

Derivadas

▼ Sección 1: Introducción

Imaginad que estáis analizando la velocidad de un coche. Sabemos calcular la **velocidad media**: es el espacio recorrido dividido por el tiempo empleado. Pero, ¿y si el coche acelera? ¿Y si queremos saber la **velocidad exacta a las 10:00:00 AM**? La velocidad media no nos sirve.

Ese concepto de "velocidad exacta en un instante" es la **Tasa de Variación Instantánea**, y matemáticamente, eso es la **Derivada**. La derivada nos dice *cómo cambia* una función en un punto específico, dándonos su pendiente (la inclinación) en ese momento justo.

Es la herramienta mágica que nos permite optimizar procesos (encontrar el máximo beneficio o el mínimo coste), modelar el movimiento de los planetas, o entender el crecimiento de una población. Sin ella, la física y la ingeniería moderna no existirían.

▼ Sección 2: Tasa de Variación Media (TVM)

La TVM de una función $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es el cociente entre la variación de la función y la variación de la variable independiente. Representa la pendiente de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo 1: TVM en un intervalo numérico simple

Calcula la TVM de $f(x) = x^2 + 2x$ en el intervalo $[1, 3]$.

Paso 1: Identificar los puntos a y b .

$$a = 1, b = 3.$$

Paso 2: Calcular $f(a)$ y $f(b)$.

$$f(1) = 1^2 + 2(1) = 1 + 2 = 3.$$

$$f(3) = 3^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15.$$

Paso 3: Aplicar la fórmula.

$$TVM[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Resultado: La TVM de $f(x)$ en $[1, 3]$ es 6.

Ejemplo 2: TVM con función polinómica de 3 términos

Calcula la TVM de $f(x) = 2x^2 - x + 4$ en el intervalo $[-2, 1]$.

Paso 1: Identificar los puntos.

$$a = -2, b = 1.$$

Paso 2: Calcular imágenes.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - (-2) + 4 = 2(4) + 2 + 4 = 8 + 6 = 14.$$

$$f(1) = 2(1)^2 - (1) + 4 = 2(1) - 1 + 4 = 5.$$

Paso 3: Aplicar fórmula.

$$TVM[-2, 1] = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{5 - 14}{1 + 2} = \frac{-9}{3} = -3$$

Resultado: La TVM es -3.

Ejemplo 3: TVM con un intervalo genérico $[a, a + h]$

Calcula la TVM de $f(x) = 3x^2 + 1$ en el intervalo $[a, a + h]$.

Paso 1: Identificar puntos.

$$x_1 = a, x_2 = a + h.$$

Paso 2: Calcular imágenes.

$$f(a) = 3a^2 + 1.$$

$$f(a + h) = 3(a + h)^2 + 1 = 3(a^2 + 2ah + h^2) + 1 = 3a^2 + 6ah + 3h^2 + 1.$$

Paso 3: Aplicar fórmula y simplificar.

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} &= \frac{(3a^2 + 6ah + 3h^2 + 1) - (3a^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 1 - 3a^2 - 1}{h} = \frac{6ah + 3h^2}{h} \\ &= \frac{h(6a + 3h)}{h} = 6a + 3h \end{aligned}$$

Resultado: La TVM es $6a + 3h$.

▼ Sección 3: Tasa de Variación Instantánea (TVI)

Como hemos visto en la introducción, la TVI nos da el cambio en un instante preciso. Matemáticamente, esto se consigue tomando la TVM en un intervalo $[a, a + h]$ y haciendo que la longitud del intervalo, h , tienda a cero.

$$TVI(a) = \lim_{h \rightarrow 0} TVM[a, a + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Este límite es, precisamente, la definición formal de la derivada de la función en el punto a .

▼ Sección 4: La Derivada en un punto

Definición Formal

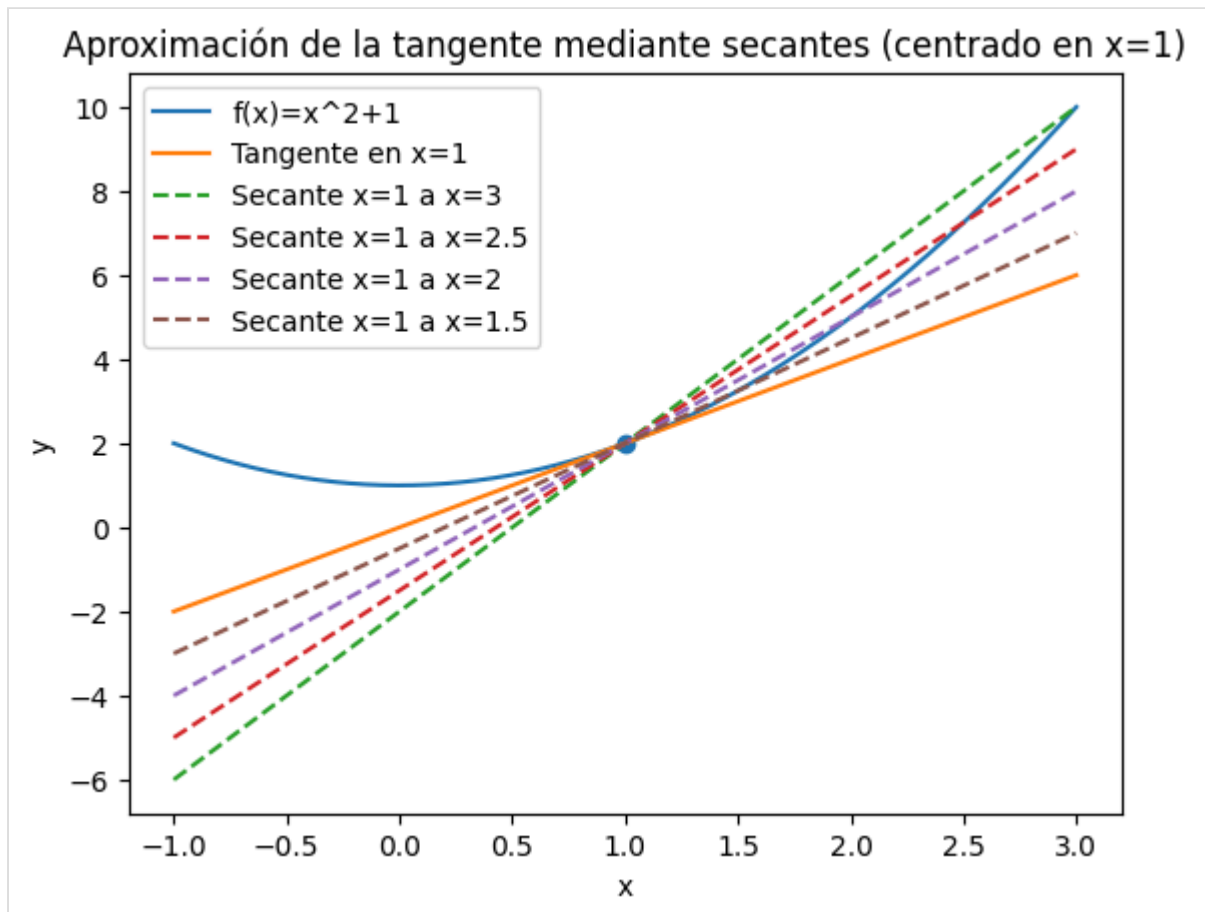
La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$, denotada como $f'(a)$ (leído "f prima de a"), se define mediante el siguiente límite, si existe y es finito:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si este límite existe, decimos que la función es derivable en a .

Interpretación Geométrica

Al hacer $h \rightarrow 0$, el punto $Q(a + h, f(a + h))$ se acerca indefinitivamente al punto $P(a, f(a))$. Las rectas secantes que pasan por P y Q (cuya pendiente es la TVM) van girando hasta coincidir, en el límite, con la recta **tangente** a la curva en el punto P. Por tanto, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en $x = a$.



Gráfica: La línea naranja es la tangente en P. Las líneas punteadas son las secantes que se aproximan a la tangente cuando h tiende a cero.

Ejemplo 1: Calcular la derivada usando la definición

Calcula $f'(1)$ para $f(x) = x^2 + 3x$.

Paso 1: Identificar $a = 1$.

Paso 2: Calcular $f(1)$ y $f(1 + h)$.

$$f(1) = 1^2 + 3(1) = 4.$$

$$f(1+h) = (1+h)^2 + 3(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 3 + 3h = h^2 + 5h + 4.$$

Paso 3: Plantear el límite.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 5h + 4) - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+5) = 5 \end{aligned}$$

Resultado: $f'(1) = 5$.

▼ Sección 5: Ecuación de la Recta Tangente

Para definir una recta necesitamos un punto y una pendiente. Para la recta tangente a $f(x)$ en el punto donde $x = a$:

- **El punto de tangencia:** Es $P(a, f(a))$.
- **La pendiente (m):** Es $m = f'(a)$.

Usando la forma **punto-pendiente** de la recta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtenemos la fórmula de la recta tangente:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

▼ Sección 6: Casos prácticos de la Recta Tangente

Caso 1: Dando la coordenada x e y del punto.

Halla la tangente a $f(x) = x^3 - 2x$ en el punto $P(2, 4)$.

Verificación: $f(2) = 2^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4$. El punto pertenece a la curva.

Paso 1: Necesitamos $f'(2)$. Calculamos la función derivada general: $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Paso 2: Calculamos la pendiente m: $m = f'(2) = 3(2)^2 - 2 = 3(4) - 2 = 10$.

Paso 3: Aplicamos la fórmula con $a = 2$, $f(a) = 4$, $m = 10$:

$$y - 4 = 10(x - 2) \implies y = 10x - 20 + 4 \implies y = 10x - 16$$

Caso 2: Dando solo la coordenada x.

Halla la tangente a $f(x) = \ln(x) + 2$ en $x = e$.

Paso 1: Calcular $f(a)$. $f(e) = \ln(e) + 2 = 1 + 2 = 3$. El punto es $(e, 3)$.

Paso 2: Calcular derivada general. $f'(x) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$.

Paso 3: Calcular pendiente. $m = f'(e) = \frac{1}{e}$.

Paso 4: Aplicar fórmula.

$$y - 3 = \frac{1}{e}(x - e) \implies y = \frac{x}{e} - \frac{e}{e} + 3 \implies y = \frac{1}{e}x + 2$$

Caso 3: Dando solo la coordenada y.

Halla las tangentes a $f(x) = x^2 - 4x + 6$ en los puntos donde $y = 3$.

Paso 1: Encontrar las x. Igualamos $f(x) = 3$.

$$x^2 - 4x + 6 = 3 \implies x^2 - 4x + 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado (usando Python para verificar raíces: {1, 3}):

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \implies x_1 = 3, x_2 = 1$$

Tenemos dos puntos de tangencia: $P_1(3, 3)$ y $P_2(1, 3)$.

Paso 2: Calcular derivada general. $f'(x) = 2x - 4$.

Paso 3: Calcular pendientes y ecuaciones para cada punto.

Para $P_1(3,3)$: $m_1 = f'(3) = 2(3) - 4 = 2$. Tangente:

$$y - 3 = 2(x - 3) \implies y = 2x - 3.$$

Para $P_2(1,3)$: $m_2 = f'(1) = 2(1) - 4 = -2$. Tangente:

$$y - 3 = -2(x - 1) \implies y = -2x + 5.$$

▼ Sección 7: Tabla de Derivadas Simples

Una vez entendida la definición, usamos reglas y tablas para calcular derivadas rápidamente.

Función Directa $f(x)$	Función Derivada $f'(x)$
Potencia: x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Exponencial base e : e^x	e^x
Logaritmo Neperiano: $\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Raíz Cuadrada: \sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Raíz de índice n : $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Seno: $\text{sen}(x)$	$\text{cos}(x)$
Coseno: $\text{cos}(x)$	$-\text{sen}(x)$
Tangente: $\text{tg}(x)$	$\frac{1}{\text{cos}^2(x)} = 1 + \text{tg}^2(x) = \text{sec}^2(x)$
Arcoseno: $\text{arcsen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcocoseno: $\text{arccos}(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcotangente: $\text{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

▼ Sección 8: Regla de la Cadena (Funciones compuestas)

La Regla de la Cadena se aplica para derivar funciones compuestas,

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Se puede pensar como "la derivada de lo de fuera, evaluada en lo de dentro, por la derivada de lo de dentro".

$$[f(g(x))]’ = f’(g(x)) \cdot g’(x)$$

En la práctica, sustituimos la variable independiente en la tabla simple por una función interna $u(x)$, y multiplicamos el resultado final por la derivada de esa función, $u’(x)$.

Tabla de Derivadas Compuestas

A continuación, aplicamos la Regla de la Cadena a las funciones vistas en la Sección 7, considerando $u = u(x)$ como la función interna:

Función Compuesta	Fórmula Derivada $[f(u)]’$
Potencia: u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u’$
Exponencial: e^u	$e^u \cdot u’$
Logaritmo: $\ln(u)$	$\frac{u’}{u}$
Raíz Cuadrada: \sqrt{u}	$\frac{u’}{2\sqrt{u}}$
Raíz n-ésima: $\sqrt[n]{u}$	$\frac{u’}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
Seno: $\text{sen}(u)$	$\text{cos}(u) \cdot u’$
Coseno: $\text{cos}(u)$	$-\text{sen}(u) \cdot u’$
Tangente: $\text{tg}(u)$	$\frac{u’}{\text{cos}^2(u)} = (1 + \text{tg}^2(u)) \cdot u’$
Arcoseno: $\text{arcsen}(u)$	$\frac{u’}{\sqrt{1-u^2}}$
Arcocoseno: $\text{arccos}(u)$	$\frac{-u’}{\sqrt{1-u^2}}$
Arcotangente: $\text{arctg}(u)$	$\frac{u’}{1+u^2}$

Ejemplos de cada tipo (paso a paso)

1. Potencia compuesta

Calcula la derivada de $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)^4$.

Paso 1: Identificar la estructura. Es una potencia de la forma u^n .

$$u = 3x^2 - 5x + 1. n = 4.$$

Paso 2: Calcular u' .

$$u' = 6x - 5.$$

Paso 3: Aplicar regla de la cadena ($n \cdot u^{n-1} \cdot u'$).

$$f'(x) = 4 \cdot (3x^2 - 5x + 1)^{4-1} \cdot (6x - 5)$$

$$f'(x) = 4(6x - 5)(3x^2 - 5x + 1)^3$$

2. Exponencial compuesta

Calcula la derivada de $f(x) = e^{x^3-2x}$.

Paso 1: Estructura e^u . $u = x^3 - 2x$.

Paso 2: $u' = 3x^2 - 2$.

Paso 3: Aplicar $e^u \cdot u'$.

$$f'(x) = e^{x^3-2x} \cdot (3x^2 - 2)$$

3. Logaritmo compuesto

Calcula la derivada de $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$.

Paso 1: Estructura $\ln(u)$. $u = x^2 + 5x$.

Paso 2: $u' = 2x + 5$.

Paso 3: Aplicar $\frac{u'}{u}$.

$$f'(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

4. Raíz cuadrada compuesta

Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt{7x - x^4}$.

Paso 1: Estructura \sqrt{u} . $u = 7x - x^4$.

Paso 2: $u' = 7 - 4x^3$.

Paso 3: Aplicar $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x) = \frac{7 - 4x^3}{2\sqrt{7x - x^4}}$$

5. Raíz n-ésima compuesta (n=3)

Calcula la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 2x}$.

Paso 1: Estructura $\sqrt[3]{u}$. $u = x^4 + 2x$.

Paso 2: $u' = 4x^3 + 2$.

Paso 3: Aplicar $\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 2}{3\sqrt[3]{(x^4 + 2x)^2}}$$

6. Seno compuesto

Calcula la derivada de $f(x) = \text{sen}(x^2 - 1)$.

Paso 1: Estructura $\text{sen}(u)$. $u = x^2 - 1$.

Paso 2: $u' = 2x$.

Paso 3: Aplicar $\cos(u) \cdot u'$.

$$f'(x) = \cos(x^2 - 1) \cdot (2x) = 2x \cos(x^2 - 1)$$

7. Coseno compuesto

Calcula la derivada de $f(x) = \cos(5x^2 - x)$.

Paso 1: Estructura $\cos(u)$. $u = 5x^2 - x$.

Paso 2: $u' = 10x - 1$.

Paso 3: Aplicar $-\text{sen}(u) \cdot u'$.

$$f'(x) = -\text{sen}(5x^2 - x) \cdot (10x - 1)$$

8. Tangente compuesta

Calcula la derivada de $f(x) = \text{tg}(x^3 + 2x)$.

Paso 1: Estructura $\text{tg}(u)$. $u = x^3 + 2x$.

Paso 2: $u' = 3x^2 + 2$.

Paso 3: Aplicar $\frac{u'}{\cos^2(u)}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{\cos^2(x^3 + 2x)}$$

9. Arcoseno compuesto

Calcula la derivada de $f(x) = \text{arcsen}(2x - 1)$.

Paso 1: Estructura $\text{arcsen}(u)$. $u = 2x - 1$.

Paso 2: $u' = 2$.

Paso 3: Aplicar $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}}$$

10. Arcocoseno compuesto

Calcula la derivada de $f(x) = \text{arccos}(e^x + x)$.

Paso 1: Estructura $\text{arccos}(u)$. $u = e^x + x$.

Paso 2: $u' = e^x + 1$.

Paso 3: Aplicar $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \frac{-(e^x + 1)}{\sqrt{1 - (e^x + x)^2}}$$

11. Arcotangente compuesta

Calcula la derivada de $f(x) = \arctg(x^2 + 1)$.

Paso 1: Estructura $\arctg(u)$. $u = x^2 + 1$.

Paso 2: $u' = 2x$.

Paso 3: Aplicar $\frac{u'}{1+u^2}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2}$$

▼ Sección 9: Derivabilidad y Continuidad

Existe una relación jerárquica fundamental entre estas dos propiedades:

"Si una función es derivable en un punto, entonces ES CONTINUA en ese punto".

El recíproco NO es cierto: una función puede ser continua en un punto y NO ser derivable (ejemplo clásico: $f(x) = |x|$ en $x = 0$, donde tiene un "pico" o punto anguloso).

Procedimiento para estudiar la derivabilidad en un punto a :

1. Estudiar la CONTINUIDAD en a :

- Si NO es continua, NO es derivable. Fin.
- Si ES continua, pasamos al paso 2.

2. Estudiar la DERIVABILIDAD mediante límites laterales:

- Calculamos las derivadas laterales utilizando la definición:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{o } \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) \text{ si } f' \text{ es continua cerca de } a)$$

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{o } \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \text{ si } f' \text{ es continua cerca de } a)$$

- Si $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ existen, son finitas y IGUALES, la función es derivable en a .
- Si son distintas o infinitas, no es derivable (punto anguloso o tangente vertical).

▼ Sección 10: Ejercicios de Derivabilidad (Funciones a trozos)

Ejemplo Logarítmico/Polinómico: Estudiar derivabilidad en $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2x - 1) & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Paso 1: Continuidad en $x=1$

1. $f(1) = \ln(2(1) - 1) = \ln(1) = 0$. Existe $f(1)$.
2. Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x) = 1^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(2x - 1) = \ln(1) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Paso 2: Derivabilidad en $x=1$

Calculamos la función derivada en los entornos abiertos de $x = 1$ usando las reglas de derivación:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x-1} & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x = 1$:

1. Derivada por la izquierda: $f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 2(1) - 1 = 1$.
2. Derivada por la derecha: $f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{2x-1} = \frac{2}{2(1)-1} = 2$.

Conclusión: Como $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = 2$, la función **NO** es derivable en $x = 1$. Presenta un punto anguloso.

Ejemplo Trigonométrico: Estudiar derivabilidad en $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) + x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Paso 1: Continuidad en $x=0$

1. $f(0) = \text{sen}(0) + 0^2 = 0$.

2. Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\text{sen}(x) + x^2) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot e^x) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$f(x)$ es continua en $x = 0$.

Paso 2: Derivabilidad en $x=0$

Calculamos $f'(x)$:

- Para $x < 0$: $f'(x) = \cos(x) + 2x$.
- Para $x > 0$: Aplicando regla del producto:
 $[x \cdot e^x]' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) + 2x & \text{si } x < 0 \\ e^x(1 + x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Derivadas laterales:

1. Derivada izquierda: $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos(x) + 2x) = \cos(0) + 0 = 1$.

2. Derivada derecha: $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x(1 + x) = e^0(1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$.

Conclusión: Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$, la función **ES** derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 1$.