Funciones Reales

▼ 1. Funciones Reales de Variable Real

La relación existente entre dos magnitudes suele venir dada por medio de una fórmula o expresión matemática llamada función.

Una función real de variable real es una correspondencia tal que a cada elemento de un subconjunto de R, llamado dominio de la función, Dom f, le corresponde uno y sólo un elemento de otro subconjunto de R, llamado conjunto imagen o recorrido de la función, Im f.

Una función real de variable real se puede expresar de la siguiente forma:

$$f : R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

La función se llama real porque el conjunto final es R y se llama de variable real porque el conjunto inicial es R.

Dominios de las funciones más usuales:

- **Funciones polinómicas.** El dominio de estas funciones coincide con el conjunto de los números reales.
- **Funciones racionales.** El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales, excluidos los ceros o raíces de la ecuación del denominador.
- **Funciones irracionales** del tipo $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$. Si n es impar, el dominio de f coincide con el dominio de $g(x)$, y si n es par, el dominio de f es el conjunto de números reales tales que $g(x) \geq 0$.

  > Dom $f = Dom\ g$ si n es impar;
  > Dom $f = \{x \in R / g(x) \geq 0\}$ si n es par

- **Funciones trigonométricas.** Las del tipo $f(x) = sen[g(x)]$ y $f(x) = cos[g(x)]$ tienen por dominio el dominio de $g(x)$. Las funciones del tipo $f(x) = tg[g(x)]$

tienen por dominio:

$$Dom\ f = \left\{x \in R/g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in Z\right\}$$

- **Funciones exponenciales.** El dominio de estas funciones, $f(x) = a^{g(x)}$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, coincide con el dominio de $g(x)$.
- **Funciones logarítmicas.** El dominio de este tipo de funciones, $f(x) = log_a[g(x)]$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, es el subconjunto de los números tales que hacen $g(x)$ positivo.

$$Dom\ f = \{x \in R/g(x) > 0\}$$

2. Características de las Funciones

2.1. Funciones Simétricas

Una función $y = f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas o eje OY si verifica:

$$f(-x) = f(x), \forall x \in Dom\ f$$

Las funciones simétricas respecto del eje de ordenadas se llaman funciones pares.

Ejemplo: La función $f(x) = e^x + e^{-x}$ es una función par.

Una función $y = f(x)$ es simétrica respecto del origen de coordenadas si verifica: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in Dom\ f$.

Las funciones simétricas respecto del origen de coordenadas se llaman funciones impares.

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ es una función impar.

2.2. Funciones Periódicas

Una función es periódica de periodo $T (T > 0)$ si verifica:

$$f(x + kT) = f(x), \forall k \in Z \text{ y } \forall x \in Dom\ f$$

Al menor valor que toma T se le llama período principal de la función. Cualquier múltiplo del período principal es también un período de la función.

2.3. Monotonía

La monotonía se basa en estudiar cómo aumenta o disminuye la variable dependiente y al aumentar o disminuir la variable independiente x.

2.3.1. Funciones estrictamente crecientes

Una función f es estrictamente creciente en un intervalo (a, b) si y sólo si:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Una función f es estrictamente creciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, en el cual la función es estrictamente creciente.

2.3.2. Funciones estrictamente decrecientes

Una función f es estrictamente decreciente en un intervalo (a, b) si y sólo si:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una función f es estrictamente decreciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, en el cual la función es estrictamente decreciente.

2.4. Extremos Relativos

Una función f tiene un máximo relativo en un punto de x_0, si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, tal que para todo x que pertenece al entorno reducido

$E^*(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) - \{x_0\}$ se verifica que: $f(x) < f(x_o)$.

Una función tiene un máximo relativo en un punto si en las proximidades de ese punto es el mayor valor que toma la función.

Una función f tiene un mínimo relativo en un punto de x_0, si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, tal que para todo x que pertenece al entorno reducido $E^*(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) - \{x_0\}$ se verifica que: $f(x) > f(x_o)$.

Una función tiene un mínimo relativo en un punto si en las proximidades de ese punto es el valor más pequeño que toma la función.

▼ 3. Composición de Funciones

La función $h(x) = cos(x^2 - 1)$ es una función compuesta de las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = cos\ x$, es decir:

$$x \to f(x) = x^2 - 1 \to g[f(x)] = cos(x^2 - 1)$$

Dadas dos funciones f y g, con Im $f \subset Dom\ g$, se llama función compuesta de la función f con la función g (o f compuesta con g) a la función $g \circ f$ que cumple:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Las propiedades de más características de la composición de funciones son:

- **Propiedad asociativa.** Tres funciones cualesquiera, $f, g \text{ y } h$, que se puedan componer, verifican:

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- **Propiedad no conmutativa.** La composición de funciones, en general, no es conmutativa, es decir:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

▼ 4. Función Inversa

Antes de definir la función inversa recordemos que la función identidad se define como la función que transforma cualquier número en sí mismo, es decir, $i(x) = x \; \forall x \in R$.

La función inversa de una función inyectiva f (una función es inyectiva si cada elemento de Im f es imagen de uno y sólo un elemento de Dom f) se representa por f^{-1} y es la función que cumple:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \text{ para cualquier x perteneciente al Dom f.}$$

Las propiedades más características que verifican una función y su inversa son:

- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$, siendo i la función identidad.
- Las gráficas de una función f y su inversa f^{-1}, referidas al mismo sistema de coordenadas, son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Ejemplo: La inversa de la función $f(x) = 2 - 3x$ es la función $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$.