Límites de Funciones

▼ 1. Introducción: El Concepto de Límite

En matemáticas, el concepto de **límite** es la piedra angular sobre la que se construye el Análisis Matemático (Cálculo Diferencial e Integral). Constituye la herramienta formal que nos permite estudiar el comportamiento dinámico de una función cuando su variable independiente (x) se aproxima infinitamente a un valor determinado, o cuando crece/decrece indefinidamente.

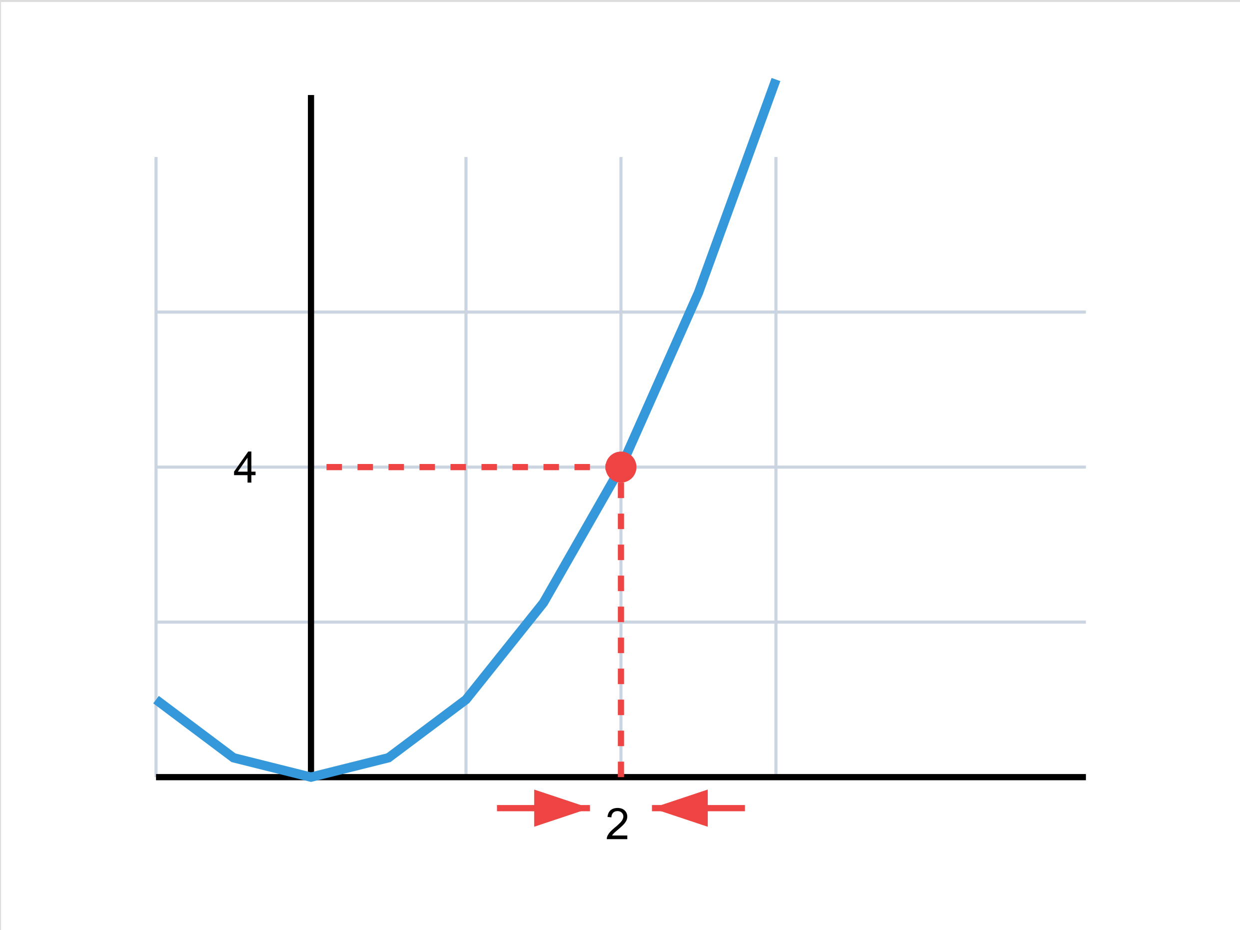
A diferencia del álgebra tradicional que evalúa funciones en puntos estáticos, el límite nos responde a la pregunta: "*¿Hacia qué valor se dirige la función $f(x)$ mientras x se acerca a a, sin importar lo que ocurra exactamente en el punto a?*".

▼ 2. Idea Intuitiva de Límite

Para comprender el límite de forma intuitiva, consideremos la función cuadrática $f(x) = x^2$. Queremos saber qué ocurre con los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a 2.

Si evaluamos puntos cada vez más cercanos a 2 (por ejemplo: 1.9, 1.99, 1.999 o bien 2.1, 2.01, 2.001), observamos que el valor de $f(x)$ se aproxima inexorablemente a 4.

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$



Gráfica 1. Acercamiento al punto x=2 en la función f(x)=x².

▼ 3. Límite en un punto y Límites Laterales

Para calcular analíticamente el límite de una función en un punto $x = a$, el primer paso es **sustituir directamente** el valor de a en la expresión de la función. Si obtenemos un valor real definido, ese es el límite.

Sin embargo, para que un límite exista en rigor, el comportamiento de la función debe ser el mismo tanto si nos acercamos por la izquierda (valores menores) como por la derecha (valores mayores). A esto se le conoce como **límites laterales**.

> Condición de existencia: El límite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si y solo si:
>
> $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

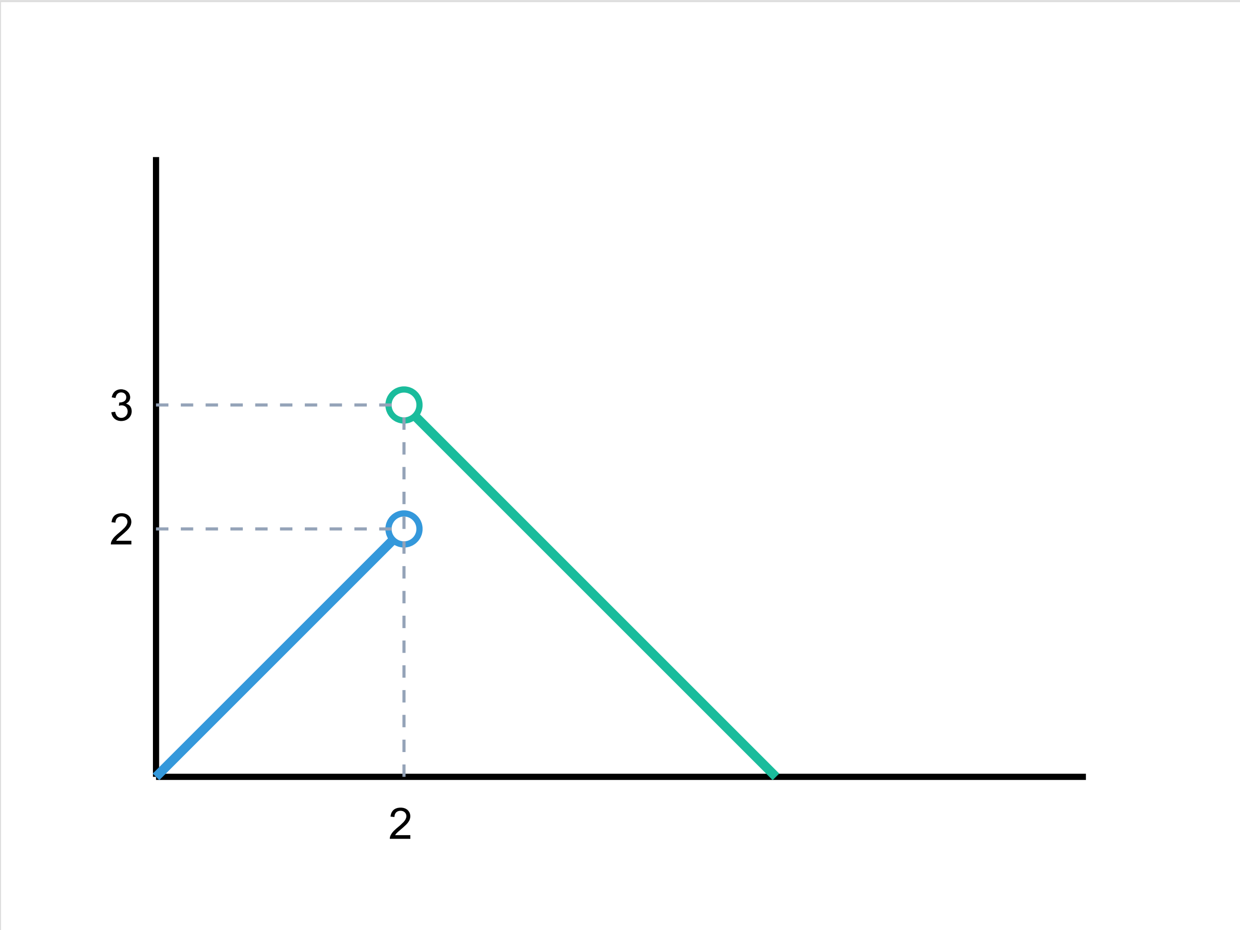
Veamos un ejemplo donde los límites laterales **no** coinciden. Dada la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calculamos los límites laterales en $x = 2$:

- Por la izquierda ($x < 2$): $\lim_{x \to 2^-} x = 2$
- Por la derecha ($x > 2$): $\lim_{x \to 2^+} (5 - x) = 3$

Como $2 \neq 3$, concluimos que **el límite no existe** en $x = 2$.



Gráfica 2. Salto finito en x=2. Los límites laterales no coinciden.

▼ 4. Límite vs. Valor de la Función

Es un error común confundir el valor del límite con el valor de la función en el punto, es decir, confundir $\lim_{x\to a} f(x)$ con $f(a)$.

El límite solo se preocupa de lo que ocurre **alrededor** del punto, nunca exactamente en el punto. Veamos esta función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Analicemos el límite cuando $x \to 1$:

Si evaluamos alrededor de 1, utilizamos la primera rama (simplificando la fracción: $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$). Por tanto, el límite es $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$.

Sin embargo, el valor exacto de la función en el punto es distinto por definición: $f(1) = 3$.

Conclusión: El límite y el valor de la función son conceptos independientes. Pueden coincidir (funciones continuas) o ser totalmente distintos.

▼ 5. Indeterminación 0/0 (Factorización y Racionalización)

Al sustituir el valor de x en una fracción racional, podemos obtener el resultado $\frac{0}{0}$. Esto no es un cero, ni un infinito; es una **indeterminación** matemática que nos indica que el límite no puede determinarse con su forma actual. Debemos operar algebraicamente para eliminar el factor problemático.

A) Resolución mediante Racionalización

Cuando la indeterminación incluye raíces, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador $(\sqrt{x}+3)$:

$$\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x})^2-3^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

Simplificamos el factor común $(x-9)$:

$$\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

B) Resolución por Descomposición de Polinomios

Evaluaremos tres casos obligatorios utilizando estrictamente **polinomios de grado 3** en el numerador y denominador.

Caso 1: Extracción de factor común

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-4x^2+8x}{x^3+5x^2-2x}\to\left[\frac{0}{0}\right]$$

Extraemos el factor común x en ambos términos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(2x^2-4x+8)}{x(x^2+5x-2)}$$

Simplificamos la x y evaluamos de nuevo en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-4x+8}{x^2+5x-2}=\frac{8}{-2}=-4$$

Caso 2: Polinomio con una raíz doble (Potencia Doble)

Construimos polinomios que se anulan en $x=2$ y presentan una raíz doble: $(x-2)^2$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Al aplicar Ruffini, factorizamos obteniendo el factor $(x-2)^2$:
Numerador: $(x-2)^2(x+1)$
Denominador: $(x-2)^2(x+3)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2+1}{2+3} = \frac{3}{5}$$

Caso 3: Polinomio con una única raíz real

Para este caso, diseñamos un polinomio de grado 3 que solo se anula en $x = 1$ (una raíz real y dos complejas no reales).

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 - 2} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Mediante Ruffini extraemos la única raíz real $(x-1)$:
Numerador: $(x-1)(x^2+x+1)$
Denominador: $(x-1)(x^2+2x+2)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1+1+1}{1+2+2} = \frac{3}{5}$$

▼ 6. Límites cuando $x \to \infty$

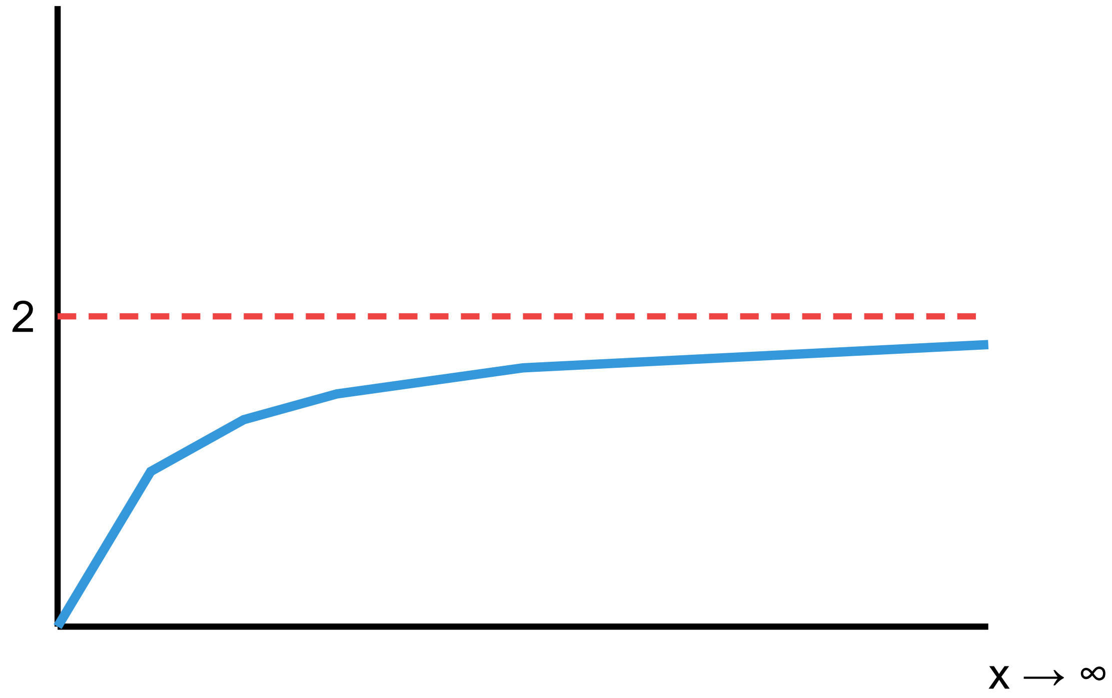
Estudiar el límite cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ significa analizar hacia dónde se estabilizan (o si crecen sin control) los valores de la función cuando la variable independiente se hace infinitamente grande.

Consideremos la función racional $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Evaluamos valores muy grandes:

- $f(10) \approx 1.818$

- $f(100) \approx 1.980$
- $f(1000) \approx 1.998$

Observamos que la función tiende asintóticamente al valor 2.



Gráfica 3. Estabilización de la función f(x)=2x/(x+1) hacia y=2.

▼ 7. Límites al infinito de Polinomios

En el caso de un polinomio, al hacer el límite hacia el infinito, el comportamiento de todo el polinomio viene dictaminado exclusivamente por su **término de mayor grado**. El resto de los términos se vuelven insignificantes frente a su magnitud.

El resultado siempre será $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del signo del coeficiente principal y de si el grado es par o impar (en caso de $-\infty$).

Ejemplo 1 (Resultado $+\infty$): Polinomio de grado 3.

$$\lim_{x \to +\infty} (4x^3 - 7x^2 + 2x - 1) = \lim_{x \to +\infty} (4x^3) = 4 \cdot (+\infty)^3 = +\infty$$

Ejemplo 2 (Resultado $-\infty$): Polinomio de grado 3.

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 2x^2 + x - 5) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -1 \cdot (+\infty)^3 = -\infty$$

▼ 8. Indeterminación ∞/∞ en Funciones Racionales

Al dividir dos polinomios, ambos tienden a infinito, generando la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolverla de manera rápida e intuitiva, comparamos los grados de los polinomios, aislando únicamente los términos de mayor grado tanto del numerador como del denominador.

Existen tres casos posibles dependiendo de la relación entre los grados:

Caso 1: Mismo grado en numerador y denominador

El límite es el cociente de los coeficientes principales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + x - 1}{3x^3 + 5x^2 - 7} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Nos quedamos exclusivamente con los términos principales:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^3}{3x^3}$$

Simplificamos las potencias de x:

$$= \frac{6}{3} = 2$$

Caso 2: Grado del denominador > Grado del numerador

El denominador crece mucho más rápido, por lo que la fracción tiende a cero.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5x}{x^3 - 1} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Caso 3: Grado del numerador > Grado del denominador

El numerador crece mucho más rápido, por lo que la fracción tiende a infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - x}{x^2 + 3} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = 2 \cdot (+\infty)^2 = +\infty$$

▼ 9. Funciones con Radicales al infinito (Indeterminación ∞/∞)

Cuando introducimos raíces y calculamos límites al infinito, procedemos asumiendo el mismo principio: domina la mayor potencia dentro de la raíz. Debemos tener en cuenta que el "grado efectivo" de un término bajo una raíz cuadrada es la mitad de su exponente analítico.

Caso 1: Con solución real

Vamos a analizar el comportamiento de una fracción algebraica que incluye una raíz. Extraemos término principal arriba y abajo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 4x}}{x + 2} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Dentro de la raíz, domina $9x^2$. En el denominador, domina x:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

Caso 2: Sin solución en los reales

Debemos ser precavidos si calculamos el límite cuando $x \to -\infty$, ya que puede generarse una contradicción en el dominio de las raíces de índice par (como la raíz cuadrada).

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^3 - 2x}$$

El término principal de la raíz es x^3. Al evaluarlo en $-\infty$, obtenemos:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{(-\infty)^3} = \sqrt{-\infty}$$

Dado que no existe la raíz cuadrada de un número real negativo, afirmamos que este límite NO EXISTE.

▼ 10. Indeterminación 1^∞ (Método Algebraico Paso a Paso)

Esta es una indeterminación vinculada estructuralmente al **Número** e. Aunque existen fórmulas directas, el rigor algebraico nos exige aplicar el procedimiento de manipulación paso a paso: buscar la estructura $(1 + \frac{1}{f(x)})^{f(x)} \to e$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{x+5}$$

Observamos que la base tiende a $2/2 = 1$ y el exponente a ∞, luego es $[1^\infty]$.

Paso 1: Sumar y restar 1 a la base para fabricar el "1 + ...".

$$\frac{2x+3}{2x-1} = 1 + \left(\frac{2x+3}{2x-1} - 1\right) = 1 + \frac{2x+3-(2x-1)}{2x-1} = 1 + \frac{4}{2x-1}$$

Paso 2: Poner en forma de $\frac{1}{f(x)}$ (invirtiendo la fracción):

$$1 + \frac{1}{\frac{2x-1}{4}}$$

Paso 3: Elevamos a $f(x)$ para construir el número e, y compensamos el exponente multiplicando por su inverso y por el exponente original $(x+5)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4}{2x-1}\cdot(x+5)}$$

Paso 4: El corchete converge al número e. Calculamos el límite del exponente compensado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4(x+5)}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+20}{2x-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Resultado Final:

$$e^2$$

▼ 11. Indeterminación $\infty - \infty$

La indeterminación $\infty - \infty$ es engañosa. No podemos asumir que vale cero, ya que los "infinitos" pueden crecer a ritmos drásticamente diferentes. Veremos cómo se solventa según la naturaleza de la función.

A) Con Fracciones Algebraicas

Para resolver este tipo, debemos efectuar la resta algebraica reduciendo las fracciones a común denominador.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \to [\infty - \infty]$$

Sacamos mínimo común múltiplo (el denominador derecho factoriza como $(x-2)(x+2)$):

$$\lim_{x \to 2} \frac{1(x+2)-4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

Obtenemos un $0/0$. Simplificamos el factor problemático $(x-2)$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

B) Con Raíces Cuadradas (Uso del Conjugado)

Se resuelve multiplicando y dividiendo por el binomio conjugado para "forzar" una suma por diferencia en el numerador y liberar los términos de la raíz.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+6x} - x \right) \to [\infty - \infty]$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+6x}-x)(\sqrt{x^2+6x}+x)}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+6x})^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+6x}+x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x}$$

Pasamos a una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ de grados iguales (grado 1). Extraemos factores principales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{x + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$$

12. Continuidad en un Punto

El análisis de la continuity une los conceptos de límite y valor funcional de forma rigurosa. Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si, y sólo si, se cumplen estrictamente estas tres condiciones:

1. Existe el valor de la función: $f(a)$.
2. Existe el límite: $\lim_{x \to a} f(x)$ (límites laterales coinciden).
3. El límite es idéntico al valor de la función: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Función de única expresión

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

¿Es continua en $x = 3$?
1. Valor: $f(3) = \frac{0}{0}$. No existe valor de la función.
2. Límite: $\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$. El límite existe.
Conclusión: Discontinuidad evitable en $x = 3$ (falta el punto, pero el límite existe).

Función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudio en $x = 1$:
1. Valor: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.
2. Límites laterales:
- Izquierda ($x \leq 1$): $\lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2$
- Derecha ($x > 1$): $\lim_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2$
Como los laterales coinciden, el límite es 2.

3. Comparativa: $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$.
Conclusión: La función es perfectamente continua en $x = 1$.

▼ 13. Asíntotas Verticales

Una **Asíntota Vertical (A.V.)** ocurre cuando, al acercarnos a un valor finito de $x = a$, la función se dispara hacia el infinito ($+\infty$ o $-\infty$). Formalmente, es la recta de ecuación $x = a$.

En fracciones algebraicas, se buscan igualando el denominador a cero y comprobando que el numerador no se anule a la vez (lo que produciría una discontinuidad evitable, vista en el 0/0).

$$f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

Igualamos denominador a 0: $x - 3 = 0 \implies x = 3$.
Calculamos los límites laterales para confirmar la A.V. y estudiar su comportamiento hacia el infinito:

- Por la izquierda (ej: 2.99): $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{6}{0^-} = -\infty$
- Por la derecha (ej: 3.01): $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \frac{6}{0^+} = +\infty$

Existe una Asíntota Vertical de ecuación: $x = 3$.

▼ 14. Asíntotas Horizontales

Una **Asíntota Horizontal (A.H.)** describe el comportamiento en el extremo infinito. Si el límite cuando x tiende a infinito da como resultado un número real L, decimos que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.

En las fracciones algebraicas, existen si el grado del numerador es menor o igual al del denominador.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2}$$

Calculamos el límite en el infinito comparando grados (son iguales):

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Existe una Asíntota Horizontal de ecuación: $y = 4$.

▼ 15. Asíntotas Oblicuas

Una **Asíntota Oblicua (A.O.)** es una recta inclinada de ecuación $y = mx + n$. Aparece en fracciones algebraicas exclusivamente cuando el grado del numerador es **exactamente un grado superior** al del denominador (por lo tanto, incompatibles con las Asíntotas Horizontales).

Las fórmulas analíticas para extraer los coeficientes de la recta son:

- Pendiente: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$
- Ordenada al origen: $n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - m \cdot x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 2}$$

Comprobamos grados: Numerador (grado 2), Denominador (grado 1). Hay A.O.

Cálculo de 'm':

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+2x+1}{x-2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{1} = 1$$

Cálculo de 'n':

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x - 2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1 - x(x - 2)}{x - 2} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{x-2} = \frac{4}{1} = 4$$

La ecuación de la Asíntota Oblicua es: $y = x + 4$.