrow\; x = 0$

Solución: $x = 0,\ y = \frac{1}{3},\ z = \frac{2}{3}$

b) $\begin{cases} -x + y + z = 5 \\ 5x + y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \end{cases}$

Restamos la primera a la segunda:

$\begin{cases} -x + y + z = 5 \\ 5x - 3z = -8 \\ 3x - y + 4z = -2 \end{cases}$

Sumamos la primera y la tercera:

$\begin{cases} -x + y + z = 5 \\ 5x - 3z = -8 \\ 2x + 5z = 3 \end{cases}$

Multiplicamos por 5 la tercera y le restamos la segunda multiplicada por 2:

$$\begin{cases} -x + y + \ \ z = 5 \\ 5x \qquad - 3z = -8 \\ \qquad\quad 31z = 31 \end{cases}$$

Por tanto:

$z = 1$

$5x - 3 = -8 \ \rightarrow \ x = -1$

$1 + y + 1 = 5 \ \rightarrow \ y = 3$

Solución: $x = -1$, $y = 3$, $z = 1$

Página 95

6. Inecuaciones con fracciones algebraicas

Hazlo tú

- **Resuelve esta inecuación:**

$$\frac{x-1}{x} \le x$$

$$\frac{x-1}{x} - x \le 0 \ \rightarrow \ \frac{x-1-x^2}{x} \le 0$$

La ecuación $x - 1 - x^2 = 0$ no tiene solución y la gráfica de $x - 1 - x^2 = 0$ no tiene valores positivos.

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, +\infty)$
$x - 1 - x^2$	–	–	–
x	–	0	+
$\frac{x-1-x^2}{x}$	+	No existe	–

La solución de la inecuación es $(0, +\infty)$.

7. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Hazlo tú

- **Resuelve.**

$x < 10 < x^2$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x^2 > 10 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x < 10 \\ x^2 > 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \qquad\qquad x < 10 \\ x > \sqrt{10} \text{ o bien } x < -\sqrt{10} \end{cases}$$

La solución es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, 10)$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 96

1. Resolución de un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

- **Un peregrino que recorre el Camino de Santiago avanza a una velocidad de 3,5 km/h. Se da cuenta de que, a ese paso, llegará 1 hora más tarde de lo previsto al albergue.**

  Entonces, acelera el paso y recorre el resto del camino a 5 km/h, llegando media hora antes del tiempo fijado.

  ¿Qué distancia le faltaba por recorrer ese día hasta el albergue?

  $x \to$ distancia que falta por recorrer

  $t \to$ tiempo que tardaría si va a 3,5 km/h

  $$\left.\begin{array}{l} x = 3,5t \\ x = 5(t - 1,5) \end{array}\right\} \to t = 5, \; x = 17,5$$

  Le faltan 17,5 km por recorrer.

2. Planteamiento y resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

- **En un grupo de 1.º de bachillerato todos tienen como materia de modalidad biología, dibujo o tecnología. Las matrículas en biología representan el 60 % del total. Si tres alumnos de dibujo se hubiesen matriculado en tecnología, entonces las dos asignaturas tendrían el mismo número de estudiantes. Finalmente, el doble de la diferencia del número de matriculados en biología y en dibujo es el triple de la diferencia de los matriculados en dibujo y en tecnología. Hallar el número de estudiantes matriculados en cada una de las materias.**

  x = n.º de estudiantes de biología

  y = n.º de estudiantes de dibujo

  z = n.º de estudiantes de tecnología

  Planteamos el sistema de 3 ecuaciones inicial:

  $$\begin{cases} x - 0,6(x + y + z) \\ y - 3 = z + 3 \\ 2(x - y) = 3(y - z) \end{cases}$$

  $$\begin{cases} x - 0,6x - 0,6y - 0,6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 2y - 3y + 3z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0,4x - 0,6y - 0,6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

  Multiplicamos la 1.ª ecuación por 5:

  $$\left\{\begin{array}{rl} 2x - 3y - 3z = 0 & (1.^a) \\ y - z = 6 & (2.^a) \\ 2x - 5y + 3z = 0 & (3.^a) - (1.^a) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rl} 2x - 3y - 3z = 0 & (1.^a) \\ y - z = 6 & (2.^a) \\ -2y + 6z = 0 & (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{r} 2x - 3y - 3z = 0 \\ y - z = 6 \\ 4z = 12 \end{array}\right. \to \begin{cases} x = 18 \\ y = 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

  Solución: x = 18 de biología, y = 9 de dibujo, z = 3 de tecnología.

3. Determinar un coeficiente de un polinomio

- **a) Dado el polinomio:**

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 12$$

determinar el valor de m para que el polinomio tenga como factor $x - 2$.

b) Para ese valor de m, descomponer $P(x)$ en factores y decir cuáles son sus raíces.

a) Aplicamos la regla de Ruffini

	1	3	m	-12
2		2	10	$2m + 20$
	1	5	$m + 10$	$2m + 8 = 0$

Por tanto: $m = -4$

b) $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$

$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 3)$. Raíces: $2, -2, -3$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 97

Para practicar

Factorización

1 **Saca factor común y usa las identidades notables para factorizar.**

a) $x^7 - 4x^5$ **b)** $9x^4 - 6x^3 + x^2$

c) $2x^3 - 18x$ **d)** $12x^3 + 36x^2 + 27x$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5$ **f)** $6x^9 - 54x$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \frac{1}{4}x$ **h)** $\frac{x^6}{4} - x^4 + x^2$

a) $x^7 - 4x^5 = x^5(x-2)(x+2)$

b) $9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(3x-1)^2$

c) $2x^3 - 18x = 2x(x-3)(x+3)$

d) $12x^3 + 36x^2 + 27x = 3x(2x+3)^2$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5 = 2x^3(2x-7)^2$

f) $6x^9 - 54x = 6x(x^4-3)(x^4+3)$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x(100x^{14} - 60x^7 + 1)$

h) $\frac{x^6}{4} - x^4 + x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2-2)^2$

2 **Factoriza cada polinomio y señala sus raíces.**

a) $2x^2 - 8x - 10$ **b)** $4x^2 - 9$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$ **d)** $x^4 + x^2 - 20$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$ **f)** $6x^3 + 7x^2 - x - 2$

g) $x^5 - 16x$ **h)** $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x$

a) $2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x-5)(x+1)$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ Raíces: $x_1 = 5,\ x_2 = -1$

b) $4x^2 - 9 = 4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$ Raíces: $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{3}{2}$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x+1)(x^2-5) = (x+1)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$ Raíces: $x_1 = -1,\ x_2 = \sqrt{5},\ x_3 = -\sqrt{5}$

d) $x^4 + x^2 - 20 = (x-2)(x+2)(x^2+5)$ Raíces: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3(x+3)(x-1)(x-2)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (3x+2)(2x-1)(x+1)$ Raíces: $x_1 = -\frac{2}{3};\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -1$

g) $x^5 - 16x = x(x-2)(x+2)(x^2+4)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x = 2x(x-1)(x+3)(x-3)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

3 **Factoriza estos polinomios y encuentra sus raíces:**

a) $9x^4 - x^2$ **b)** $4x^2 - 28x + 49$

c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ **d)** $2x^3 - x^2 - x$

e) $x^4 - 13x^2 + 36$ **f)** $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $9x^4 - x^2 = x^2(9x^2 - 1) = x^2(3x - 1)(3x + 1)$

Raíces: $x = 0$, $x = \dfrac{1}{3}$, $x = -\dfrac{1}{3}$

b) $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$

Raíz: $x = \dfrac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & x + 3 \\ x^2 + 6x + 9 & x + 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

Raíz: $x = -3$

d)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - x & x \\ 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \\ 1 & \end{array}$$

$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(2x + 1)$

Raíces: $x = 0$, $x = 1$, $x = -\dfrac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 13x^2 + 36 & x - 2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ x^2 - 9 & x - 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$

Raíces: $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$, $x = -3$

f) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Es un producto notable. No tiene raíces porque $x^2 + 1$ no se puede descomponer.

4 Descompón los siguientes polinomios:

a) $x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -4 & -10 & 26 & -11 & 30 \\
2 & & 2 & -4 & -28 & -4 & -30 \\
\hline
 & 1 & -2 & -14 & -2 & -15 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & 15 & -3 & 15 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 1 & -5 & \boxed{0} & \\
5 & & 5 & 0 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, por tanto:

$x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30 = (x - 2)(x + 3)(x - 5)(x^2 + 1)$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 8 & -4 \\
1 & & 1 & -4 & 4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Nos queda por factorizar: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$:

$3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x - 1)(x - 2)^2$

5 Halla, en cada uno de estos casos, el máx. c. d. $[A(x), B(x)]$ y el mín. c. m. $[A(x), B(x)]$:

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $B(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$

$A(x) = (x - 3)(x + 4)$

máx. c. d. $[A(x), B(x)] = x - 3$

mín. c. m. $[A(x), B(x)] = x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$

b) $B(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$A(x) = (x - 1)(x + 1)^2$

máx. c. d. $[A(x), B(x)] = (x - 1)(x + 1)$

mín. c. m. $[A(x), B(x)] = x(x - 1)(x + 1)^2$

c) $A(x) = x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

$B(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$

máx. c. d. $[A(x), B(x)] = (x - 1)(x^2 + 1)$

mín. c. m. $[A(x), B(x)] = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Fracciones algebraicas

6 **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}$ **b)** $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x^2+2x-15}$ **d)** $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}$

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}=\dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x+2)(x+1)}=\dfrac{1}{x}\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)^3}{(x+2)^2}=x+2$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x+2x-15}=\dfrac{-(x+5)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)}=-x-2$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{x^2(x-2)(x+2)}{x(x+2)^2}=x\dfrac{x-2}{x+2}$

7 **Reduce al mínimo común denominador y realiza las siguientes operaciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}+3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)^2-3(x-1)+(x-2)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}=\dfrac{(1-x)(x-2)+2x(x+3)-(x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)}=$

$=\dfrac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{4x+8}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}+3=\dfrac{x^2(x-1)-(2x-3)(x+1)^2+3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}=$

$=\dfrac{x^3-x^2-(2x-3)(x^2+2x+1)+3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}=$

$=\dfrac{x^3-x^2-2x^3-4x^2-2x+3x^2+6x+3+3x^3-3x^2+6x^2-6x+3x-3}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{2x^3+x^2+x}{(x+1)^2(x-1)}$

8 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{x}:\dfrac{x-3}{x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{3}\cdot\dfrac{15}{x^2-1}$ **c)** $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^2$ **d)** $\dfrac{x-2}{x}:\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\dfrac{3}{x}:\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{3x}{x(x-3)}=\dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x+1}{3}\cdot\dfrac{15}{x^2-1}=\dfrac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)}=\dfrac{5}{x-1}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^3=\dfrac{x^6}{36}\cdot\dfrac{27}{x^3}=\dfrac{27x^6}{36x^3}=\dfrac{3x^3}{4}$

d) $\dfrac{x-2}{x}:\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2=\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{-1}=\dfrac{x}{x-2}$

9 **Opera y simplifica.**

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}$

b) $\left[\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)$

c) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$

d) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)$

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right):\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-2x}{x^2-1}:\frac{x}{x+1}=\frac{-x+1}{x^2-1}:\frac{x}{x+1}=$

$=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}:\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{x+1}:\frac{x}{x+1}=\frac{-(x+1)}{x(x+1)}=\frac{-1}{x}$

b) $\left[\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)=\left[\frac{x-1}{x}:\frac{x+1}{x}\right]:(x^2-1)=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}:(x^2-1)=$

$=\frac{x-1}{x+1}:(x^2-1)=\frac{x-1}{(x+1)(x^2-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$

c) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x-1-x-1}{x^2-1}:\frac{x+1+x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{x^2-1}:\frac{2x}{x^2-1}=\frac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)}=\frac{-1}{x}$

d) $\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right](x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right](x-1)=\frac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)}\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)=\frac{x^2-4x+4-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-2)}:\frac{x-2+x-3}{(x-3)(x-2)}=\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}:\frac{2x-5}{(x-3)(x-2)}=1$

Ecuaciones polinómicas

10 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x+1)(2x-3)-(x-3)(6x+4)=9x$

b) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{2}{3}(x+1)=\frac{(2x-3)^2-(13x-5)}{16}$

c) $\frac{1}{6}[(13-2x)-2(x-3)^2]=-\frac{1}{3}(x+1)^2$

d) $\frac{x^2-1}{3}+(x-2)^2=\frac{x^2+2}{2}$

e) $0{,}5(x-1)^2-0{,}25(x+1)^2=4-x$

f) $(0{,}5x-1)(0{,}5x+1)=(x+1)^2-9$

a) $6x^2-9x+2x-3-6x^2-4x+18x+12=9x$

$2x=9$

$x=\frac{9}{2}$

b) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{(2x+2)}{3}=\frac{4x^2+9-12x-13x+5}{16}$

$12x^2-12-32x-32=12x^2+27-36x-39x+15$

$-44-32x=42-75x$

$43x=86$

$x=2$

c) $\frac{1}{6}(13-2x-2x^2-18+12x)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$\frac{1}{6}(-2x^2+10x-5)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-\frac{2x^2}{6}+\frac{10x}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-2x^2+10x-5=-2x^2-2-4x$

$14x=3$

$x=\frac{3}{14}$

d) $2x^2-2+6x^2+24-24x=3x^2+6$

$5x^2-24x+16=0$

$x=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{10}$

$x=\frac{24\pm 16}{10} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=4/5 \end{cases}$

e) $\frac{1}{2}(x^2+1-2x)-\frac{1}{4}(x^2+1+2x)=4-x$

$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-x-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}=4-x$

$2x^2+2-4x-x^2-1-2x=16-4x$

$x^2-2x-15=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2} \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

f) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)=x^2+1+2x-9$

$\frac{x^2}{4}-1=x^2+1+2x-9$

$x^2-4=4x^2+4+8x-36$

$0=3x^2+8x-28$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-14/3 \end{cases}$

11 Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:

a) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

b) $\frac{x^2-2x+5}{2}-\frac{x^2+3x}{4}=\frac{x^2-4x+15}{6}$

c) $\frac{3x+1}{3}-\frac{5x^2+3}{2}=\frac{x^2-1}{2}-\frac{x+2}{3}$

d) $\frac{3x^2-1}{4}+\frac{1}{2}\left[x^2-2-\frac{1}{2}x\right]=\frac{x^2-5}{4}$

a) $x^2+1+2x-x^2-4+4x=x^2+9+6x+x^2-20$

$6x-3=2x^2+6x-11$

$8=2x^2 \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x(x - 13) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 13 \end{cases}$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x$

$2x(9x - 4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$

d) $\dfrac{3x^2 - 1}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$

$4x^2 - x = 0$

$x(4x - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \to x_2 = 1/4 \end{cases}$

12 Resuelve estas ecuaciones (una de ellas no tiene solución y otra tiene infinitas):

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

b) $0,2x + 0,6 - 0,25(x - 1)^2 = 1,25x - (0,5x + 2)^2$

c) $(5x - 3)^2 - 5x(4x - 5) = 5x(x - 1)$

d) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2}$

a) $x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x = x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$

$0 = 0$

Tiene infinitas soluciones.

b) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{(x^2 + 1 - 2x)}{4} = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{x^2}{4} - 4 - 2x$

$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = 25x - 5x^2 - 80 - 40x$

$29x = -87$

$x = -\dfrac{87}{29}$

$x = -3$

c) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$

$9 = 0$

No tiene solución.

d) $4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$

$x = \dfrac{58}{24} = \dfrac{29}{12}$

Página 98

13 **Resuelve las siguientes ecuaciones expresando previamente los decimales en forma de fracción:**

a) $0,\widehat{3}x^2 - x - 1,\widehat{3} = 0$ **b)** $0,\widehat{1}x^2 - 1 = 0$

c) $0,\widehat{1}x^2 - 0,\widehat{5}x = 0$ **d)** $0,\widehat{1}x^2 - 1,\widehat{7} = x - 4$

a) $\frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

b) $\frac{1}{9}x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{9}x = 0 \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{9} = x - 4 \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x - 6)^5 = 0$

b) $4x^2(x + 1)^2 (x - 2) = 0$

c) $(x + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 5) = 0$

a) $(3x - 6)^5 = 0 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$

b) $4x^2(x + 1)^2(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

c) $(x + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \\ x^2 + 5 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$

Solución: $x = -2$

15 **Resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d)** $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$

e) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$ **f)** $x^4 - 4x^2 = 0$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ **h)** $9x^4 - x^2 = 0$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \begin{cases} z = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$

b) $x^2 = z$

$z^2 + 3z - 4 = 0$

$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \begin{cases} z = -4 \text{ (no vale)} \\ z = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$

c) $x^2 = z$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} z = -2 \ \text{(no vale)} \\ z = -1 \ \text{(no vale)} \end{cases} \text{(no tiene solución)}$$

d) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 36 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-144}}{2} \ \text{(no tiene solución)}$$

e) $x^2 = z$

$9z^2 - 46z + 5 = 0$

$$z = \frac{46 \pm \sqrt{2\,116-180}}{18} \begin{cases} z = \dfrac{90}{18} = 5 \begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \end{cases} \\ z = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9} \begin{cases} x_3 = 1/3 \\ x_4 = -1/3 \end{cases} \end{cases}$$

f) $x^2(x^2 - 4) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0, \ x_2 = 2, \ x_3 = -2$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

$z = x^2$

$4z^2 - 17z + 4 = 0$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{8} \begin{cases} z = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = \dfrac{1}{4} \begin{cases} x_3 = 1/2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

h) $9x^4 - x^2 = 0$

$x^2(9x^2 - 1) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0, \ x_2 = \dfrac{1}{3}, \ x_3 = -\dfrac{1}{3}$

16 **Resuelve estas ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ haciendo el cambio de variable $y = x^n$:**

a) $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$ **b)** $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$

c) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$ **d)** $x^8 + x^4 - 2 = 0$

* ***Mira el ejercicio resuelto 3.***

a) $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$

Hacemos el cambio $x^3 = y$.

$y^2 + 16y + 64 = 0 \ \rightarrow \ y = -8$

$x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Solución: $x = -2$

b) $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$

Hacemos el cambio $x^3 = y$.

$8y^2 - 7y - 1 = 0 \ \rightarrow \ y_1 = 1, \ y_2 = -\dfrac{1}{8}$

Soluciones: $x_1 = \sqrt[3]{1} = 1, \ x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}} = -\dfrac{1}{2}$

c) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$

Hacemos el cambio $x^4 = y$.

$y^2 - 82y + 81 = 0 \rightarrow y_1 = 81,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt[4]{81},\ x = \pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

d) $x^8 + x^4 - 2 = 0$

Hacemos el cambio $x^4 = y$.

$y^2 + y - 2 = 0 \rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

17 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\mathbf{6x^3 + 7x^2 - 1 = 0}$

b) $\mathbf{16x^5 - 8x^3 + x = 0}$

c) $\mathbf{x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0}$

d) $\mathbf{x^3 - 49x = 0}$

e) $\mathbf{x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0}$

f) $\mathbf{x^6 + 3x^2 = 0}$

a)

	6	7	0	–1
–1		–6	–1	1
	6	1	–1	0

Por tanto, $x_1 = -1$.

Queda por resolver $6x^2 + x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$$

Las soluciones son $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$.

b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0 \rightarrow x(16x^4 - 8x^2 + 1) = 0$

Por tanto, $x = 0$ es solución de la ecuación. Resolvemos ahora la ecuación bicuadrada, $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

Hacemos el cambio $y = x^2$:

$$16y^2 - 8y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{(es solución doble)}$$

$\rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ (ambas son soluciones dobles)

Las soluciones de la ecuación son, por tanto $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{2},\ x_5 = -\frac{1}{2}$.

c)

	1	6	–7	–60
3		3	27	60
	1	9	20	0

Por tanto, $x_1 = 3$.

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{-9 \pm 1}{2} \rightarrow x_2 = -5;\ x_3 = -4$$

Las soluciones son $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = -4$.

d) $x^3 - 49x = x(x^2 - 49) = x(x-7)(x+7) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 7,\ x_3 = -7$

e)

	1	9	15	–25
1		1	10	25
	1	10	25	0

Por tanto, $x_1 = 1$.

$x^2 + 10x + 25 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \dfrac{-10}{2} \rightarrow x = -5$ (raíz doble)

Las soluciones son $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_3 = -5$.

f) $x^6 - 3x^2 = 0 = x^2(x^4 - 3) \rightarrow x_1 = 0$

$x^4 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[4]{3}$, $x_3 = -\sqrt[4]{3}$ (soluciones dobles)

18 Descompón en factores y resuelve:

a) $\boldsymbol{x^3 + x^2 - 6x = 0}$

b) $\boldsymbol{x^4 - 2x^3 + x^2 = 0}$

c) $\boldsymbol{x^3 - 9x = 0}$

d) $\boldsymbol{x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0}$

e) $\boldsymbol{2x^3 - 5x^2 + 4x = 1}$

f) $\boldsymbol{-x^3 + 13x = 12}$

g) $\boldsymbol{x^3 - 5x^2 + 7x = 3}$

h) $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 4x = 8}$

a) $x(x - 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$

b) $x^2(x - 1)^2 = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

c) $x(x - 3)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$

d) $(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$

e) $2(x - 1)^2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$

f) $-(x + 4)(x - 1)(x - 3) = 0$

$x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$

g) $(x - 1)^2(x - 3) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$

h) $(x - 2)(x + 2)^2 = 0$

$x_1 = 2$, $x_2 = -2$

Ecuaciones con radicales

19 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\boldsymbol{\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x}$

b) $\boldsymbol{x + \sqrt{7 - 3x} = 1}$

c) $\boldsymbol{\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0}$

d) $\boldsymbol{\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4}$

e) $\boldsymbol{\sqrt{3x + 4} + 2x - 4 = 0}$

f) $\boldsymbol{x - \sqrt{7 - 3x} = 1}$

g) $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 1} = 0}$

h) $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0}$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$4x^2 + 7x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8}$ $\begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$ $\begin{cases} x = 2 \text{ (no vale)} \\ x = -3 \end{cases}$

c) $2 - 5x = \left(-x\sqrt{3}\right)^2$

$2 - 5x = x^2 \cdot 3$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$ $\begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \ \text{(no vale)} \end{cases}$

d) $\left(\sqrt{5x - 6}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{2x}\right)^2$

$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$\left(8\sqrt{2x}\right)^2 = (-3x + 22)^2$

$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$

$128x = 9x^2 + 484 - 132x$

$0 = 9x^2 - 260x + 484$

$x = \dfrac{260 \pm \sqrt{67\,600 - 17\,424}}{18}$ $\begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$

e) $\left(\sqrt{3x + 4}\right)^2 = (4 - 2x)^2$

$3x + 4 = 16 + 4x^2 - 16x$

$4x^2 - 19x + 12 = 0$

$x = \dfrac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8}$ $\begin{cases} x = 4 \ \text{(no vale)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$

f) $(x - 1)^2 = \left(\sqrt{7 - 3x}\right)^2$

$x^2 + 1 - 2x = 7 - 3x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$ $\begin{cases} x = -3 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$

g) $\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 1}\right)^2$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1$

h) $\left(\sqrt{x^2 + 3}\right)^2 = \left(\sqrt{3 - x}\right)^2$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -1$

20 Resuelve.

a) $\dfrac{\sqrt{10 + x}}{3} - \dfrac{\sqrt{1 - 3x}}{2} = 0$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x^2 + 5}}{6} + \dfrac{x}{4} = x - 1$

a) $2\sqrt{10 + x} = 3\sqrt{1 - 3x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(10 + x) = 9(1 - 3x) \ \to \ x = -1$, solución válida.

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6}+\dfrac{x}{4}=x-1 \to 2\sqrt{x^2+5}=-3x+12(x-1) \to 2\sqrt{x^2+5}=9x-12$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(x^2+5)=(9x-12)^2 \to 4x^2+20=81x^2-216x+144 \to 77x^2-216x+124=0 \to$

$\to x_1=2$ (válida), $x_2=\dfrac{62}{77}$ (no válida)

Solución: $x=2$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x}-\sqrt{x}-\sqrt{2}=0$

b) $\sqrt{-5-7x}+\sqrt{4+x}=\sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{3x}-\sqrt{x}-\sqrt{2}=0$

$\sqrt{3x}=\sqrt{x}+\sqrt{2}$

$(\sqrt{3x})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2$

$3x=x+2\sqrt{2}\sqrt{x}+2$

$2\sqrt{2}\sqrt{x}=2x-2$

$(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2=(2x-2)^2$

$8x=4x^2-8x+4 \to x=\sqrt{3}+2,\ x=2-\sqrt{3}$ no es válida.

Solución: $x=\sqrt{3}+2$

b) $\sqrt{-5-7x}+\sqrt{4+x}=\sqrt{7-6x}$

$(\sqrt{-5-7x}+\sqrt{4+x})^2=(\sqrt{7-6x})^2 \to 2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4}-6x-1=7-6x$

$2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4}=8 \to (\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4})^2=4^2 \to -7x^2-33x-20=16$

Soluciones: $x_1=-\dfrac{12}{7}$, $x_2=-3$. Las dos son válidas.

Ecuaciones racionales

22 Resuelve.

a) $\dfrac{x+2}{x}+3x=\dfrac{5x+6}{2}$

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{3}-1$

c) $\dfrac{600}{x}+80=\dfrac{600}{x-2}$

d) $\dfrac{8}{x+6}+\dfrac{12-x}{x-6}=1$

a) $2x+4+6x^2=5x^2+6x$

$x^2-4x+4=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$

$x=2$

b) $3+6+9=x^2-3x$

$x^2-3x-18=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+72}}{2} \begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-3 \end{cases}$

c) $600x-1\,200+80x^2-160x=600x$

$80x^2-160x-1\,200=0$

$x^2-2x-15=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\dfrac{2\pm 8}{2} \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

d) $8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$

$2x^2 - 14x - 60 = 0$

$x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{4}$ < $x_1 = (14 + 26)/4 = 10$, $x_2 = (14 - 26)/4 = -3$

23 **Resuelve sin olvidar comprobar las soluciones:**

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2} = 0$

b) $\dfrac{3x-7}{x} = \dfrac{8x}{x+1} - 5$

c) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} = x + 2$

e) $\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} = x - 4$

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x+3}$

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2} = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$\dfrac{2x-1}{x^2} = 0 \to 2x - 1 = 0 \to x = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$ es válida.

b) $\dfrac{3x-7}{x} = \dfrac{8x}{x+1} - 5$

$\dfrac{3x-7}{x} - \dfrac{8x}{x+1} + 5 = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x + 1)$.

$\dfrac{(x-7)}{x(x+1)} = 0 \to x - 7 = 0 \to x = 7$ es válida.

c) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

$\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} + x = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x - 2)$.

$\dfrac{x(x-3)}{x-2} = 0 \to x(x-3) = 0$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Son válidas.

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} = x + 2$

$\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} - x - 2 = 0$

Reducimos a común denominador, simplificamos y multiplicamos por $(x + 3)$.

$\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} - x - 2 = -\dfrac{(x+2)^2}{x+3} = 0 \to x + 2 = 0$

Solución: $x = -2$, es válida.

e) $\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} = x-4$

$\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} - x + 4 = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x+1)^2$.

$\dfrac{-x^3+3x^2+8x+10}{(x+1)^2} = 0 \;\to\; -x^3+3x^2+8x+10=0$

Factorizamos: $-x^3+3x^2+8x+10 = -(x-5)(2x+x^2+2)$

La solución es $x = 5$, que es válida.

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x+3}$

$\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{2x+1}{x+3} = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2+5x+6.

$-\dfrac{3x^2-8x-28}{x^2+5x+6} = 0 \;\to\; 3x^2+8x-28=0$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{14}{3}$. Son válidas.

24 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\mathbf{\dfrac{10}{3} + \dfrac{5-x}{x+5} = \dfrac{x+5}{x-5}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2x}{x+3} = \dfrac{6}{x^2-9}}$

a) $10x^2 - 250 + 15x - 3x^2 - 75 + 15x = 3x^2 + 15x + 15x + 75$

$4x^2 = 400$

$x^2 = 100 \;\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$

b) $x(x+3) + 2x(x-3) = 6$

$x^2 + 3x + 2x^2 - 6x = 6$

$3x^2 - 3x - 6 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+72}}{6} \;\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

25 Resuelve.

a) $\mathbf{\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{4}{x+4}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{3}{x+3} = \dfrac{x+2}{2-x}}$

c) $\mathbf{\dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{3x+2}{2x}}$ **d)** $\mathbf{\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x}{x^2+1}}$

a) $x^2 + 4x = 4x + 4 \;\to\; x^2 = 4 \;\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

b) $6 - 3x = x^2 + 3x + 2x + 6 \;\to\; x^2 + 8x = 0 \;\to\; x(x+8) = 0 \;\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -8 \end{cases}$

c) $4x^2 = 3x^2 + 2x + 6x + 4 \;\to\; x^2 - 8x - 4 = 0 \;\to\; x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+16}}{2} \;\begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{5} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$

d) $x^2(x^2+1) = x(x+1) \;\to\; x^4 + x^2 - x^2 - x = 0 \;\to\; x^4 - x = 0 \;\to\; x(x^3 - 1) = 0 \;\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Ecuaciones exponenciales

26 **Resuelve expresando ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base:**

a) $3^{x^2+1} = \frac{1}{9}$ **b)** $\frac{9^{2x}}{3^x} = 27$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \frac{5}{4}$ **d)** $5^{x^2+3x} = 0{,}04$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$ **f)** $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

g) $0{,}01^x = 100$ **h)** $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36$

i) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1$ **j)** $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25$

a) $3^{x^2+1} = \frac{1}{9} \to 3^{x^2+1} = 3^{-2} \to x^2+1 = -2 \to x^2 = -3 \to$ No tiene solución.

b) $\frac{9^{2x}}{3^x} = 27 \to \frac{3^{4x}}{3^x} = 3^3 \to 3^{4x-x} = 3^3 \to 3x = 3 \to$ *Solución:* $x = 1$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \frac{5}{4} \to 5 \cdot 2^{x+3} = 5 \cdot 2^{-2} \to x+3 = -2 \to$ *Solución:* $x = -5$

d) $5^{x^2+3x} = 0,04 \to 5^{x^2+3x} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = \frac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = 5^{-2} \to x^2+3x = -2$

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = -2$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27} \to \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \to$ *Solución:* $x = 3$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81 \to \left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

g) $(0,01)^x = 100 \to \left(\frac{1}{100}\right)^x = 100^1 \to$ *Solución:* $x = -1$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36 \to 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^2 \to 6^{x+1} = 6^2 \to x+1 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

i) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1 \to 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^0 \to 3^{1+2x+3x} = 3^0 \to 1+5x = 0 \to$ *Solución:* $x = -\frac{1}{5}$

j) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25 \to 5^{x-5} \cdot 5^{3 \cdot 2x} = 5^2 \to 5^{x-5+6x} = 5^2 \to 7x-5 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

27 **Resuelve estas ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $3^{2+x} - 3^x = 72$ **b)** $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

c) $3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}$ **d)** $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

a) Hacemos el siguiente cambio de variable: $3^x = y$

$3^2y - y = 72 \to y = 9 = 3^2$

$3^x = 3^2 \to x = 2$

b) $3^x = z;\ z - \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 21 \to z = 27 \to x = 3$

c) $3^x = z;\ z - \frac{1}{z} = \frac{728}{27} \to z^2 - 1 = \frac{728}{27}z \to 27z^2 - 728z - 27 = 0 \to$

$\to z_1 = 27,\ z_2 = -\frac{1}{27}$ (no vale) $\to x = 3$

d) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \;\to\; (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $y = 2^x$, con lo que obtenemos:

$$y^2 - 6x + 8 = 0 \;\to\; y = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$y = 4 \;\to\; 2^x = 4 \;\to\; 2^x = 2^2 \;\to\; x = 2$

$y = 2 \;\to\; 2^x = 2 \;\to\; 2^x = 2^1 \;\to\; x = 1$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

28 **Halla la solución de las siguientes ecuaciones tomando logaritmos en cada miembro:**

a) $\mathbf{7^x = 20}$ **b)** $\mathbf{1{,}2^x = 10}$

a) $7^x = 20 \;\to\; x = log_7\, 20$ b) $1{,}2^x = 10 \;\to\; x = log_{1,2}\, 10$

Página 99

29 **Resuelve estas ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $\mathbf{2^x + 2^{1-x} = 3}$ **b)** $\mathbf{2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}}$

c) $\mathbf{8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}}$ **d)** $\mathbf{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0}$

e) $\mathbf{9^x - 3^x - 6 = 0}$ **f)** $\mathbf{7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0}$

g) $\mathbf{2^{x/2} + 2^x = 6}$ **h)** $\mathbf{\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1}$

a) $2^x + \dfrac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \;\to\; z + \dfrac{2}{z} = 3;\; z^2 + 2 = 3z$

$$z^2 - 3z + 2 = 0;\; z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \to 2^x = 2 \to x_1 = 1 \\ 1 \to 2^x = 1 \to x_2 = 0 \end{cases}$$

b) $2 \cdot 2^x + \dfrac{2^x}{2} = \dfrac{5}{2};\; 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\; 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \dfrac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \dfrac{(2^x)^3}{2} = \dfrac{17}{16} \;\to\; 2^x = z \;\to\; 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128 + 8)z^3 = 17;\; z^3 = \dfrac{17}{136} = \dfrac{1}{8} \;\to\; z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2} \;\to\; 2^x = \dfrac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$

$$\text{e) } (3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\; 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$x = 1$

$$\text{f) } 7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\; 7^x = \frac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$$

$x_1 = -1$; $x_2 = 1$

g) $2^{x/2}+2^x=6 \to \sqrt{2^x}+2^x=6$

Hacemos el cambio de variable $2^x=y$:

$$\sqrt{y}+y=6 \to \sqrt{y}=6-y \to (\sqrt{y})^2=(6-y)^2 \to y^2-13y+36=0 \to y=\frac{13\pm5}{2}=\begin{cases} 9 \to x=\dfrac{log\ 9}{log\ 2} \\ 4 \to x=2 \end{cases}$$

La única solución válida es: $x=2$

h) $\sqrt{3^{2x}+7}=3^x+1$

Hacemos el cambio de variable $3^x=y$:

$$\sqrt{y^2+7}=y+1 \to (\sqrt{y^2+7})^2=(y+1)^2 \to y^2+7=y^2+2y+1 \to 7=2y+1 \to y=3$$

Solución: $x=1$

30 **Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{1}{e^x}=27$ **b)** $e^{x-9}=\sqrt{73}$ **c)** $2^x\cdot 3^x=81$

d) $\dfrac{2^x}{3^{x+1}}=1$ **e)** $2^{x+1}\cdot 16^{2x+1}=3$ **f)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\cdot 125^{x+1}=4$

a) $\dfrac{1}{e^x}=27 \to \dfrac{1}{27}=e^x \to ln\dfrac{1}{27}=ln\ e^x \to x=ln\dfrac{1}{27}=ln\ 1-ln\ 27=0-ln\ 27 \to x\approx -3{,}296$

b) $e^{x-9}=\sqrt{73} \to ln\ e^{x-9}=ln\sqrt{73} \to x-9=\dfrac{1}{2}ln\ 73 \to x=9+\dfrac{ln\ 73}{2} \to x\approx 11{,}145$

c) $6^x=81 \to x\ log\ 6=log\ 81 \to x=\dfrac{log\ 81}{log\ 6}\approx 2{,}453$

d) $\dfrac{2^x}{3^x\cdot 3}=1 \to \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=3 \to x\ log\dfrac{2}{3}=log\ 3 \to x=\dfrac{log\ 3}{log\ 2-log\ 3}\approx -2{,}710$

e) $2^{x+1}\cdot 16^{2x+1}=3 \to 2^{x+1}\cdot 2^{4(2x+1)}=3 \to 2^{9x+5}=3 \to log\ 2^{9x+5}=log\ 3 \to$

$\to (9x+5)\ log\ 2=log\ 3 \to (9x+5)=\dfrac{log\ 3}{log\ 2}=1{,}5850$

Solución: $x=\dfrac{1{,}5850-5}{9}=-0{,}3794$

f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\cdot 125^{x+1}=4 \to 5^{-x}\cdot 5^{3x+3}=4 \to 5^{2x+3}=4 \to log\ 5^{2x+3}=log\ 4 \to$

$\to (2x+3)\ log\ 5=log\ 4 \to (2x+3)=\dfrac{log\ 4}{log\ 5}=0{,}8613$

Solución: $x=\dfrac{0{,}8613-3}{2}=-1{,}0693$

Ecuaciones logarítmicas

31 **Resuelve aplicando la definición de logaritmo.**

a) $lox_x\ 25=2$ **b)** $log\ x=-1$

c) $lox_x\ 27=3$ **d)** $lox_2\ x=3$

a) Como la base tiene que ser positiva, $x=5$.

b) $log\ x=-1 \to 10^{-1}=x \to x=\dfrac{1}{10}$

c) $log_x\ 27=3 \to x^3=27 \to x=3$

d) $log_2\ x=-3 \to 2^{-3}=x \to x=\dfrac{1}{8}$

32 **Halla la solución de las siguientes ecuaciones:**

a) $\log x = \log 9 + \log 2$ **b)** $\ln x = 2 \ln 10$

c) $\frac{1}{2}\log (x + 1) = \log 3$ **d)** $\frac{1}{3}\log_2 x = -3$

a) $\log x = \log 9 + \log 2 \to \log x = \log (9 \cdot 2) \to x = 18$

b) $\ln x = 2\ln 10 \to \ln x = \ln 10^2 \to x = 100$

c) $\frac{1}{2}\log (x+1) = \log 3 \to \log \sqrt{(x+1)} = \log 3 \to \sqrt{(x+1)} = 3 \to x+1 = 9 \to x = 8$

d) $\frac{1}{3}\log_2 x = -3 \to \log_2 \sqrt[3]{x} = \log_2 2^{-3} \to \sqrt[3]{x} = 2^{-3} \to x = 2^{-9} \to x = \frac{1}{512}$

33 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\log (x^2 + 1) - \log (x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$

b) $\ln (x - 3) + \ln (x + 1) = \ln 3 + \ln (x - 1)$

a) $\log \frac{x^2+1}{x^2-1} = \log \frac{13}{12}$

$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13;\ 25 = x^2$

$x_1 = -5;\ x_2 = 5$

b) $\ln (x^2 - 2x - 3) = \ln (3x - 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3;\ x^2 - 5x = 0$

$x = 5$ ($x = 0$ no vale)

Sistemas de ecuaciones

34 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $y = 1 - 23x$

$2x - 11 + 253x = -11$

$0 = 255x$

$x = 0,\ y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y \to y = 2$

$x = 0,\ y = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7 \to 5y = 5 \to y = 1$

$x = -1,\ y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x - \ \ y = 8 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} -2x + 3y = -24 \\ 2x - \ \ y = 8 \\ \hline 2y = -16 \end{array} \to y = -8$

$x = 0,\ y = -8$

35 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{3} = 15 \to y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \to x = 5 \\ y = -3 \to x = -5 \end{cases}$

$x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2-2x}{3} \end{array}\right\}$

$4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2-2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0 \to 5x^2 - 2x + 6 = 0 \to$ No tiene solución.

36 **Resuelve por reducción:**

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

a) $\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ -3x^2 + 6y^2 = -21 \\ \hline y^2 = 9 \end{array} \to y = \pm 3$

$x^2 = 25 \to x = \pm 5$

$x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = 3;\ x_3 = 5,\ y_3 = -3;\ x_4 = -5,\ y_4 = -3$

b) $\begin{array}{r} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4} \\ \hline 2x^2 \qquad\qquad = \dfrac{2}{4} \end{array} \to x = \pm\dfrac{1}{2}$

- Si $x = \frac{1}{2}$:

$\frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$

$1 + 4y^2 + 2y = 3$

$4y^2 + 2y - 2 = 0$

$2y^2 + y - 1 = 0$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$

- Si $x = -\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$

$1 + 4y^2 - 2y = 3$

$4y^2 - 2y - 2 = 0$

$2y^2 - y - 1 = 0$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -\frac{1}{2},\ y_3 = 1;\ x_4 = -\frac{1}{2},\ y_4 = -\frac{1}{2}$

37 **Resuelve por sustitución estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x^2 + 1)\, y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x = 6 + y \\ (6+y)^2 + y^2 = 20 \to 2y^2 + 12y + 36 = 20 \to y_1 = -2,\ y_2 = -4 \end{array}$

$\begin{cases} y_1 = -2 \to x_1 = 4 \\ y_2 = -4 \to x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 4,\ y_1 = -2;\ x_2 = 2,\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x = 2 - y \\ (2-y)y = 1 \to 2y - y^2 - 1 = 0 \to y = 1 \to x = 1 \end{array}$

$x = 1,\ y = 1$

c) $\left.\begin{array}{l} (x^2+1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y = 4x \\ (x^2+1)(4x)^2 = 5 \to 16x^4 + 16x^2 - 5 = 0 \to x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$

Haciendo un cambio de variable $y = x^2$ obtenemos dos soluciones: $y = \frac{1}{4};\ y = -\frac{5}{4}$ (no válida)

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \to y_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \to y_2 = -2 \end{cases}$

$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -2$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \;\rightarrow\; \left(\dfrac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \;\rightarrow\; -\dfrac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \;\rightarrow\; -\dfrac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \;\rightarrow \\ xy = 6 \;\rightarrow\; x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

$\rightarrow\; y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \;\rightarrow\; y_2 = 4;\; y_3 = -9$ (no es válida) $\rightarrow\; y_1 = 2,\; y_2 = -2$

$y_1 = 2,\; x_1 = 3;\; y_2 = -2,\; x_2 = -3$

38 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 = 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x = y - y^2 \end{array}\right\}$

$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3 \;\rightarrow\; 2x - 3y = 1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1+3y}{2}$

$\dfrac{1 + 9y^2 + 6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2 \;\rightarrow\; 1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 13y^2 - 10y - 3 = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{26} = \dfrac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$

$x_1 = 2,\; y_1 = 1;\; x_2 = \dfrac{2}{13},\; y_2 = -\dfrac{3}{13}$

b) $x = \dfrac{28}{y}$

$\left(\dfrac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65 \;\rightarrow\; 784 + y^4 = 65y^2 \;\rightarrow\; y^4 - 65y^2 + 784 = 0$

$y^2 = z \;\rightarrow\; z = \dfrac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \;\rightarrow\; y = \pm 7 \\ 16 \;\rightarrow\; y = \pm 4 \end{cases}$

$x_1 = 7,\; y_1 = 4;\; x_2 = -7,\; y_2 = -4;\; x_3 = 4,\; y_3 = 7;\; x_4 = -4,\; y_4 = -7$

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 5x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 &= 0 \\ -x^2 + y^2 + 5x - 5y - 2 &= 0 \\ \hline 2y^2 - 10y + 8 &= 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 3,\; y_1 = 4;\; x_2 = 3,\; y_2 = 1;\; x_3 = 2,\; y_3 = 4;\; x_4 = 2,\; y_4 = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\}$

$\dfrac{16y^2}{9} - y^2 = 7 \;\rightarrow\; 16y^2 - 9y^2 = 63 \;\rightarrow\; y^2 = 9$

$x_1 = 4,\; y_1 = 3;\; x_2 = -4,\; y_2 = -3$

39 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y \rightarrow 8y = 24 \rightarrow y = 3$

$x = 4, \ y = 3$

b) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x-6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \ \text{(no vale)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$

$x = 6, \ y = 6$

40 **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ log\ x + log\ y = log\ 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + y \\ 2^{1+y} + 2^y = 6 \rightarrow 2 \cdot 2^y + 2^y = 6 \rightarrow 2^y \cdot 3 = 6 \rightarrow 2^y = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2 \end{array}$

$x = 2, \ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 5 - y \\ (5 - y)y = 6 \rightarrow 5y - y^2 = 6 \rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \end{array}$

$y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$x_1 = 2, \ y_1 = 3; \ x_2 = 3, \ y_2 = 2$

41 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} log\ x + log\ y = 3 \\ log\ x - log\ y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} log_2 x + 3\ log_2 y = 5 \\ log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

a) Sumando las dos ecuaciones obtenemos: $2 log\ x = 2$

$x = 10; \ y = 100$

b) $\begin{cases} log_2 x + 3 log_2 y = 5 \\ 2 log_2 x - log_2 y = 3 \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} log_2 x + 3 log_2 y &=& 5 \\ 6 log_2 x - 3 log_2 y &=& 9 \\ \hline 7 log_2 x \qquad\quad &=& 14 \end{array}$$

$x = 4, \ y = 2$

Sistemas de ecuaciones

42 **Resuelve este sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas:**

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ x/5 + y = 0 \\ x + 10y = 5 \end{cases}$

Resolvemos las dos primeras ecuaciones y comprobamos los resultados en la tercera.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 5 - y \\ 10 - 2y - y = 7 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 1 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ -20 + 21 = 1 \end{cases}$

La solución es $x = 4$, $y = 1$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ \frac{x}{5} + y = 0 \\ x + 10y = 5 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 5\frac{x}{5} = -3y \to x = -3 \\ y = -\frac{x}{5} \\ x + 10y = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{3}{5} \\ -3 + 6 = 3 \neq 5 \end{cases}$

Se llega a una contradicción, el sistema no tiene solución.

43 **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3y + z = 1 \\ 4x - z = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 1 - y = 2 \to y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 1 + 1 + z = 3 \to z = 3 \\ y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

La solución es $x = 1$, $y = -1$, $z = 3$.

b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \to y = 2x + 1 \\ 3y + z = 1 \\ 4x - z = 7 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 6x + 3 + z = 1 \to z = -6x - 2 \\ 4x - z = 7 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -6x - 2 \\ 4x + 6x + 2 = 7 \to x = \frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 \\ z = -5 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

La solución es $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$, $z = -5$.

44 **Resuelve por sustitución o reducción.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ y + 2z = -7 \\ x - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$

* ***Mira el ejercicio resuelto 5.***

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{matrix}$ $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ -z = -1 \to z = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 1 \to y = x - 1 \\ 2x + 6y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x + 6x - 6 = 1 \to x = \dfrac{7}{8} \\ z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = -\dfrac{1}{8} \\ x = \dfrac{7}{8} \\ z = 1 \end{cases}$

La solución es $x = \dfrac{7}{8}$, $y = -\dfrac{7}{8}$, $z = 1$.

b) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ y + 2z = -7 \\ x - z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 1 \\ 1 + 2z = -7 \\ x = z \end{cases} \to \begin{cases} y = 1 \\ z = -4 \\ x = -4 \end{cases}$

La solución es $x = -4$, $y = 1$, $z = -4$.

c) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x = y \\ z = y - 1 \\ -y + 2y + y - 1 = 2 \to y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

La solución es $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}$, $z = \dfrac{1}{2}$.

d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} (1.^a) - 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\begin{cases} -3y + 3z = 0 \to z = y \\ -3y + 5z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} z = 4 \\ 2z = 4 \to z = 2 \\ x + 2 - 4 = 1 \to x = 3 \end{cases}$

La solución es $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$.

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

45 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $2x - 3 < x - 1$ **b)** $\dfrac{3x - 2}{2} \le \dfrac{2x + 7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \dfrac{x}{2}$ **d)** $\dfrac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2$; $(-\infty, 2)$

b) $9x - 6 \le 4x + 14 \to 5x \le 20 \to x \le 4$; $(-\infty, 4]$

c) $-6x - 4 < 10 - x \to -14 < 5x \to x > -\dfrac{14}{5}$; $\left(-\dfrac{14}{5}, +\infty\right)$

d) $3x - 5x > -10 \to -2x > -10 \to 2x < 10 \to x < 5$; $(-\infty, 5)$

46 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2 + x) > -5x$ **b)** $\dfrac{x - 1}{2} > x - 1$

a) $10 + 5x > -5x$; $10x > -10$; $x > -1$
$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2$; $1 > x$
$(-\infty, 1)$

47 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x < 1 \\ x > -4 \end{matrix}\right\} (-4, 1)$

b) $\left.\begin{matrix} x > -\dfrac{5}{3} \\ x > 4 \end{matrix}\right\} (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{matrix} x > 17 \\ x > \dfrac{19}{5} \end{matrix}\right\} (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{matrix} x > \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{1}{5} \end{matrix}\right\}$ No tiene solución.

48 **Resuelve.**

a) $-x^2 - 2x + 3 \ge 0$ **b)** $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$ **d)** $-x^2 + 6x - 5 \le 0$

e) $x^2 - 7x + 6 \le 0$ **f)** $x^2 - 7x + 6 > 0$

a) $-(x + 3)(x - 1) \ge 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $\left(\sqrt{5} - x\right)\left(\sqrt{5} + x\right) < 0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

c) $x(x + 3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

d) $-(x - 1)(x - 5) \le 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

e) $x^2 - 7x + 6 \le 0 \rightarrow [1, 6]$

f) $x^2 - 7x + 6 > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

49 **Resuelve.**

a) $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$ **b)** $x(x^2 + 3) < 0$

a) $\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} x + 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x > -1 \\ x > 3 \end{matrix}\right\} (3, +\infty) \\ \left.\begin{matrix} x + 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x < -1 \\ x < 3 \end{matrix}\right\} (-\infty, -1) \end{matrix}\right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

b) $(-\infty, 0)$

50 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \ge 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-2, \infty) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \ge 4 & \rightarrow \textit{Soluciones: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[1, 4] \cap (-\infty, 3) = [1, 3)$

51 **Resuelve.**

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \leq 0 \end{cases}$$

* ***La solución son las soluciones comunes de las dos inecuaciones.***

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, -1] \cup [6, \infty) \\ -x^2 + 11x - 24 \geq 0 & \rightarrow \textit{Soluciones: } [3, 8] \end{cases}$$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -1] \cup [6, \infty)) \cap [3, 8] = [6, 8]$

52 **Resuelve gráficamente.**

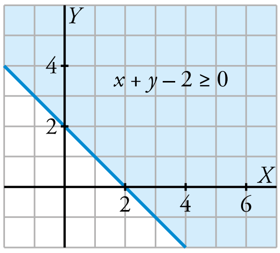
a) $x + y - 2 \geq 0$ **b)** $2x - 3y \leq 6$

c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3$ **d)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1$

a) Dibujamos la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad $0 + 0 - 2 \geq 0$.

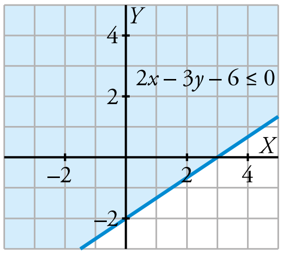
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: 2x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \leq 0$.

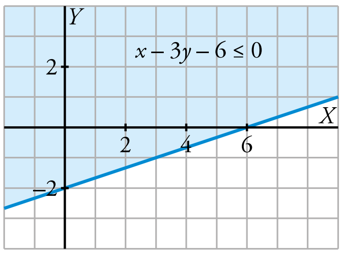
La solución es el semiplano que contiene a O.



c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3 \rightarrow x - 3y - 6 \leq 0$. Dibujamos la recta $r: x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \leq 0$.

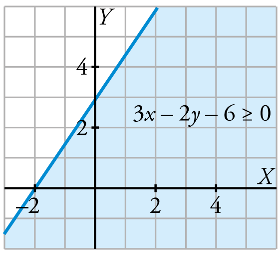
La solución es el semiplano que contiene a O.



d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1 \rightarrow 3x - 2y + 6 \geq 0$. Dibujamos la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.

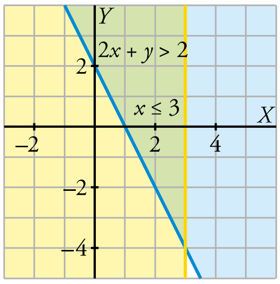


53 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:**

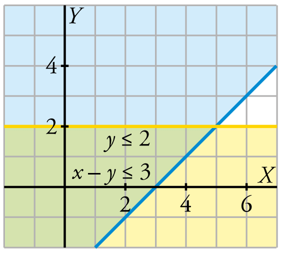
a) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ y \leq x + 1 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x \geq 2 \\ 3x + y \geq 7 \\ 2x - y \geq -7 \end{cases}$

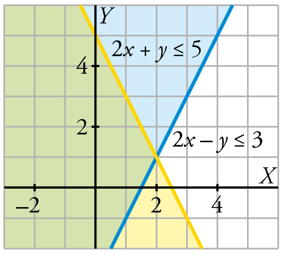
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La recta $2x + y = 2$ pertenece al recinto solución.



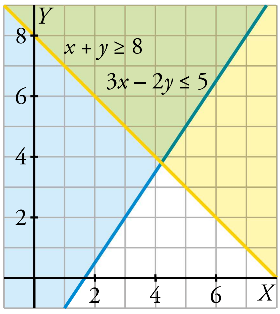
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



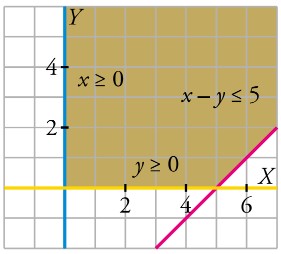
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



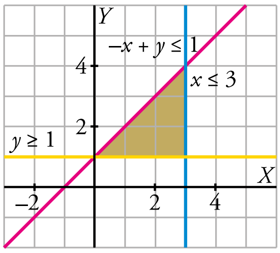
d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



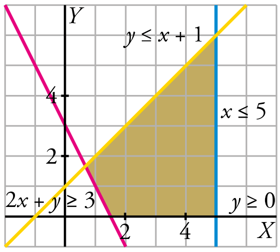
e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



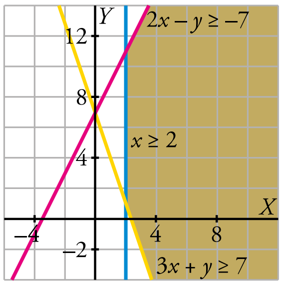
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos.



g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



Página 100

Para resolver

54 Averigua cuánto tiene que valer el parámetro m para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2x + m$ tenga como factor $x - 4$.

Buscamos las raíces enteras del polinomio, de manera que sea factor, o lo que es lo mismo, que 4 sea solución del polinomio:

	2	–9	2	m
4		8	–4	–8
	2	–1	–2	0

Para que 4 sea solución se tendrá que cumplir que $m - 8 = 0 \to m = 8$

55 Escribe un polinomio que tenga como raíces...:

a) 1, 2, –3, –2

b) 0, –4, –1 (doble)

a) $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3) = (x - 1)(x + 3)(x^2 - 4) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4) =$

$= x^4 - 4x^2 + 2x^3 - 8x - 3x^2 + 12 = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b) $Q(x) = x(x + 1)^2(x + 4) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 4x) = x^4 + 4x^3 + 2x^3 + 8x^2 + x^2 + 4x =$

$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x$

56 Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x - 1)$; $Q(x) = x^2(x - 1)$

57 Resuelve estas ecuaciones con valor absoluto.

a) $|x+1|=3$ **b)** $|x^2-3|=1$ **c)** $\left|\frac{x+1}{2}\right|=2$ **d)** $|x+2|=|3x-2|$

* ***Mira en el ejercicio resuelto 2.***

a) $|x+1|=3 \to \begin{cases} x+1=3 \to x=2 \\ x+1=-3 \to x=-4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2,\ x_2=-4$

b) $|x^2-3|=1 \to \begin{cases} x^2-3=1 \to x_1=2,\ x_2=-2 \\ x^2-3=-1 \to x_3=\sqrt{2},\ x_4=-\sqrt{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=\sqrt{2},\ x_4=-\sqrt{2}$

c) $\left|\frac{x+1}{2}\right|=2 \to \begin{cases} \frac{x+1}{2}=2 \to x=3 \\ \frac{x+1}{2}=-2 \to x=-5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-5$

d) $|x+2|=|3x-2| \to \begin{cases} x+2=3x-2 \to x=2 \\ x+2=-(3x-2) \to x=0 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2,\ x_2=0$

58 Resuelve.

a) $\frac{1}{x+3}<0$ **b)** $\frac{x^2+1}{x+5}>0$ **c)** $\frac{x+3}{x-3}\le 0$ **d)** $\frac{x^2-4}{x}\ge 0$

a) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, +\infty)$
1	+	+
$x+3$	–	+
$\frac{1}{x+3}$	–	+

Solución: $(-\infty, -3)$

b) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

$x^2+1=0$ no tiene solución.

Solución: $(-5, +\infty)$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
x^2+1	+	+
$x+5$	–	+
$\frac{x^2+1}{x+5}$	–	+

c) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3]$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 3$	–	–	+
$\frac{x+3}{x-3}$	+	–	+

Solución: $[-3, 3)$; $x = 3$ no es solución porque hace cero el denominador.

d) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -2]$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$[2, +\infty)$
$x^2 - 4$	+	–	–	+
x	–	–	+	+
$\frac{x^2-4}{x}$	–	+	–	+

Solución: $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$; $x = 0$ no es solución porque hace cero del denominador.

59 Comprueba que una de estas inecuaciones tiene por solución al conjunto $\mathbb{R}$ y la otra es incompatible:

a) $5(x - 2) - 4(2x + 1) < -3x + 1$ b) $3(x - 2) + 7 < x + 2(x - 5)$

a) $5(x - 2) - 4(2x + 1) < -3x + 1 \rightarrow -3x - 14 < -3x + 1 \rightarrow -14 < 1$ que es cierto para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

b) $3(x - 2) + 7 < x + 2(x - 5) \rightarrow 3x + 1 < 3x - 10 \rightarrow 1 < -10$ que es falso, luego no se verifica nunca la desigualdad.

60 Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20 % a unos y un 25 % a otros. Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se rebajó el 25 %.

x = n.º de ordenadores vendidos con un 20 % de descuento

y = n.º de ordenadores vendidos con un 25 % de descuento

Expresamos las condiciones mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 0,8 \cdot 1\,200x + 0,75 \cdot 1\,200y = 56\,400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 60 \\ 960x + 900y = 56\,400 \end{cases} \rightarrow x = 40,\ y = 20$$

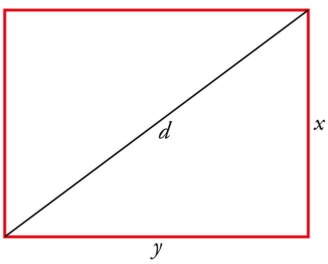
Se han vendido 20 ordenadores con un 25 % de descuento.

61 Calcula las dimensiones que debe tener una finca rectangular sabiendo que su perímetro mide 140 m y que su diagonal mide 50 m.

$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 140 = 2x + 2y \\ 50 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 70 = x + y \\ 2\,500 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 30,\ y_1 = 40;\ x_2 = 40,\ y_2 = 30$

Un lado mide 30 m, y el otro, 40 m.



62 **El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12 % respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12 % respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?**

Si x es el número de personas que vieron la exposición en enero:

$1{,}12 \cdot 0{,}88 \cdot x = x - 36 \rightarrow x - 0{,}9856x = 36 \rightarrow x = 36 : 0{,}0144 = 2\,500$ personas

La exposición en enero la vieron 2 500 personas.

63 **Contratamos una hipoteca en enero de 2021 con revisión semestral del tipo de interés. En julio nos sube la cuota un 4 %, en la siguiente revisión baja un 1 % respecto a julio. Si en el mes de enero de 2022 tenemos que pagar 19,24 € mensuales más que en el mismo mes del año anterior, ¿cuál era la cuota inicial?**

Si x es la cuota inicial:

$1{,}04 \cdot 0{,}99x = x + 19{,}24 \rightarrow 1{,}0296x - x = 19{,}24 \rightarrow 0{,}0296x = 19{,}24 \rightarrow x = 19{,}24 : 0{,}0296 =$
$= 650$ euros

La cuota inicial era de 650 €.

Página 101

64 **Un inversor, que tiene 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8 % y el resto en otro banco al 6 %. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?**

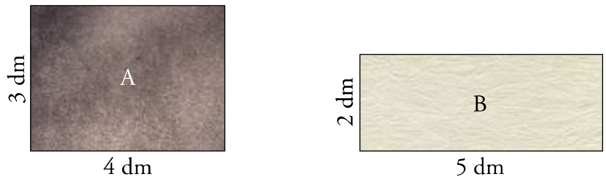
x al 8 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}08x$

$(28\,000 - x)$ al 6 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}06\,(28\,000 - x)$

$0{,}08x = 0{,}06(28\,000 - x) + 200;\ 0{,}08x = 1\,680 - 0{,}06x + 200 \rightarrow x = 13\,428{,}57$ €

Colocó 13 428,57 € al 8 % y 14 571,43 € al 6 %.

65 **Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:**



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

$\left.\begin{array}{l} \text{n.º baldosas A} \rightarrow x \\ \text{n.º baldosas B} \rightarrow x + 40 \end{array}\right\}$ Superficie: $12x = 10(x + 40)$

$12x = 10x + 400$

$2x = 400$

$x = 200$ baldosas

$200 \cdot 12 = 2\,400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}^2$

66 **El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 18 cm. Si su área es 216 cm², ¿cuánto miden la hipotenusa y el cateto mayor?**

Llamaremos h a la hipotenusa y a al cateto mayor.

Área = 216 cm², por tanto:

$$\begin{cases} h^2 = 18^2 + a^2 \\ 216 = \dfrac{a \cdot 18}{2} = 9a \ \to \ a = 24 \end{cases}$$

$h^2 = 18^2 + 24^2 = 900 \ \to \ h = \pm\, 30$

La hipotenusa mide 30 cm, el cateto mayor mide 24 cm.

67 **Una bodega vende su vino de montaña a 18 €/L y su vino del valle a 12 €/L. ¿Cuántos litros de cada uno debe echar a una barrica para conseguir 60 litros de la mezcla a 14,4 €/L?**

Llamaremos x al n.º de litros de vino de montaña que vamos a emplear, e y al n.º de litros de vino de valle. Del enunciado deducimos:

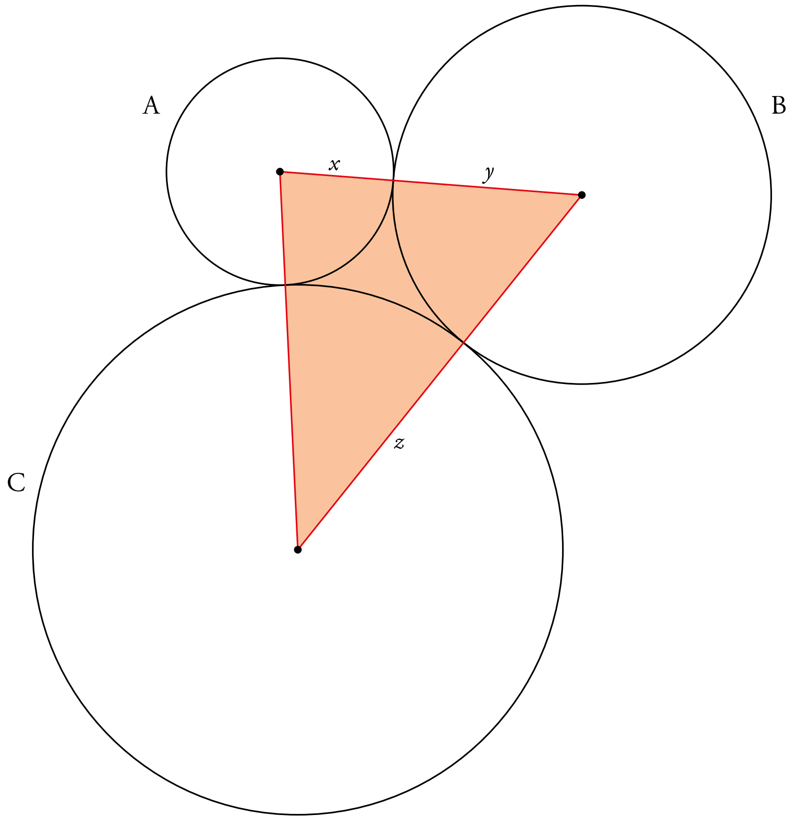
$$\begin{cases} x + y = 60 \ (*) \\ 14{,}4 \cdot 60 = 18x + 12y \ (**) \end{cases}$$

Simplificando (**): $144 = 3x + 2y$

Aislando en (*): $x = 60 - y$

Por tanto: $144 = 3(60 - y) + 2y = 180 - y \ \to \ y = 36 \ \to \ x = 24$

68 **Un circo está compuesto por tres pistas circulares tangentes dos a dos. Las distancias entre sus centros son 80, 100 y 120 metros, respectivamente. Calcula el diámetro de cada una de las pistas.**



Llamamos x al radio de la pista A.

Llamamos y al radio de la pista B.

Llamamos z al radio de la pista C.

$$\begin{cases} x+y=80 \\ x+z=100 \\ y+z=120 \end{cases}$$

Solución: $x = 30$, $y = 50$, $z = 70$

La pista A tiene 60 m de diámetro; la pista B tiene 100 m de diámetro y la pista C tiene 140 m de diámetro.

69 **Al 50 % del alumnado de una clase solo le gusta el fútbol; al 20 % solo le gusta el baloncesto y al resto, que son 6, no les gustan estos deportes. Calcula el total de alumnos y alumnas, el de aficionados al fútbol y al baloncesto.**

x total de estudiantes; y aficionados al fútbol; z aficionados al baloncesto.

$$\begin{cases} 0{,}5x = y \\ 0{,}2x = x \\ 0{,}3x = 6 \end{cases} \rightarrow x = 20;\ y = 10;\ z = 4$$

Son 20 en la clase; 10 aficionados al fútbol y 4 al baloncesto.

70 **En una función de teatro se recaudan 5 200 €, vendiéndose 200 entradas de tres precios distintos: 30 €, 25 € y 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de localidades de cada tipo.**

x = n.º de localidades a 10 €

y = n.º de localidades a 25 €

z = n.º de localidades a 30 €

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=200 \\ 10x+25y+30z=5\,200 \\ 4x=y \end{array}\right\} \ \textit{Solución}:\ x = 20,\ y = 80,\ z = 100$$

Se han vendido 20 localidades de 10 €, 80 de 25 € y 100 de 30 €.

71 **Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y 15 €/kg. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?**

x = kilos de bombones de 10 €/kg

y = kilos de bombones de 15 €/kg

Restricciones:

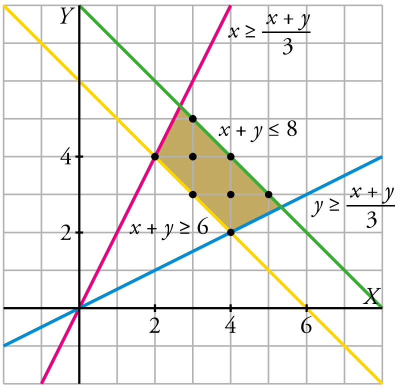
$$\begin{cases} x+y \ge 40 \\ 10x+15y \le 600 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

72 Un comité de una comunidad de vecinos, debe estar formado entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?

Llamamos x al n.º de mujeres e y al n.º de hombres. Las condiciones son:

$$\begin{cases} 6 \le x + y \le 8 \\ x \ge \dfrac{x+y}{3} \\ y \ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Las diferentes posibilidades son: $(x = 4,\ y = 2)$, $(x = 3,\ y = 3)$, $(x = 2,\ y = 4)$, $(x = 4,\ y = 3)$, $(x = 3,\ y = 4)$, $(x = 5,\ y = 3)$, $(x = 4,\ y = 4)$, $(x = 3,\ y = 5)$, que corresponden a los puntos del recinto común cuyas coordenadas son enteras.

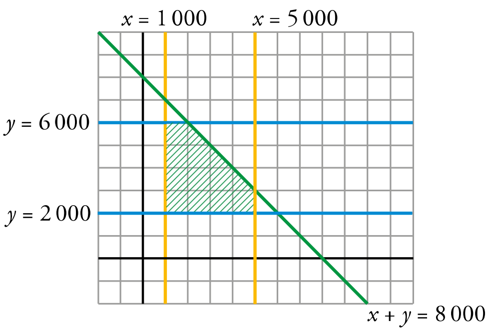
73 Queremos invertir como máximo 8 000 € en dos tipos de acciones A y B de forma que el dinero invertido en A no debe superar los 5 000 € ni ser inferior a 1 000 €. En B no debe superar los 6 000 € ni ser inferior a 2 000 €. Analiza las distintas posibilidades de inversión.

Queremos invertir como máximo 8 000 € en dos tipos de acciones, A y B, de forma que el dinero invertido en A no debe superar los 5 000 € ni ser inferior a 1 000 €. En B no debe superar los 6 000 € ni ser inferior a 2 000 €. Analiza las distintas posibilidades de inversión.

Tenemos que resolver un sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} x + y \le 8\,000 \\ 1\,000 \le x \le 5\,000 \\ 2\,000 \le y \le 6\,000 \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Cualquier punto de este recinto es solución del problema.

AUTOEVALUACIÓN

Página 101

1 **Factoriza los siguientes polinomios señalando sus raíces:**

a) $\boldsymbol{P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4}$ **b)** $\boldsymbol{Q(x) = 2x^3 - x^2 - x}$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Las raíces de $P(x)$ son -2, -1 y 2.

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Sacando factor común: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2.º grado a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \qquad Q(x) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces de $Q(x)$ son $-\frac{1}{2}$, 0 y 1.

2 **Opera y simplifica el resultado.**

a) $\boldsymbol{\dfrac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4}}$

b) $\boldsymbol{\left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x+2}\right)}$

a) $\dfrac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4} = \dfrac{(x+5) - 2x}{(x+5)^3} = \dfrac{5-x}{(x+5)^3}$

b) $$\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right) = \frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)} : \frac{x+2+x}{x+2} =$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x(x+2)} : \frac{2x+2}{x+2} =$$

$$= \frac{3x+2}{x(x+2)} \cdot \frac{x+2}{2x+2} = \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x^2+2x}$$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

b) $x^4-8x^2-9=0$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

Multiplicando por mín.c.m.(2, 3) = 6 $\to$

$\to\ 2(3x+1)-3(5x^2+3)=3(x^2-1)-2(x+2)\ \to$

$\to\ 6x+2-15x^2-9=3x^2-3-2x-4\ \to\ -15x^2+6x-7=3x^2-2x-7\ \to$

$\to\ 18x^2-8x=0\ \to\ 2x(9x-4)=0 \begin{cases} 2x=0\ \to\ x_1=0 \\ 9x-4=0\ \to\ x_2=4/9 \end{cases}$

b) $x^4-8x^2-9=0 \xrightarrow{x^2=y} y^2-8y-9=0$

$y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-9)\cdot(1)}}{2}=\dfrac{8\pm 10}{2} \begin{cases} y=9\ \to\ x^2=9\ \to\ x=\pm 3 \\ y=-1\ \text{(no vale)} \end{cases}$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x\ \to\ (2x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2\ \to\ 4x^2-4x+1=2x-1\ \to\ 4x^2-6x+2=0\ \to\ 2x^2-3x+1=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(2)\cdot(1)}}{4}=\dfrac{3\pm 1}{4} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1/2 \end{cases}$ (Son válidas ambas soluciones.)

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}\ \to\ (x+1)\cdot x-(x-3)(x+3)=x^2-3\ \to\ x^2+x-(x^2-9)=x^2-3\ \to$

$\to\ x^2+x-x^2+9=x^2-3\ \to\ x+9=x^2-3\ \to\ x^2-x-12=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-12)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-3 \end{cases}$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x^2}\cdot 3^{-2}=9$

b) $5^{x^2}\cdot 25^{x-1}=5^{3x}$

c) $\log x+\log 2=1$

d) $\log_x 49=2$

a) $3^{x^2}\cdot 3^{-2}=9\ \to\ 3^{x^2-2}=3^2\ \to\ x^2-2=2\ \to\ x^2=4\ \to\ x=\pm 2$

b) $5^{x^2}\cdot 25^{x-1}=5^{3x}\ \to\ 5^{x^2}\cdot(5^2)^{x-1}=5^{3x}\ \to\ 5^{x^2}\cdot 5^{2x-2}=5^{3x}\ \to\ 5^{x^2+2x-2}=5^{3x}\ \to$

$\to\ x^2+2x-2=3x\ \to\ x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-2)}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

c) $\log x+\log 2=1\ \to\ \log 2x=\log 10\ \to\ 2x=10\ \to\ x=5$

d) $\log_x 49=2\ \to\ x^2=49\ \to\ x=7,\ x=-7$

Como la base no puede ser negativa, $x=7$.

5 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = -2 \;\to\; x = -\dfrac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \;\to\; -\frac{6}{y} + 2y = -1 \;\to\; -6 + 2y^2 = -y \;\to\; 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(2)\cdot(-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} y_1 = \dfrac{3}{2} \;\to\; x_1 = -\dfrac{4}{3} \\ y_2 = -2 \;\to\; x_2 = 1 \end{cases}$$

Hay dos pares de *soluciones*:

$x_1 = -\dfrac{4}{3},\; y_1 = \dfrac{3}{2};\; x_2 = 1,\; y_2 = -2$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \;\to\; x = 4 + 2y \end{cases}$

$$\sqrt{-2(4+2y)} + y = -1 \;\to\; \left(\sqrt{-8-4y}\right)^2 = (-1-y)^2 \;\to\; -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \;\to\; y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot(1)\cdot(9)}}{2} = \frac{-6}{2} \;\to\; y = -3$$

$x = 4 + 2(-3) \;\to\; x = -2$

Solución: $x = -2,\; y = -3$

6 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 1 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 1 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 - x \\ z = x - 1 \\ 2(2-x) + 3(x-1) = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 & (1.^a) \\ 2x - y + z = 2 & (2.^a) + (1.^a) \\ x - y + z = 1 & (3.^a) + (1.^a) \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = 3 & (1.^a) \\ 3x + 2z = 5 & (2.^a) \\ 2x + 2z = 4 & (2.^a) - (3.^a) \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \;\to\; x = 1;\; y = 1;\; z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

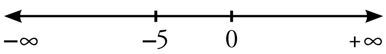
7 **Resuelve.**

a) $x^2 + 5x \ge 0$ **b)** $x^2 - 25 < 0$

c) $\begin{cases} 2x + 1 \ge 7 \\ x + 1 \le 8 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y \ge 1 \\ y - 2x \ge 3 \\ y \le 3 \end{cases}$

a) $x^2 + 5x \ge 0 \;\to\; x(x+5) \ge 0$

Las raíces de $x(x+5) = 0$ son 0 y 5:

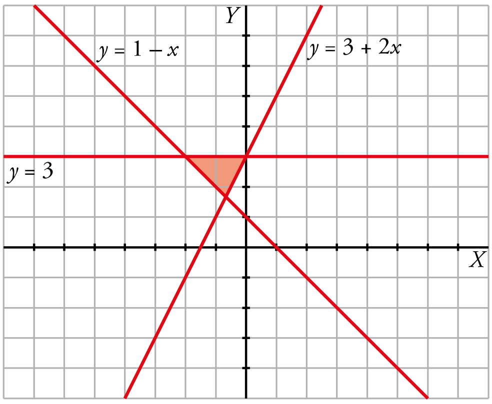


$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = -6 \;\to\; -6(-6+5) > 0 \\ \text{Si } x = -1 \;\to\; -1(-1+5) < 0 \\ \text{Si } x = 1 \;\to\; 1(1+5) > 0 \end{array}\right\}$ *Solución*: $(-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$

b) $x^2 - 25 < 0 \rightarrow x^2 < 25 \rightarrow -5 < x < 5 \rightarrow$ *Solución*: $(-5, 5)$

c) $\left.\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3 \\ x + 1 \leq 8 \rightarrow x \leq 7 \end{cases}\right\}$ *Solución*: $[3, 7]$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$ La solución es el recinto sombreado:



8 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?**

Llamamos x al número de kilos que compró el tendero.

Llamamos y al precio al que compra cada kilo de manzanas.

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x - 20)(y + 0,4) = 147 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (nos quedamos solo con la solución positiva):

$$x = 125, \ y = 1$$

Por tanto, el tendero compró 125 kg.