

# Descubriendo el Álgebra: El Poder de las Letras

## ▼ Sección 1: ¿Qué es el lenguaje algebraico?

¡Hola! Hasta ahora, en matemáticas solo usábamos números y operaciones. Pero, ¿qué pasa cuando no conocemos un número? Aquí es donde entra la magia del **Lenguaje Algebraico**.

El lenguaje algebraico es simplemente **el paso de las palabras a letras y números**. Consiste en traducir nuestro idioma habitual a expresiones matemáticas donde usamos letras (como la  $x$ , la  $y$  o la  $a$ ) para representar cantidades desconocidas o que pueden cambiar.

Imagina que tienes una caja cerrada con caramelos. No sabes cuántos hay. En matemáticas, en lugar de decir "los caramelos misteriosos de la caja", simplemente decimos que tenemos  $x$  caramelos. ¡Es un atajo genial!

## ▼ Sección 2: Expresiones Algebraicas

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos por operaciones matemáticas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o potencias).

- **Con una variable:** Expresiones sencillas donde solo hay un valor desconocido.
  - El doble de un número:  $2x$
  - Un número más cinco:  $x + 5$
  - El cuadrado de un número:  $x^2$
- **Con varias variables:** Cuando relacionamos varias cosas distintas.
  - La suma de dos números diferentes:  $a + b$
  - El doble del primer número menos el triple del segundo:  $2a - 3b$
  - El área de un triángulo (base por altura dividido entre dos):  $\frac{b \cdot h}{2}$

### ▼ Sección 3: Valor Numérico

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que obtenemos al sustituir las letras por números concretos y realizar las operaciones indicadas. ¡Es como resolver un puzzle reemplazando piezas!

#### Ejemplos de cálculo de Valor Numérico:

**Ejemplo 1:** Calcula el valor de  $3x - 2y$  cuando  $x = 2$  e  $y = 1$ .

*Sustituimos:*  $3(2) - 2(1) = 6 - 2 = 4$

**Ejemplo 2:** Calcula el valor de  $x^2 + 3y$  cuando  $x = 3$  e  $y = -1$ .

*Sustituimos:*  $3^2 + 3(-1) = 9 - 3 = 6$

**Ejemplo 3:** Calcula el valor de  $5ab - c$  cuando  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = 4$ .

*Sustituimos:*  $5(1)(2) - 4 = 10 - 4 = 6$

**Ejemplo 4:** Calcula el valor de  $-2x + y^2 - z$  cuando  $x = 4$ ,  $y = 3$  y  $z = 1$ .

*Sustituimos:*  $-2(4) + 3^2 - 1 = -8 + 9 - 1 = 0$

**Ejemplo 5:** Calcula el valor de  $\frac{1}{2}m + 4n$  cuando  $m = 10$  y  $n = 2$ .

*Sustituimos:*  $\frac{1}{2}(10) + 4(2) = 5 + 8 = 13$

### ▼ Sección 4: El Monomio

Un **monomio** es la expresión algebraica más simple. Está formado por números y letras unidos **exclusivamente por multiplicación** (y potencias de exponente positivo).

Para que te quede clarísimo, veamos qué ES y qué NO ES un monomio:

Sí son monomios (Todo multiplica)

NO son monomios (Rompen las reglas)

$5x$  (El 5 multiplica a la  $x$ )

$x + 2$  (¡Hay una suma!)

$-3a^2b$  (Hay multiplicación y potencias positivas)

$3x^{-2}$  (¡El exponente es negativo!)

$\frac{3}{4}x^2$  (La fracción es solo un número que multiplica)

$\frac{5}{x}$  (¡Estamos dividiendo entre una letra!)

## ▼ Sección 5: Monomios Semejantes

Dos o más monomios son **semejantes** cuando tienen *exactamente la misma parte literal*. Es decir, tienen que tener las mismas letras y cada letra debe tener el mismo exponente. ¡El coeficiente (el número de delante) no importa, puede ser totalmente diferente!

### Ejemplos con 2 o 3 letras:

1. **¿Son semejantes  $4x^2y$  y  $-7x^2y$ ?**

**Sí.** Ambos tienen exactamente la misma parte literal:  $x^2y$ .

2. **¿Son semejantes  $5abc$  y  $12abc$ ?**

**Sí.** La parte literal en ambos es idéntica:  $abc$ .

3. **¿Son semejantes  $3a^2b$  y  $3ab^2$ ?**

**NO.** Aunque tienen las mismas letras y el mismo coeficiente, en el primero la ' $a$ ' está al cuadrado, y en el segundo es la ' $b$ ' la que está al cuadrado. ¡Tienen que ser idénticos!

4. **¿Son semejantes  $-2xyz^3$  y  $xyz^3$ ?**

**Sí.** La parte literal es  $xyz^3$  en los dos (recuerda que el segundo tiene un 1 invisible como coeficiente).

5. **¿Son semejantes  $8m^2n^3$  y  $6m^3n^2$ ?**

**NO.** Los exponentes están cruzados. El primero tiene  $m^2$  y el segundo  $m^3$ , por lo que su parte literal no es idéntica.

## ▼ Sección 6: Anatomía de un Monomio

Como si fuéramos médicos, vamos a diseccionar un monomio para conocer sus partes usando el ejemplo:  $-5x^2y^3$

- **Coficiente:** Es el número que va delante (¡con su signo!). En nuestro ejemplo es el  $-5$ .
- **Parte Literal:** Son las letras con sus exponentes. En nuestro ejemplo es  $x^2y^3$ .
- **Grado:** Es la suma de los exponentes de todas sus letras. En nuestro ejemplo, sumamos el 2 de la  $x$  y el 3 de la  $y$ . ¡El grado es 5!

*Truco:* Si una letra no tiene exponente escrito, como en  $7x$ , su exponente es un 1 invisible. Así que el grado de  $7x$  es 1.

## ▼ Sección 7: Operaciones con Monomios

### 1. Suma y Resta

¡MUY IMPORTANTE! Solo podemos sumar o restar monomios si son **semejantes**. Dos monomios son semejantes si tienen *exactamente la misma parte literal* (mismas letras con mismos exponentes). Es como sumar peras con peras; no podemos sumar 2 peras con 3 manzanas.

#### Ejemplos de Suma y Resta:

1.  $3xy + 5xy = 8xy$  (Misma parte literal  $xy$ , sumamos coeficientes:  $3 + 5$ ).

2.  $7ab^2 - 2ab^2 = 5ab^2$  (Misma parte literal  $ab^2$ ).

3.  $4x^2y + x^2y - 2x^2y = 3x^2y$  (Recuerda que  $x^2y$  equivale a  $1x^2y$ . Hacemos  $4 + 1 - 2 = 3$ ).

4.  $10mn - 15mn = -5mn$

5. **¡El caso trampa!**:  $5b^2a + 3ba^2$ . ¡Atención! Parecen iguales pero **NO son semejantes**. En el primero la  $b$  está al cuadrado, y en el segundo es la  $a$  la que está al

cuadrado. Esta expresión se queda igual, no se puede simplificar más.

## 2. Producto (Multiplicación)

Aquí no hace falta que sean semejantes. ¡Se multiplica todo!

**Regla:** Multiplicamos coeficiente por coeficiente, y letra por letra (sumando los exponentes si las letras son iguales, por las propiedades de las potencias).

### Ejemplos de Producto:

1.  $2x \cdot 3x = 6x^2$  ( $2 \cdot 3 = 6$ , y  $x^1 \cdot x^1 = x^2$ ).

2.  $-4y^2 \cdot 5y = -20y^3$  (Regla de signos: menos por más, menos).

3.  $3ab \cdot 2a^2b = 6a^3b^2$  (Sumamos los exponentes de la  $a$  por un lado y los de la  $b$  por otro).

4.  $-x^2yz \cdot (-5xy^2) = 5x^3y^3z$  (Menos por menos es más. El 1 invisible del primero multiplica al 5).

5.  $\frac{1}{2}m^3 \cdot 4m^2n = 2m^5n$  ( $\frac{1}{2}$  de 4 es 2. Sumamos exponentes de las  $m$ ).

## 3. División

Igual que en el producto, no necesitan ser semejantes.

**Regla:** Dividimos los coeficientes, y restamos los exponentes de las letras iguales.

### Ejemplos de División:

1.  $10x^3 : 2x = 5x^2$  ( $10 : 2 = 5$ , y a 3 le restamos 1 en el exponente).

2.  $-15y^4 : 3y^2 = -5y^2$

3.  $8a^3b^2 : 4ab = 2a^2b$

4.  $12x^5y^3 : (-2x^2y^3) = -6x^3$  (La  $y$  desaparece porque  $y^{3-3} = y^0 = 1$ ).

$$5. m^4n^2 : m^3n = mn$$

## ▼ Sección 8: Identidad vs Ecuación

Es vital diferenciar entre estos dos conceptos cuando vemos un signo igual (=):

- **Identidad:** Es una igualdad que se cumple **SIEMPRE**, para cualquier valor que le demos a las letras. Es como decir lo mismo de dos formas distintas.
- **Ecuación:** Es una igualdad que solo se cumple para **UNOS POCOS VALORES** específicos (o incluso uno solo). Nuestro objetivo suele ser descubrir ese valor escondido.

### Ejemplos de Identidades:

**Identidad 1:**  $2x + 3x + x = 6x$

Demostración: Si  $x = 2 \implies 2(2) + 3(2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$ . Y el otro lado:  $6(2) = 12$ . ¡Se cumple!

Si  $x = 5 \implies 2(5) + 3(5) + 5 = 10 + 15 + 5 = 30$ . Y el otro lado:  $6(5) = 30$ . ¡Se cumple siempre!

**Identidad 2:**  $5a - 2a + b + 2b = 3a + 3b$

Demostración: Si  $a = 1, b = 2 \implies 5(1) - 2(1) + 2 + 2(2) = 5 - 2 + 2 + 4 = 9$ .  
El otro lado:  $3(1) + 3(2) = 3 + 6 = 9$ . Siempre cuadrará.

### Ejemplos de Ecuaciones:

**Ecuación simple (a ojo):**  $x + 2 = 5$

Es fácil ver mentalmente que el único número que al sumarle 2 da 5 es el 3. Por tanto, la solución es  $x = 3$ . Si pruebas con otro, como  $x = 10$ , te daría  $10 + 2 = 12$ , que no es 5.

**Ecuación compleja:**  $4x - 2 + 5x - 7 = 2x + x + 15$

¡Uy! Aquí ya no podemos adivinar "a ojo" qué valor tiene la  $x$  para que ambos lados pesen lo mismo. Para esto necesitamos aprender el *método de resolución de ecuaciones*.

## ▼ Sección 9: Resolución Paso a Paso

Para resolver una ecuación, imaginamos que es una balanza en equilibrio. Si movemos algo de un lado al otro (transposición de términos), debe cambiar de signo para mantener el equilibrio: lo que suma pasa restando, y lo que multiplica pasa dividiendo.

### Nivel 1: Sin paréntesis ni denominadores

Resuelve:

$$6x + 2 - 2x + 4 = x + 10 + 2x - 1$$

**Paso 1 (Agrupar en cada lado):** Simplificamos los monomios semejantes de la izquierda y los de la derecha por separado.

$$\text{Izquierda: } (6x - 2x) + (2 + 4) \implies 4x + 6$$

$$\text{Derecha: } (x + 2x) + (10 - 1) \implies 3x + 9$$

Nos queda:

$$4x + 6 = 3x + 9$$

**Paso 2 (Transponer términos):** Pasamos todas las 'x' a la izquierda y todos los números a la derecha. Al cruzar el igual, cambian de signo.

$$4x - 3x = 9 - 6$$

**Paso 3 (Resolver):** Hacemos las operaciones finales.

$$1x = 3 \implies x = 3$$

### Nivel 2: Con paréntesis

Resuelve:

$$2(x - 3) + 4x - 1 = 3(2x + 1) - (x - 2)$$

**Paso 1 (Quitar paréntesis):** El número de fuera multiplica a **todo** lo de dentro. ¡Cuidado con el signo menos delante de un paréntesis, cambia todos los signos de dentro!

$$2x - 6 + 4x - 1 = 6x + 3 - x + 2$$

**Paso 2 (Agrupar en cada lado):**

Izquierda:  $6x - 7$

Derecha:  $5x + 5$

Nos queda:

$$6x - 7 = 5x + 5$$

**Paso 3 (Transponer términos):** Las 'x' a un lado, los números al otro.

$$6x - 5x = 5 + 7$$

**Paso 4 (Resolver):**

$$x = 12$$

### Nivel 3: Con denominadores

Resuelve:

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{x}{6} + 6$$

**Paso 1 (Buscar el m.c.m.):** Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores (2, 3, 6). El m.c.m. es 6.

**Paso 2 (Poner el denominador común):** Dividimos el m.c.m. entre el denominador antiguo y lo multiplicamos por el numerador de arriba. (El 6 final es como si tuviera un 1 debajo).

$$\frac{3x}{6} + \frac{2 \cdot 2x}{6} = \frac{1x}{6} + \frac{6 \cdot 6}{6}$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{4x}{6} = \frac{x}{6} + \frac{36}{6}$$

**Paso 3 (Tachar denominadores):** Como toda la ecuación está dividida entre 6, podemos eliminar los denominadores.

$$3x + 4x = x + 36$$

**Paso 4 (Agrupar y transponer):**

$$7x = x + 36$$

$$7x - x = 36$$

$$6x = 36$$

**Paso 5 (Despejar final):** El 6 que multiplica a la  $x$  pasa dividiendo.

$$x = \frac{36}{6} \implies x = 6$$

#### **Nivel 4: Ecuación sin solución (¡Un caso especial!)**

Resuelve:

$$2(x + 3) = 2x + 10$$

**Paso 1 (Quitar paréntesis):**

$$2x + 6 = 2x + 10$$

**Paso 2 (Transponer términos):** Las letras a un lado, los números al otro.

$$2x - 2x = 10 - 6$$

**Paso 3 (Resolver):**

$$0 = 4$$

**¡Atención!** Hemos llegado a una afirmación falsa (0 no es igual a 4). Esto significa que la ecuación original es un absurdo matemático. Por tanto, **esta ecuación no tiene solución.**

#### **Nivel 5: Ecuación con infinitas soluciones (¡Otro caso especial!)**

Resuelve:

$$3(x - 1) + 3 = 3x$$

**Paso 1 (Quitar paréntesis):**

$$3x - 3 + 3 = 3x$$

**Paso 2 (Agrupar en el lado izquierdo):**

$$3x = 3x$$

**Paso 3 (Transponer términos):**

$$3x - 3x = 0$$

**Paso 4 (Resolver):**

$$0 = 0$$

**¡Atención!** Hemos llegado a una afirmación que es **siempre verdad** (0 siempre es igual a 0). Esto significa que cualquier número que pongas en la 'x' funcionará. Esta ecuación tiene **infinitas soluciones** (¡en realidad, era una identidad disfrazada!).

## ▼ Sección 10: Resolución de Problemas

Resolver problemas es el objetivo final. Los pasos siempre son: **1.** Definir quién es  $x$ . **2.** Traducir el enunciado a una ecuación. **3.** Resolver. **4.** Dar la respuesta con palabras.

### Nivel Fácil

*Enunciado:* El doble de un número más cinco es igual a 17. ¿Cuál es ese número?

**1. Identificar  $x$ :** Sea  $x$  el número que buscamos.

**2. Traducir (Ecuación):** El doble del número ( $2x$ ) más cinco (+5) es igual a 17 (= 17).

$$2x + 5 = 17$$

**3. Resolver despacito:**

Pasamos el 5 restando:  $2x = 17 - 5$

$$2x = 12$$

El 2 pasa dividiendo:  $x = \frac{12}{2} = 6$

**4. Solución:** El número misterioso es el 6.

## Nivel Medio

*Enunciado:* La suma de tres números enteros consecutivos es 45. ¿Cuáles son esos números?

**1. Identificar  $x$ :** Si  $x$  es el primer número, el siguiente será un número más grande ( $x + 1$ ), y el siguiente será dos números más grande ( $x + 2$ ).

**2. Traducir (Ecuación):** Sumamos los tres y lo igualamos a 45.

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 45$$

**3. Resolver despacito:**

Quitamos paréntesis (son sumas, no afectan):  $x + x + 1 + x + 2 = 45$

Agrupamos letras y números:  $3x + 3 = 45$

Pasamos el 3 restando:  $3x = 45 - 3$

$$3x = 42$$

El 3 pasa dividiendo:  $x = \frac{42}{3} = 14$

**4. Solución:** El primer número es 14. Los consecutivos son 15 y 16. (Comprobación:  $14 + 15 + 16 = 45$ . ¡Correcto!).

## Nivel Difícil

*Enunciado:* En una granja hay gallinas y cerdos. En total hay 20 cabezas y 56 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos hay?

**1. Identificar  $x$ :** Sea  $x$  el número de gallinas. Como hay 20 animales en total (20 cabezas), los cerdos serán el resto:  $(20 - x)$  cerdos.

**2. Traducir (Ecuación):** Hablamos de las patas. Las gallinas tienen 2 patas, aportan  $2x$  patas. Los cerdos tienen 4 patas, aportan  $4(20 - x)$  patas. En total hay 56 patas.

$$2x + 4(20 - x) = 56$$

**3. Resolver despacito:**

Multiplicamos para quitar el paréntesis:  $2x + 80 - 4x = 56$

Agrupamos las  $x$ :  $-2x + 80 = 56$

Pasamos el 80 restando:  $-2x = 56 - 80$

$$-2x = -24$$

Pasamos el -2 dividiendo (¡sin cambiar su signo!):  $x = \frac{-24}{-2} = 12$

**4. Solución:**  $x$  era el número de gallinas, así que hay 12 gallinas. Los cerdos son  $20 - 12 = 8$  cerdos. (Comprobación:  $12 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 24 + 32 = 56$  patas. ¡Perfecto!).