

## Capítulo 3

# Estadística unidimensional y distribuciones de probabilidad.

## Distribuciones $B(n,p)$ , $N(0,1)$ , y $N(\mu,\sigma)$ .

*“La estadística es la ciencia en la cual si tienes la cabeza dentro de un horno ardiente, y los pies dentro de una nevera gélida, estás a temperatura media ideal”.*

(Bernard Shaw)

Este tema es muy curioso. Realmente como tal no forma parte de los contenidos de la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, y por ello tampoco de esta optativa de estadística, ahora bien, es imposible comprender la parte de estadística sin saber qué es una  $N(0,1)$ , y es imposible saber qué es una  $N(0,1)$  sin saber qué significa la media y la desviación típica. Es más, algunas preguntas sueltas de problemas PAU sí usan conceptos como la tipificación de distribuciones normales, cálculo de percentiles o de la desviación típica, por lo que estos no son unos contenidos que debamos obviar. A ver qué son la media y la desviación típica de una variable aleatoria, dígame estadística, así a cómo calcularlas se dedica la primera parte del tema.

Vayamos con la segunda parte, que en un principio está relacionada con la primera (usa los conceptos de media y desviación típica), pero que tiene su propio enfoque. Si en el tema anterior hemos visto el concepto de probabilidad, y cuál es la probabilidad de un suceso; por ejemplo, la probabilidad de lanzar un dados y que salga el  $\{4\}$  es igual a  $1/6$ , imaginemos que ahora no calculamos la probabilidad de un sólo suceso de un experimento aleatorio, sino la de todos ellos, por ejemplo, si lanzamos dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que salga  $\{2\}$ ? ¿y la del  $\{3\}$ ? Así hasta la del  $\{12\}$ . Esta es la idea de distribución de probabilidad; considerar todos los posibles sucesos y sus respectivas probabilidades teóricas (no lo que salga a posteriori, sino lo que debería salir a priori), y hacer algún tipo de estudio del experimento aleatorio en su conjunto.

De hecho, podemos considerar una distribución de probabilidad como una variable estadística que consta de los diferentes sucesos ( $x_i$ ) y de sus probabilidades ( $f_i$ ). Entonces tendría sentido calcular la media, varianza y desviación típica del experimento aleatorio. La media de la distribución de probabilidad sería el valor que debería salir más.

Dentro de las distribuciones de probabilidad vamos a considerar especialmente dos; la binomial y la normal. La primera de ellas, binomial  $B(n,p)$ , se corresponde a la distribución de probabilidad de un experimento aleatorio sencillo y discreto con probabilidad  $p$  de éxito y  $1-p$  de fracaso que se repite  $n$  veces, cada una independiente de la anterior, y se considera el número total de veces que sale éxito. Es cierto que la binomial es más rara que tenga cabida en algún ejercicio de este bloque, pero entiendo que es interesante su inclusión, aunque sólo sea por poder ver la aproximación de una binomial por una normal (apartado 3.13).

Respecto la normal, distribución de probabilidad continua que se caracteriza por tener una gráfica en forma de campana de Gauss, que se ajusta a muchos sucesos de la vida real, primero consideraremos la más sencilla, la  $Z = N(0,1)$ , de la que daremos una tabla para calcularla. Como hay infinitas distribuciones normales, aprenderemos a pasar cualquier distribución normal  $N(\mu,\sigma)$  a una  $N(0,1)$  (que está tabulada), proceso que llamaremos *tipificación* (apartado ??). Para concluir el tema, aprenderemos a aproximar determinadas distribuciones binomiales por distribuciones normales (muy útiles al estar tabuladas).

En este tema, al hablar de las distribuciones de probabilidad normal, recuperaremos conceptos como los cuantiles, y calcularemos intervalos característicos, o en qué intervalos se agrupa el núcleo central de probabilidad.

Como conclusión, este es un tema muy práctico de herramientas para el último tema del curso, pero herramientas que tienen su importancia para comprenderlo todo o porque directamente nos las puedan preguntar. La mejor de las herramientas que trae es el manejo de la distribución Normal



## Parte I

# Estadística unidimensional.



## 3.1. Introducción

### 3.1.1. Definición de la Estadística.

La<sup>1</sup> estadística es una rama de la matemática que se refiere a la recolección, análisis e interpretación de los datos obtenidos en un estudio. Es aplicable a una amplia variedad de disciplinas, desde la física hasta las ciencias sociales, ciencias de la salud como la Psicología y la Medicina, y usada en la toma de decisiones en áreas de negocios e instituciones gubernamentales. Se puede decir que la Estadística se divide en dos ramas:

**La estadística descriptiva**, que se dedica a los métodos de recolección, descripción, visualización y resumen de originados a partir de los fenómenos en estudio. Los datos pueden ser resumidos numéricamente o gráficamente. Ejemplos básicos de descriptores numéricos son: la media y la desviación estándar. Resúmenes gráficos incluyen varios tipos de figuras y gráficos.

**La inferencia estadística**, que se dedica a la generación de los modelos, inferencias y predicciones asociadas a los fenómenos en cuestión teniendo en cuenta lo aleatorio e incertidumbre en las observaciones. Se usa para modelar patrones en los datos y extraer inferencias acerca de la población de estudio. Estas inferencias pueden tomar la forma de respuestas a preguntas si/no (prueba de hipótesis), estimaciones de características numéricas (estimación), pronósticos de futuras observaciones, descripciones de asociación (correlación) o modelamiento de relaciones entre variables (análisis de regresión). Otras técnicas de modelamiento incluyen ANOVA, series de tiempo y minería de datos.

Ambas ramas (descriptiva e inferencial) comprenden la estadística aplicada. Hay también una disciplina llamada estadística matemática, la cual se refiere a las bases teóricas de la materia. La palabra estadísticas también se refiere al resultado de aplicar un algoritmo estadístico a un conjunto de datos, como en estadísticas económicas, estadísticas criminales, etc.

### 3.1.2. Etimología de la palabra estadística

La palabra ‘estadística’ procede del latín *statisticum collegium* (consejo de Estado) y de su derivado italiano *statista* (‘hombre de Estado’ o ‘político’). El término alemán *Statistik*, que fue primeramente introducido por Gottfried Achenwall (1749), designaba originalmente el análisis de datos del Estado, es decir, ‘la ciencia del Estado’ (también llamada ‘aritmética política’ de su traducción directa del inglés). No fue hasta el siglo XIX cuando el término estadística adquirió el significado de recolectar y clasificar datos. Este concepto fue introducido por el inglés John Sinclair.

En su origen, por tanto, la estadística estuvo asociada a datos, a ser utilizados por el gobierno y cuerpos administrativos (a menudo centralizados). La colección de datos acerca de estados y localidades continúa ampliamente a través de los servicios de estadística nacionales e internacionales. En particular, los censos suministran información regular acerca de la población.

Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadística, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales o ciertas cosas. Hacia el año 3000 a. C. los babilónicos usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos en tablas sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides en el siglo XI a. C. Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen, en algunas partes, trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo describe el bienestar material de las diversas tribus judías. En China existían registros numéricos similares con anterioridad al año 2000 a. C. Los griegos clásicos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el 594 a. C. para cobrar impuestos.

<sup>1</sup>El presente punto ha sido extraído de [www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com)

### 3.1.3. Orígenes de la probabilidad.

Los métodos estadístico matemáticos emergieron desde la teoría de probabilidad, la cual data desde la correspondencia ciertamente entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal (1654). Christian Huygens (1657) da el primer tratamiento científico que se conoce a la materia. El *Ars Conjectandi* (póstumo, 1713) de Jakob Bernoulli y la *Doctrina de Posibilidades* (1718) de Abraham de Moivre estudiaron la materia como una rama de las matemáticas. En la era moderna, el trabajo de Kolmogórov ha sido un pilar en la formulación del modelo fundamental de la Teoría de Probabilidades, el cual es usado a través de la estadística.

La teoría de errores se puede remontar a la *Opera Miscellanea* (póstuma, 1722) de Roger Cotes y al trabajo preparado por Thomas Simpson en 1755 (impreso en 1756) el cual aplica por primera vez la teoría de la discusión de errores de observación. La reimpresión (1757) de este trabajo incluye el axioma de que errores positivos y negativos son igualmente probables y que hay unos ciertos límites asignables dentro de los cuales se encuentran todos los errores; se describen errores continuos y una curva de probabilidad.

Pierre-Simon Laplace (1774) hace el primer intento de deducir una regla para la combinación de observaciones desde los principios de la teoría de probabilidades. Laplace representó la ley de probabilidades de errores mediante una curva y dedujo una fórmula para la media de tres observaciones. También, en 1871, obtiene la fórmula para la ley de facilidad del error (término introducido por Lagrange, 1744) pero con ecuaciones inmanejables. Daniel Bernoulli (1778) introduce el principio del máximo producto de las probabilidades de un sistema de errores concurrentes.

El método de mínimos cuadrados, el cual fue usado para minimizar los errores en mediciones, fue publicado independientemente por Adrien-Marie Legendre (1805), Robert Adrain (1808), y Carl Friedrich Gauss (1809). Gauss había usado el método en su famosa predicción de la localización del planeta enano Ceres en 1801. Pruebas adicionales fueron escritas por Laplace (1810, 1812), Gauss (1823), James Ivory (1825, 1826), Hagen (1837), Friedrich Bessel (1838), W.F. Donkin (1844, 1856), John Herschel (1850) y Morgan Crofton (1870). Otros contribuidores fueron Ellis (1844), Augustus De Morgan (1864), Glaisher (1872) y Giovanni Schiaparelli (1875). La fórmula de Peters para  $r$ , el probable error de una observación simple es bien conocido.

El siglo XIX incluye autores como Laplace, Silvestre Lacroix (1816), Littrow (1833), Richard Dedekind (1860), Helmert (1872), Hermann Laurent (1873), Liagre, Didion y Karl Pearson. Augustus De Morgan y George Boole mejoraron la presentación de la teoría. Adolphe Quetelet (1796-1874), fue otro importante fundador de la estadística y quien introdujo la noción del ‘hombre promedio’ (*l’homme moyen*) como un medio de entender los fenómenos sociales complejos tales como tasas de criminalidad, tasas de matrimonio o tasas de suicidios.

### 3.1.4. La estadística en la actualidad.

Durante el siglo XX, la creación de instrumentos precisos para asuntos de salud pública (epidemiología, bioestadística, etc.) y propósitos económicos y sociales (tasa de desempleo, econometría, etc.) necesitó de avances sustanciales en las prácticas estadísticas.

Hoy el uso de la estadística se ha extendido más allá de sus orígenes como un servicio al Estado o al gobierno. Personas y organizaciones usan la estadística para entender datos y tomar decisiones en ciencias naturales y sociales, medicina, negocios y otras áreas. La estadística es entendida generalmente no como un sub-área de las matemáticas sino como una ciencia diferente ‘aliada’. Muchas universidades tienen departamentos académicos de matemáticas y estadística separadamente. La estadística se enseña en departamentos tan diversos como psicología, educación y salud pública.

## 3.2. Variables estadísticas

### 3.2.1. Conceptos previos

La estadística es la rama de las matemáticas que se ocupa de recoger, organizar y analizar grandes cantidades de datos para estudiar el comportamiento de un conjunto de elementos llamado **población** o **universo**. A cada uno de dichos elementos se le llama **individuo** o **unidad estadística**. Al número de los elementos de la población se le llama **tamaño de la población**.

Cuando una población es de pequeño tamaño, se puede estudiar el comportamiento de todos y cada uno de sus individuos, recogiendo toda la información en gráficas, tablas y parámetros estadísticos. A esto se le llama **Estadística descriptiva**.

Pero cuando el tamaño de la población es grande, es imposible estudiar a todos sus individuos, por lo que se elige una parte de ella, llamada **muestra**, que será estudiada mediante estadística descriptiva, para finalmente inducir, con cierto margen de error, el comportamiento de la población completa a partir del comportamiento de dicha muestra. A esto se le llama **estadística inferencial**.

Por otra, para realizar un estudio estadístico de una población o muestra se necesita saber qué se pretende conocer de ella, para lo cual se determina en ella una propiedad que será estudiada en cada uno de sus individuos, propiedad que se llama **carácter estadístico**, cada una de cuyas posibles presentaciones se llama **modalidad**.

### 3.2.2. Tipos de caracteres

Básicamente hay dos tipos de caracteres, o aquellas propiedades que vamos a estudiar en cada uno de los individuos de una población, los de tipo cualitativo y los de tipo cuantitativo, que a su vez se dividen en los subtipos discreto y continuo.

**caracteres cualitativos** son aquellos cuyas modalidades no se pueden medir ni contar directamente, por ejemplo el color de ojos, cuyas modalidades son azul, verde, negro y marrón. Ciertamente se podría afinar más, estableciendo tonos, pero los colores en sí, no son números.

**caracteres cuantitativos** son aquellos cuyas modalidades sí se pueden medir o contar. En este caso, los caracteres se llaman **variables estadísticas** o V.E., y a cada una de sus modalidades se le llama **valor**. A su vez, las variables estadísticas pueden ser de dos tipos:

**Discretas**, o cuando sus modalidades toman valores en un conjunto numerable (usualmente los números naturales). Por ejemplo, la edad en años de los alumnos de esta clase puede ser 15, 16, 17, 18 ó 19.

**Continuas**, o cuando sus modalidades toman valores en un conjunto no numerable (que se puede agrupar en intervalos de números reales). Por ejemplo, la altura de los alumnos de esta clase puede estar en los intervalos  $[120,140)$ ,  $[140,160)$ ,  $[160,180)$  y  $[180,200)$ .

**Ejercicio 3.1** Clasificar los siguientes caracteres:

- Nacionalidad
- Color de pelo
- Nota de un examen de matemáticas
- Nota del curso de matemáticas
- Preferencias deportivas
- Estado civil
- Número de vecinos de tu edificio
- Tiempo que ves la tele

- Domicilio de los alumnos del instituto
- Contenido de una botella de agua
- Edades de los empleados de una fábrica
- Edades, en años, de los empleados de una fábrica

**Nota 3.1** Aunque no directamente, los caracteres cualitativos también son medibles, y sobre ellos también podrían efectuarse estudios estadísticos, aunque son algo más difíciles que tratar que los caracteres que pertenecen a una V.E. continua o una V.E. discreta. La diferencia entre estas dos últimas es que las modalidades de las discretas son concretas y puntuales, mientras las de la continua se prestan a ser establecidas en intervalos.

### 3.3. Tablas estadísticas.

La idea es la siguiente, supongamos que tenemos los datos procedentes de una V.E., por ejemplo las edades en años de los alumnos de esta clase, veamos de qué forma estructurar dicha información de modo que sea posible manejarla en un futuro.

**Definición 3.1 (Frecuencia absoluta;)** se llama *frecuencia absoluta de un valor o modalidad  $x_i$  de una variable estadística o V.E. al número de individuos de la población que presentan dicho valor. Se representa por  $f_i$ .*

**Nota 3.2** La suma de frecuencias absolutas de todos los valores de una población es igual al tamaño  $N$  de la población:

$$\sum f_i = N$$

**Definición 3.2 (Frecuencia relativa;)** se llama *frecuencia relativa de un valor  $x_i$  de una V.E. a la proporción de individuos de la población que presentan dicho valor, es decir, el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la población, representándose por  $h_i$ .*

$$h_i = \frac{f_i}{N}$$

**Nota 3.3** Se cumple que la suma de frecuencias relativas de todos los valores de una población es igual a 1:

$$\sum h_i = \sum \frac{f_i}{N} = \frac{\sum f_i}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

**Definición 3.3 (Frecuencia acumulada absoluta;)** se llama *frecuencia acumulada absoluta de un valor  $x_i$  de una V.E. a la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores anteriores a dicho valor, incluido él. Se representa por  $F_i$ .*

$$F_i = \sum_{x_j \leq x_i} f_j$$

**Definición 3.4 (Frecuencia acumulada relativa;)** se llama *frecuencia acumulada relativa de un valor  $x_i$  de una V.E. a la suma de las frecuencias relativas de todos los valores anteriores a dicho valor, incluido él. Se representa por  $H_i$ .*

$$H_i = \sum_{x_j \leq x_i} h_j$$

**Nota 3.4** Igualmente podrían definirse las frecuencias absolutas y relativas, sólo simples, de cada modalidad de un carácter cualitativo, si bien de alguna forma habría que asignar números a las diferentes *tonalidades* de dicho carácter.

**Definición 3.5 (Tabla estadística;)** una tabla estadística es un conjunto de columnas en las que se representan los valores de una variable estadística y sus frecuencias. En una primera columna se representan los valores de la variable, y en las sucesivas las frecuencias absolutas, relativas, absolutas acumuladas y relativas acumuladas.

**Nota 3.5** En caso de V.E. continuas, en una primera columna se colocan los intervalos de valores donde se engloban éstos, a continuación una columna con los puntos medios de cada intervalo, llamados **marcas de clase**, luego otra con la amplitud de cada intervalo, otras 4 con las distintas frecuencias, y una última llamada de **densidad de clase**, que es el cociente entre las frecuencias absolutas y la amplitud de clase.

**Nota 3.6** Análogamente, se pueden definir tablas estadísticas de caracteres cualitativos, pero sin las frecuencias acumuladas, pues carecen de sentido.

**Ejemplo 3.1** Como ejemplo de tabla estadística de caracteres cualitativos, representar la situación de una clase de primero de bachillerato que posee 3 alumnos de ojos azules, 2 con ojos verdes, 15 con ojos marrones, y finalmente 6 con ojos negros.

COLOR DE OJOS	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
azul	3	?	3/26	?
verde	2	?	2/26	?
marrón	15	?	15/26	?
negros	6	?	6/26	?
	26		1	

**Ejemplo 3.2** Como ejemplo de tabla estadística de variable aleatoria discreta, representar la situación de una clase de primero de bachillerato en la que sus alumnos poseen el siguiente número de hermanos: 0, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 3, 5, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 1, 3, 2.

Nº HNOS $x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	7	7	7/26	7/26
1	7	14	7/26	14/26
2	9	23	9/26	23/26
3	2	25	2/26	25/26
5	1	26	1/26	26/26
	26		1	

**Ejemplo 3.3** Como ejemplo de tabla estadística de variable aleatoria continua, representar la situación de una clase de primero de bachillerato en la que 5 de sus alumnos miden entre 155 y 165cm, 12 alumnos miden entre 165 y 175cm, 8 alumnos miden entre 175 y 185cm, y 1 alumno mide entre 185 y 195cm.

ALTURA $[x_i, x_{i+1})$	MARCA DE CLASE $m_i$	AMPLITUD $a_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	DENSIDAD $d_i$
[155,165)	160	10	5	5	5/26	5/26	5/10 = 0'5
[165,175)	170	10	12	17	12/26	17/26	12/10 = 1'2
[175,185)	180	10	8	25	8/26	25/26	8/10 = 0'8
[185,195)	190	10	1	26	1/26	26/26	1/10 = 0'1
			26		1		

En muchos estudios estadísticos relacionados con V.E. Discretas en los que aparecen un gran número de valores, estos suelen agruparse en intervalos (esto es, se hacen funcionar como continuas) para facilitar su tabulación y facilitar su posterior estudio. En estos casos veamos cómo se calcula el número de intervalos a tomar, así como su amplitud:

**número de intervalos;** se toma  $n \simeq \sqrt{N}$ , siendo  $N$  el tamaño de la población. en caso de no dar exacto, se toma la aproximación por exceso.

**amplitud de intervalos;** se toma  $a \simeq \frac{\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}}{n}$ , siendo de nuevo la aproximación por exceso.

**primer elemento de los intervalos;** se tomará como primer elemento valor mínimo  $- K$ , donde  $K = \frac{n \cdot a - (\text{valor máximo} - \text{valor mínimo})}{2}$ . Si  $K$  no sale entero, se deja tal cual, no aproximándose por exceso.

**Ejemplo 3.4** El peso de los 40 alumnos de primero de bachillerato de un instituto, son: 60, 60, 65, 55, 63, 48, 55, 58, 67, 65,, 56, 57, 67, 63, 67, 52, 76, 74, 65, 50,, 50, 59, 54, 52, 56, 57, 58, 49, 50, 50,, 61, 59, 58, 65, 49, 52, 77, 52, 58, 68. Determinar  $n$ ,  $a$ ,  $K$ , y construir la tabla de frecuencias.

Lo primero que hacemos es localizar los valores mínimo (48), y máximo (77), teniendo en cuenta que hay  $N = 40$  valores, los resultados salen en seguida:

- $n \simeq \sqrt{40} = 6'32 \dots$ , luego tomamos  $n = 7$ .
- $a \simeq \frac{77 - 48}{7} = \frac{29}{7} = 4'14 \dots$ , luego tomamos  $a = 5$ .
- $K = \frac{na - (77 - 48)}{2} = \frac{35 - 29}{2} = \frac{6}{2} = 3$ , luego comenzamos por valor mínimo  $- K = 48 - 3 = 45$

Por ello, los intervalos óptimos para este problema son  $[45, 50)$ ,  $[50, 55)$ ,  $[55, 60)$ ,  $[60, 65)$ ,  $[65, 70)$ ,  $[70, 75)$  y  $[75, 80]$ , y la tabla de frecuencias es:

Peso en intervalos $[x_i, x_{i+1})$	Marca de clase $m_i$	Amplitud $a_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	Densidad $d_i$
[45, 50)	47'5	5	3	3	0'075	0'75	3/5
[50, 55)	52'5	5	9	12	0'225	0'3	9/5
[55, 60)	57'5	5	12	24	0'3	0'6	12/5
[60, 65)	62'5	5	5	29	0'125	0'725	5/5
[65, 70)	67'5	5	8	37	0'2	0'925	8/5
[70, 75)	72'5	5	1	38	0'1	0'95	1/5
[75, 80]	77'5	5	2	40	0'05	1	2/5
			40		1		

**Ejemplo 3.5** Realizar la tabla de frecuencias de una clase de primero de bachillerato en la que hay 8 chicos y 18 chicas.

Sexo	$f_i$	$h_i$
Chico	8	8/26=0'31
Chica	18	18/26=0'69
	26	1

Como se ve, en este ejemplo no tenía sentido usar las frecuencias acumuladas, al ser la variable 'sexo' de carácter cualitativo, y por ello la tabla es más pequeña.

**Ejemplo 3.6** Realizar la tabla de frecuencias de un conjunto de 100 matrimonios que tenían el siguiente número de hijos; 2, 2, 0, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 3,, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2,, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 5, 2, 4, 1,, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3,, 3, 1, 5, 2, 0, 2, 4, 3, 2, 5,, 1, 2, 1, 3, 4, 1, 2, 3, 3, 2,, 1, 2, 2, 1, 3, 5, 2, 2, 2, 3,, 2, 3, 2, 2, 4, 3, 2, 1, 0, 0,, 4, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 2, 2,, 3, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 3, 1, 4.

Nº de hijos $x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	4	4	0'04	0'04
1	16	20	0'16	0'20
2	36	56	0'36	0'56
3	30	86	0'30	0'86
4	10	96	0'10	0'96
5	4	100	0'04	1
	100		1	

**Ejemplo 3.7** Las edades de los 40 pacientes de un logopeda vienen recogidas en la siguiente tabla. Elaborar la oportuna tabla estadística de frecuencias:

Menos de 5 años	Entre 5 y 12	Entre 12 y 18	Entre 18 y 25	Entre 25 y 35 años
13	11	8	3	5

Pues la citada tabla de frecuencias es:

Edades $[x_i, x_{i+1})$	Marca de clase $m_i$	Amplitud $a_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	Densidad $d_i$
[0, 5)	2'5	5	13	13	13/40	13/40	13/5
[5, 13)	9	8	11	24	11/40	24/40	11/8
[13, 19)	16	6	8	32	8/40	32/40	8/6
[19, 26)	22'5	7	3	35	3/40	35/40	3/7
[26, 35)	30'5	9	5	40	4/40	1	5/9
			40		1		

**Ejemplo 3.8** Las puntuaciones, en escala de 0 a 100, de 30 personas en un test psicotécnico, son: 69, 58, 54, 40, 71, 61, 57, 52, 64, 56, 52, 61, 54, 50, 63, 55, 51, 30, 70, 60, 54, 58, 54, 47, 63, 69, 58, 54, 49, 70. Calcular la tabla de frecuencias, tras agrupar los valores en intervalos óptimos.

Lo primero que hacemos es localizar los valores mínimo (30), y máximo (71), teniendo en cuenta que hay 30 valores, los resultados salen en seguida:

- $n \simeq \sqrt{30} = 5'47 \dots$ , luego tomamos  $n = 6$ .
- $a \simeq \frac{71 - 30}{6} = 6'83 \dots$ , luego tomamos  $a = 7$ .
- $K = \frac{na - (71 - 30)}{2} = \frac{42 - 41}{2} = \frac{1}{2} = 0'5$ , luego comenzamos por valor mínimo  $-K = 30 - 0'5 = 29'5$

Por ello, los intervalos óptimos para este problema son  $[29'5, 36'5)$ ,  $[36'5, 43'5)$ ,  $[43'5, 50'5)$ ,  $[50'5, 57'5)$ ,  $[57'5, 64'5)$ ,  $[64'5, 71'5)$ , y la tabla de frecuencias es:

Puntuaciones $[x_i, x_{i+1})$	Marca de clase $m_i$	Amplitud $a_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	Densidad $d_i$
[29'5, 36'5)	33	7	1	1	1/30	1/30	1/7
[36'5, 43'5)	40	7	1	2	1/30	2/30	1/7
[43'5, 50'5)	47	7	3	5	3/30	5/30	3/7
[50'5, 57'5)	54	7	11	16	11/30	16/30	11/7
[57'5, 64'5)	61	7	9	25	9/30	25/30	9/7
[64'5, 71'5)	68	7	5	30	5/30	30/30	5/7
			30		1		

### 3.4. Gráficas estadísticas

El siguiente paso, tras haber tabulado los datos de un estudio estadístico, será proceder a su síntesis mediante unas gráficas estadísticas, que recogerán visualmente toda la información posible, y que se basan en la proporcionalidad entre sus áreas y las frecuencias correspondientes. Existen varios tipos de gráficas, dependiendo del carácter que se estudia:

**para caracteres cualitativos;** diagrama de barras, diagrama de sectores y pictograma.

**para variables estadísticas discretas;** diagrama de barras, diagrama de sectores, pictograma, diagrama de frecuencias y diagrama de frecuencias acumuladas.

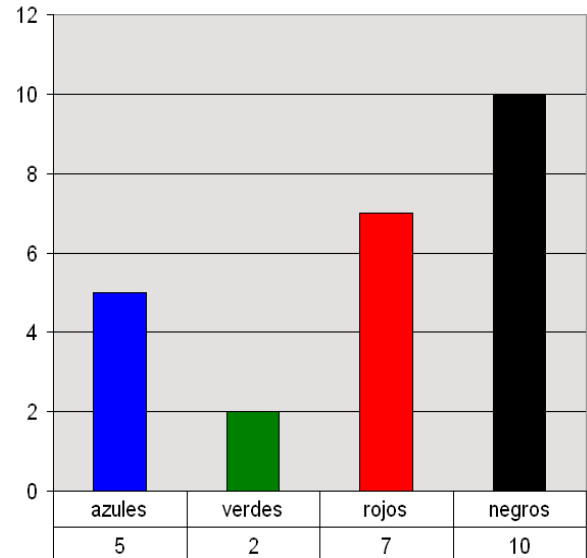
**para variables estadísticas continuas;** histograma, diagrama de sectores, pictograma, diagrama de frecuencias y diagrama de frecuencias acumuladas.

A continuación vamos a ver cómo se construye cada uno de estos gráficos, considerando para ello un primer ejemplo con una variable cualitativa que habla del número de bolígrafos de color que tiene un alumno de este clase; 5 de color azul, 2 de color verde, 7 de color rojo, y 10 de color negro:

### 3.4.1. Diagrama de barras

En unos ejes cartesianos se representan, en el eje de abscisas las modalidades del carácter, y en el eje de ordenadas, las frecuencias absolutas o relativas. A continuación, por los puntos del eje de abscisas se levantan barras de igual anchura y cuya altura sea igual a las frecuencias correspondientes. así se mantiene la proporcionalidad entre el área de las barras y las correspondientes frecuencias.

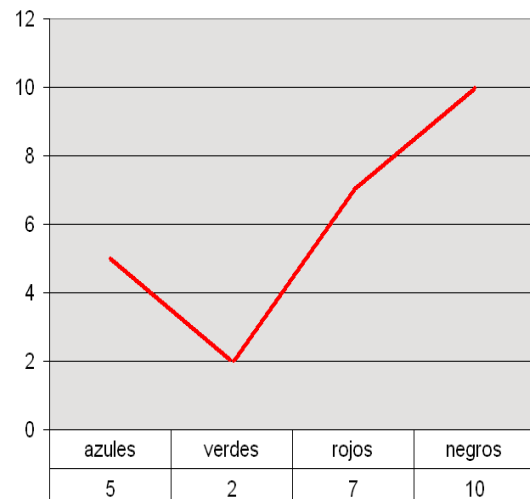
En el caso de las variables estadísticas continuas, este diagrama tiene unas modificaciones, y es que las barras quedan unidas lateralmente, y su anchura es igual a la amplitud de clases, y su altura es igual a la densidad de clases<sup>2</sup>, así, se mantiene la proporcionalidad entre el área de las barras y la frecuencia correspondiente. En este caso, la gráfica se llama histograma.



### 3.4.2. Polígonos de frecuencias

En el caso de V.E. se puede representar el polígono de frecuencias y el polígono de frecuencias acumuladas. Para ello se unen los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos formados en el diagrama de barras o histograma, habiendo usado las frecuencias absolutas, absolutas acumuladas, relativas o relativas acumuladas. En el caso de V.E., el polígono de acumuladas sería estrictamente creciente.

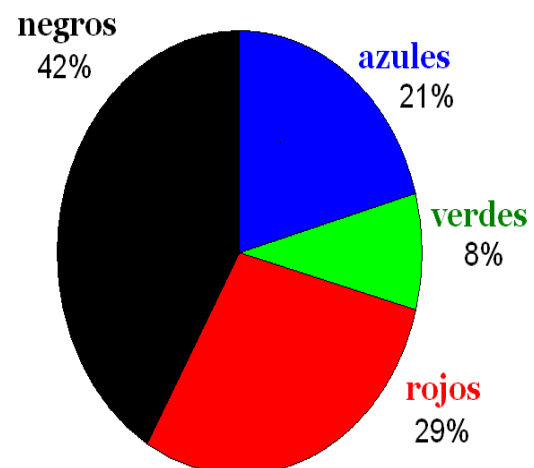
En este ejemplo, al tratarse de caracteres cualitativos, no tiene sentido usar frecuencias acumuladas.



### 3.4.3. Diagrama de sectores

En un círculo se representan las distintas modalidades de un carácter mediante sectores circulares, cuyo ángulo central será proporcional a la frecuencia absoluta, así, el área del sector circular será proporcional a la frecuencia correspondiente.

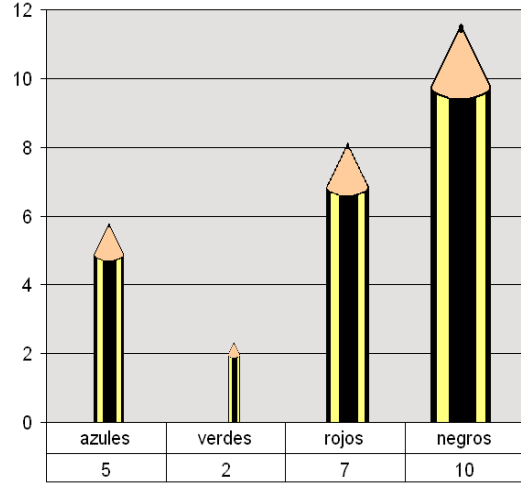
Es frecuente representar también el porcentaje de cada sector circular respecto el total. Igualmente podemos encontrarlos también gráficos más elaborados en tres dimensiones, u otros en los que los sectores están separados entre sí.



### 3.4.4. Pictograma

Son dibujos alusivos a la distribución que se está estudiando y cuyo tamaño o número de repeticiones es proporcional a la frecuencia correspondiente. En este caso, las superficies de los dibujos son proporcionales a las frecuencias absolutas, representándose cada caso con un sólo dibujo, resultando un gráfico muy parecido al diagrama de barras.

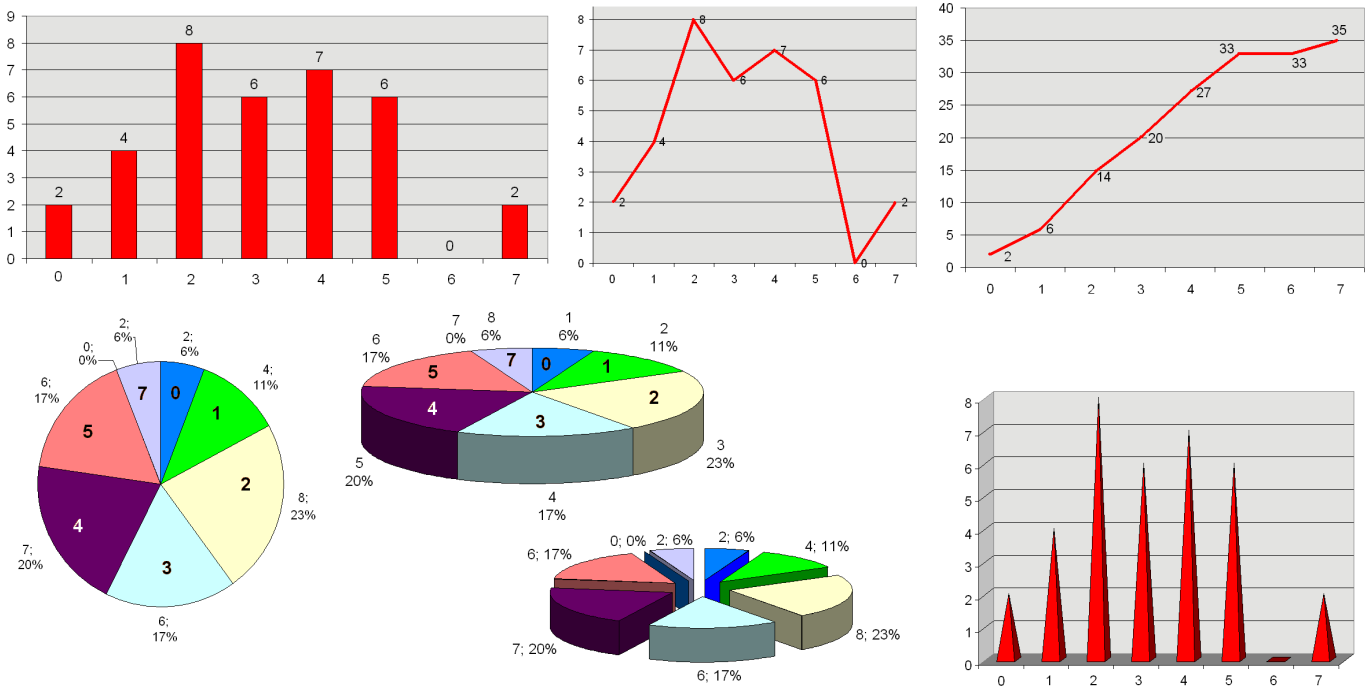
Otra opción distinta hubiera sido dibujar 2, 5, 7 o 10 lápices de un mismo tamaño, ya sea en línea o agrupados, para representar las frecuencias absolutas.



**Ejemplo 3.9** En un edificio con 35 viviendas, tenemos que en 2 de ellas no vive nadie, en 4 vive 1 sólo persona, en 8 viven 2 personas, en 6 viven 3 personas, en 7 viven 4 personas, en 6 viven 5 personas, y en 2 viven 7. Construir la correspondiente tabla y gráficos estadísticos.

Nº de inquilinos $x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	2	2	2/35	2/35
1	4	6	4/35	6/35
2	8	14	8/35	14/35
3	6	20	6/35	20/35
4	7	27	7/35	27/35
5	6	33	6/35	33/35
7	2	35	2/35	2/35
	35		1	

Lo primero que hacemos es calcular la tabla de frecuencias estadísticas, tal como hemos hecho antes. A continuación representamos los diversos gráficos estadísticos. Ya que las modalidades son números enteros, me parece adecuado reflejar que no hay ninguna casa con 6 familias, y añado esta modalidad, con valor 0. Destaco que ahora sí aparece el gráfico de frecuencias acumuladas absolutas, siempre creciente, así como que doy tres posibilidades para el diagrama de sectores, si bien el más fácil de interpretar gráficamente es el primero de ellos, el plano. respecto el pictograma, he tomado pirámides. Podría haber tomado cualquier otro gráfico.

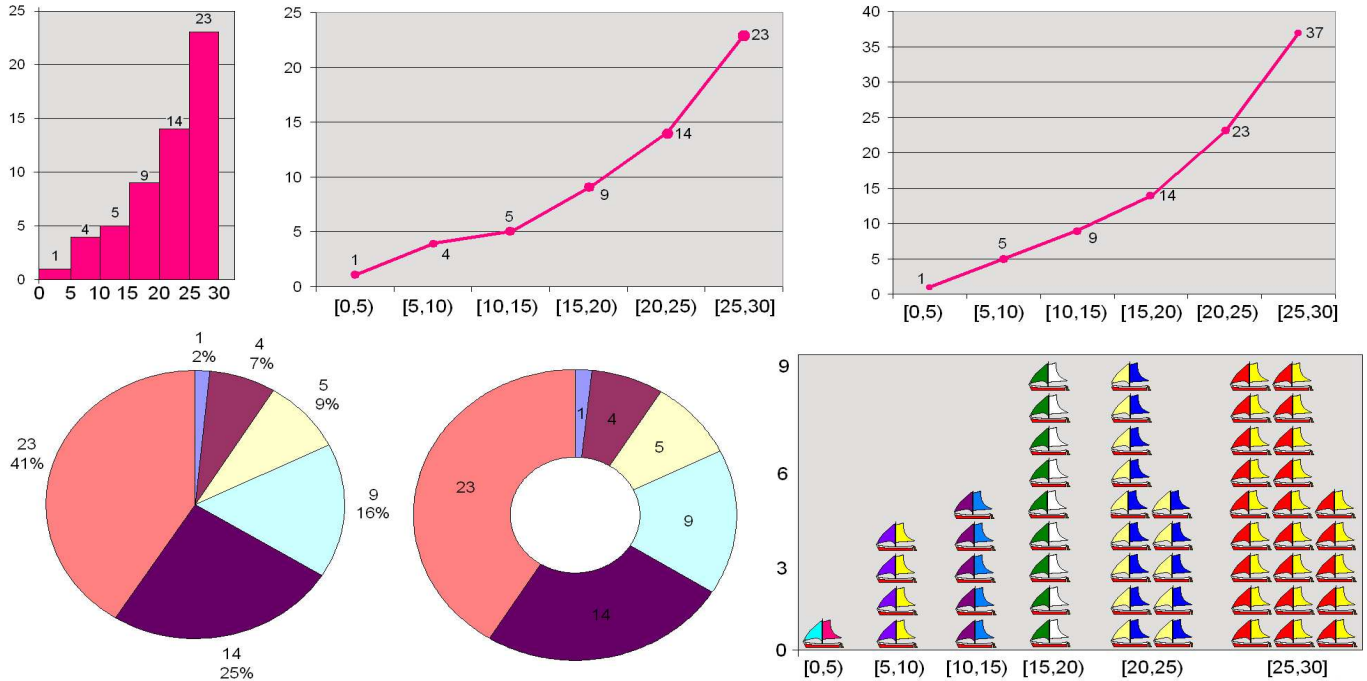


**Ejemplo 3.10** A la flota artesanal del puerto de Barbate se le hace una encuesta acerca de cuántos días salen a faenar al mes por término medio. Menos de 5 días sale 1 sólo barco, de 5 a 10 salen 4, de 10 a 15 días salen 5, de 15 a 20 días salen 9, de 20 a 25 días salen 14, y de 25 a 30 días salen 23.

Construir la correspondiente tabla y gráficos estadísticos.

$[x_i, x_{i+1})$	$m_i$	$a_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	$d_i$
$[0, 5)$	$2'5$	5	1	4	$1/37$	$4/37$	$1/5$
$[5, 10)$	$7'5$	5	4	5	$4/37$	$5/37$	$4/5$
$[10, 15)$	$12'5$	5	5	9	$5/37$	$9/37$	$5/5$
$[15, 20)$	$17'5$	5	9	14	$9/37$	$14/37$	$9/5$
$[20, 25)$	$22'5$	5	14	23	$14/37$	$23/37$	$14/5$
$[25, 30]$	$27'5$	5	23	37	$23/37$	$37/37$	$23/5$
			56		1		

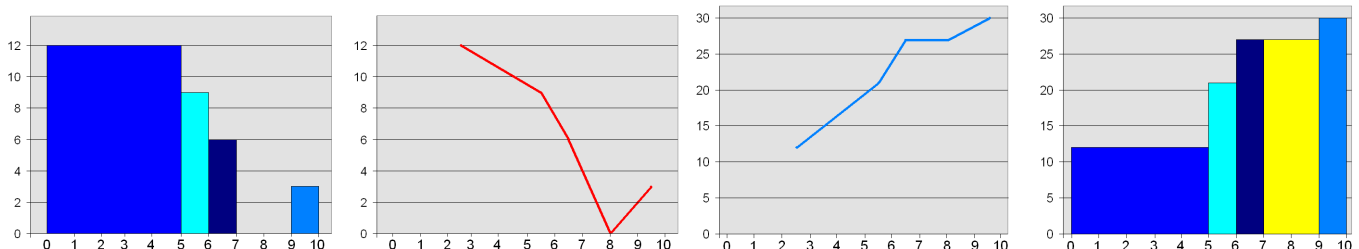
Actuamos como en problemas anteriores, calculando primero la tabla estadística. Al tratarse de una variable continua hay un cambio importante; el diagrama de barras se llama ahora histograma, y las barras se unen unas a otras. En este caso, eso sí, todas tienen igual anchura, al tener los intervalos de clase la misma amplitud. Por otra, muestro otra variante al diagrama de sectores, en el que falta el círculo central, así como otra versión de pictograma; se repite una imagen (en este caso un barco) tantas veces como indica su frecuencia absoluta.



**Ejemplo 3.11** En una clase de 30 alumnos, 12 sacaron insuficiente, 9 un aprobado, 6 un bien, 0 un notable y 3 un sobresaliente. Construir la correspondiente tabla y gráficos estadísticos.

$[x_i, x_{i+1})$	$m_i$	$a_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	$d_i$
$[0, 5) = ins$	$2'5$	5	12	12	$12/30$	$12/30$	$12/5$
$[5, 6) = suf$	$5'5$	1	9	21	$9/30$	$21/30$	$9/1$
$[6, 7) = bie$	$6'5$	1	6	27	$6/30$	$27/30$	$6/1$
$[7, 9) = not$	8	2	0	27	$0/30$	$27/30$	$0/2$
$[9, 10] = sob$	$9'5$	1	3	30	$3/30$	$30/30$	$3/1$
			30		1		

Para concluir con los ejemplos de gráficos, veamos otra v.e. continua en la que no todos los intervalos tienen la misma anchura. Obsérvese en el histograma que al ser distintas las amplitudes, la anchura de las barras también lo es para buscar proporcionalidad. Igualmente destaco en este ejemplo que hemos insertado un gráfico nuevo (último gráfico), la barra de frecuencias absolutas acumuladas, gráfico no contemplado hasta ahora, pero también válido, fácil de construir, y por cierto muy relacionado con el polígono de frecuencias acumuladas (penúltimo gráfico).



## 3.5. Parámetros estadísticos

### 3.5.1. Introducción y clasificación

Hasta ahora, para realizar un estudio estadístico hemos ordenado los diferentes datos obtenidos, si eran muchos los hemos agrupado en intervalos de igual longitud, los hemos representado en tablas estadísticas, y finalmente hemos realizado gráficos de la información contenida en dichas tablas, gráficos que dan una imagen global de la población estudiada.

Al igual que la imagen global visual que dan las gráficas, es necesario dar una imagen global numérica que nos sirva de resumen de la población estudiada. Esto se va a llevar a cabo mediante unos números asociados a cada estudio estadístico, números que son llamados **parámetros estadísticos**, y que se utilizan sólo en las variables estadísticas<sup>3</sup>. Hay varios tipos de parámetros dependiendo de su utilidad.

**1 - Parámetros de posición** o aquellos que nos informan de la situación de los datos de la población. Los hay de dos tipos:

**1.1. - de tendencia central**, que informan de la posición de los datos en torno a uno central. Son los siguientes:

- La media;  $\bar{x}$ . La medida central más importante, al representar con un sólo valor a todos los de la variable.
- La moda;  $Mo$ . Es el valor que más se repite en la variable.
- La mediana;  $Me$ . Es el valor que divide a todos en dos mitades, la que está antes de la mediana y la que está después.

**1.2. - de tendencia no central**, o aquellos que nos informan de la posición de los datos en torno a dos valores cualesquiera; son los denominados cuantiles, que se dividen en:

- Cuartiles;  $C_i$ . Dividen los datos en cuatro intervalos.  $C_2 = Me$
- Deciles;  $D_i$ . Dividen los datos en diez intervalos.
- Percentiles;  $P_i$ . Dividen los datos en cien intervalos.

**2 - Parámetros de dispersión** o aquellos que nos informan del grado de separación de los datos de la población respecto a los valores centrales, es decir, nos informan de si un parámetro de posición central es representativo o no de toda la población. Son los siguientes:

- El recorrido;  $Re$ . Nos informa del rango que toman los distintos valores.
- La varianza;  $\sigma^2$ . Nos informa de lo alejados que están los valores de la media en unidades al cuadrado.
- La desviación típica;  $\sigma$ . Nos informa de lo alejados que están los valores de la media en las mismas unidades que los datos estadísticos.

### 3.5.2. La media; $\bar{x}$

La media es el valor más representativo de la población. Se calcula sumando todos los valores de la población y dividiendo por el número de valores que hay. Se representa por  $\bar{x}$ , y hay dos fórmulas para calcularla según las variables estadísticas sean discretas o continuas:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} \quad (\text{para las discretas}) \qquad \bar{x} = \frac{\sum m_i f_i}{N} \quad (\text{para las continuas})$$

Teniendo en cuenta que  $h_i = \frac{f_i}{N}$ , también se puede calcular:

$$\bar{x} = \sum x_i h_i \quad (\text{para las discretas}) \qquad \bar{x} = \sum m_i h_i \quad (\text{para las continuas})$$

<sup>3</sup>O sea, en las cuantitativas de tipo discreto y continuo, no en las cualitativas

**Nota 3.7** Existe otra media, llamada media geométrica, que se calcula como  $G = \sqrt[N]{\prod x_i f_i}$

**Nota 3.8** A partir de ahora, al hablar de media, siempre nos referiremos a la aritmética salvo que se haga mención directa a la geométrica. Para acabar con ésta, puede probarse que la media geométrica siempre es inferior o igual a la aritmética;  $G \leq \bar{x}$ , alcanzándose la igualdad sólo si todos los valores a los que se calcula son iguales.

### 3.5.3. La moda

La **moda** es el valor de la población que más se repite, es decir, el de mayor frecuencia absoluta, representándose por  $M_o$ . Debido a la sencillez del concepto, podría calcularse para caracteres cualitativos. En el caso de variables estadísticas continuas, lo que se calcula es el intervalo con mayor frecuencia absoluta, llamado **intervalo modal** o  $I_{M_o}$ .

**Nota 3.9** Pudiera ser que en una V.E. continua conocer  $I_{M_o}$  no fuera suficiente, sino que quisiésemos saber con exactitud quién es la moda. Para ello podría calcularse la moda aplicando la siguiente fórmula:

$$M_o = x_i + \frac{a_i \cdot D_1}{D_1 + D_2}$$

- $x_i$  es el origen del intervalo modal.
- $a_i$  es su amplitud
- $D_1$  es la diferencia de frecuencias absolutas del intervalo modal y el intervalo anterior.
- $D_2$  es la diferencia de frecuencias absolutas del intervalo modal y el intervalo posterior.

**Nota 3.10** Pudiera ser que una población tuviera más de una moda, llamándose entonces población bimodal, trimodal...

### 3.5.4. La mediana

La **mediana** es el parámetro estadístico que divide a la población en dos partes iguales, es decir, el valor de la población que deja por debajo de él tantos datos como deja por encima. Se representa por  $Me$ , y se calcula buscando el valor cuya frecuencia acumulada absoluta sobrepase a  $\frac{N}{2}$ .

En el caso de V.E. continuas, lo que suele hacerse es obtener el intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada es mayor que  $\frac{N}{2}$ , intervalo llamado **intervalo mediano**.

**Nota 3.11** Si en una V.E. discreta se tiene que un valor tiene frecuencia acumulada absoluta igual a  $\frac{N}{2}$ , y por tanto es el siguiente el que posee frecuencia acumulada absoluta que sobrepasa a  $\frac{N}{2}$ , la mediana es la media de ambos valores (el que no llega y el que se pasa), aunque no pertenezca a la V.E.

**Nota 3.12** Si en una V.E. continua se tiene que  $\frac{N}{2}$  está precisamente en el extremo de dos intervalos,  $[a, \frac{N}{2})[\frac{N}{2}, b)$ , El intervalo mediano es el segundo, ya que es el primero que sobrepasa a  $\frac{N}{2}$  por comenzar por cerrado y poseer precisamente a este valor en su principio. No puede ser el primer intervalo, al acabar en abierto, y  $\frac{N}{2}$  no entrar ahí.

**Nota 3.13** Al igual que pasaba con la moda, pudiera ser que en una V.E. continua conocer  $I_{Me}$  no fuera suficiente, sino que quisiésemos saber con exactitud quién es la mediana. Para ello podría calcularse la mediana aplicando la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} Me &= x_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \cdot a_i \\ &= x_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i \end{aligned}$$

- $x_i$  es el origen del intervalo mediano.
- $a_i$  es la amplitud del intervalo mediano
- $F_{i-1}$  es la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior al mediano
- $F_i$  es la frecuencia absoluta acumulada del intervalo mediano.
- $f_i$  es la frecuencia absoluta del intervalo mediano.

### 3.5.5. Los cuantiles (cuartiles, deciles y percentiles)

Los **cuantiles** o **fractiles** son valores que dividen a la población en partes iguales, de forma similar a como hace la mediana, que divide la población en dos partes iguales. Los más usados son:

los **cuartiles**  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , que dividen a la población en cuatro partes iguales<sup>4</sup>. Nótese cómo  $C_2 = Me$ .

los **deciles**  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_8, D_9$ , que dividen a la población en diez partes iguales. Nótese cómo  $C_5 = Me$ .

los **percentiles**  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{98}, P_{99}$ , que dividen a la población en cien partes iguales. Nótese cómo  $C_{50} = Me$ .



Aquí tenemos una interpretación gráfica de los cuartiles y deciles; son puntos dentro del conjunto de los valores que nos ayudan a establecer de qué forma se distribuyen éstos.

Así por ejemplo, en el ejemplo del margen, se ve que los primeros cuartiles están mucho más próximos que el segundo y el tercero, lo que indica que la mayoría de los datos están al principio de la serie. Este dato nos lo concretan los deciles; a partir de  $D_6$  las separaciones entre deciles son mayores, por lo que el 40% final está muy distanciado, no así el 60% inicial que marca  $D_6$ .

Los cuantiles se suelen dar con porcentajes. Así, entre dos cuartiles consecutivos están el 25% de los datos, entre dos deciles consecutivos están el 10% de los datos, y entre dos percentiles consecutivos el 1%. Para calcularlos, se actúa de igual forma que con la mediana<sup>5</sup>, variando el dato  $\frac{N}{2}$  por los siguientes:

- $\frac{N}{4}, \frac{2N}{4}, \frac{3N}{4}$  para los cuartiles  $C_1, C_2$  y  $C_3$  respectivamente.
- $\frac{N}{10}, \frac{2N}{10}, \dots, \frac{8N}{10}$  y  $\frac{9N}{10}$  para los deciles  $D_1, D_2, \dots, D_8$  y  $D_9$  respectivamente.
- $\frac{N}{100}, \frac{2N}{100}, \dots, \frac{98N}{100}$  y  $\frac{99N}{100}$  para los percentiles  $P_1, P_2, \dots, P_{98}$  y  $P_{99}$  respectivamente.

**Ejemplo 3.12** Para calcular el cuartil  $C_3$ , aquel valor que posee antes el 75% de los valores, y después el 25%, vemos qué valor tiene una frecuencia acumulada absoluta que sobrepasa  $\frac{3N}{4}$ .

**Ejemplo 3.13** Para calcular el decil  $D_6$ , aquel valor que posee antes del mismo el 60% de los valores, y después el 40% restante, vemos qué valor tiene una frec. acumulada absoluta que sobrepasa  $\frac{6N}{10}$ .

**Ejemplo 3.14** Para calcular el percentil  $P_{87}$ , aquel valor que posee antes de él el 87% de los valores, y después del mismo el 13% restante, vemos qué valor tiene una frecuencia acumulada absoluta que sobrepasa  $\frac{87N}{100}$ .

**Nota 3.14** En las V.E. continuas, los cuantiles, al igual que pasa con la mediana, se dan como intervalos;  $I_{C_1}, I_{D_3}, I_{P_{21}}$ , etc. eligiéndose el primer intervalo que sobrepasa al valor calculado.

**Ejemplo 3.15** En mi clase, hay 30 niños, de ellos 12 son castaños, 9 morenos, 6 rubios y 3 pelirrojos. Realizar la tabla estadística y calcular lo que se pueda.

COLOR DE PELO	$f_i$	$h_i$
castaño	12	12/30
moreno	9	9/30
rubio	6	6/30
pelirrojo	3	3/30
	30	1

En este caso, no tenemos una V.E., sino que trabajamos con caracteres cualitativos, por lo que sólo podemos escribir las columnas de frecuencias absolutas y relativas, ambas simples.

Por ser un carácter cualitativo, no tiene sentido calcular la media ni la mediana, menos aún los cuantiles. Sí podemos decir que la moda es “ser castaño”;  $Mo = \text{castaño}$ , ya que esa es la modalidad con mayor frecuencia absoluta. Y no podemos decir nada más.

<sup>4</sup>En algunos libros los nombran  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$

<sup>5</sup>Ya se ha dicho que la mediana es un caso particular de cuantil

**Ejemplo 3.16** Calcular los parámetros estadísticos de centralización del anterior ejemplo 3.2, que hablaba del número de hermanos de los alumnos de una clase de primero de bachillerato.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$	$x_i f_i$
0	7	7	7/26	7/26	0
1	7	14	7/26	14/26	7
2	9	23	9/26	23/26	18
3	2	25	2/26	25/26	6
5	1	26	1/26	26/26	5
	26		1		36

Rescatamos la tabla del citado ejemplo 3.2, y le añadimos una columna  $x_i f_i$ , cuyos elementos son el producto de los de las columnas  $x_i$  y  $f_i$ . A esta columna le calculamos la suma, 36; tengo entonces que:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{36}{26} = 1'38$$

Esa es la media; si nos pidiessen una respuesta entera, ésta sería 1.

Respecto la moda, con claridad la respuesta que más se repite es tener dos hermanos, que tiene una frecuencia absoluta de 9; por ello, la V.E. es monomodal con moda 2.

Respecto la mediana, en 0 se tiene una  $F_1$  de  $\frac{7}{26} < 0'5$ , y en 1 una  $F_2$  de  $\frac{14}{26} > 0'5$ , por lo que la mediana está en 1, ya que en ese punto la frecuencia absoluta acumulada excedió de  $\frac{N}{2} = \frac{26}{2} = 13$ .

Respecto los cuartiles,  $C_1$  es aquel en el que la frecuencia absoluta acumulada pasa de  $\frac{N}{4} = \frac{26}{4} = 6'5$ , así que  $C_1 = 0$ ,  $C_2$  coincide con la mediana, y es el valor en el que la f.a.a. pasa de  $\frac{2N}{4} = \frac{52}{4} = 13$ , así que  $C_2 = 1$ , como ya sabíamos. Finalmente,  $C_3 = 2$ , ya que dicho valor es el primero que tiene una f.a.a. superior a  $\frac{3N}{4} = \frac{78}{4} = 19'5$ . Como consecuencia de ello,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ ,  $C_3 = 2$ , tenemos que el 25 % de los valores son menores o iguales a 0, el 25 % están entre 0 y 1, el 25 % entre 1 y 2, y el último 25 % son valores mayores que 2.

Respecto los deciles, habría que ver en qué modalidades la frecuencia absoluta acumulada excede los valores de la sucesión  $\frac{nN}{10} = \frac{26}{10}, \frac{52}{10}, \dots, \frac{208}{10}, \frac{234}{10}$ , o sea, la sucesión 2'6, 5'2, 7'8, 10'4, 13, 15'6, 18'2, 20'8 y 23'4, por lo que tengo que  $D_1 = D_2 = 0$ ,  $D_3 = D_4 = D_5 = 1$ ,  $D_6 = D_7 = D_8 = 2$ ,  $D_9 = 3$ .

Para acabar, sólo voy a calcular dos percentiles,  $P_{36}$  y  $P_{84}$ . El primero se asocia al valor  $\frac{36 \cdot 26}{100} = \frac{936}{100} = 9'36$ . La primera modalidad cuya f.a.a. sobrepasa este valor es 1, así que  $P_{36} = 1$ . Respecto  $P_{84}$ , está asociado al valor  $\frac{84 \cdot 26}{100} = \frac{2184}{100} = 21'84$ . La primera modalidad cuya f.a.a. sobrepasa este valor es 2, así que  $P_{84} = 2$ . Por ello puedo decir que el 84-36=48% de los valores centrales están entre 1 y 2.

**Ejemplo 3.17** Calcular los parámetros estadísticos de centralización del anterior ejemplo 3.3, que hablaba de la altura de los 26 miembros de una clase de primero de bachillerato.

$[x_i, x_{i+1})$	$m_i$	$a_i$	$f_i$	$F_i$	$d_i$	$m_i f_i$
[155,165)	160	10	5	5	0'5	800
[165,175)	170	10	12	17	1'2	2040
[175,185)	180	10	8	25	0'8	1440
[185,195)	190	10	1	26	0'1	190
			26			4470

Rescatamos la tabla del citado ejemplo 3.3 (para acortarla quito las  $h_i$  y  $H_i$ ), y le añadimos una columna  $m_i f_i$ , cuyos elementos son el producto de los de las columnas  $m_i$  y  $f_i$ . A esta columna le calculamos la suma, 4470; tengo entonces que la altura media es:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i f_i}{N} = \frac{4470}{26} = 171'92$$

Respecto la moda, se trata de una V.E. continua, así que lo que vamos a hacer es calcular el intervalo modal  $I_{Mo}$ , que es [165, 175) al tener la mayor frecuencia absoluta.

Si deseáramos precisarlo más, y calcular la moda como un valor concreto, tomaríamos  $x_i = 165$ ,  $a_i = 10$ ,  $D_1 = 12 - 5 = 7$ ,  $D_2 = 12 - 8 = 4$ , de donde  $Mo = x_i + \frac{a_i \cdot D_1}{D_1 + D_2} = 165 + \frac{10 \cdot 7}{7+4} = 165 + \frac{70}{11} = 171'86$

Vayamos con la mediana; de nuevo, al tratarse de una V.E. continua lo que hacemos es calcular el  $I_{Me}$ . Las frecuencias acumuladas absolutas pasan de  $13 = 26/2$ , en [165, 175), donde vale 17, así que la respuesta es  $I_{Me} = [165, 175)$ .

Si al igual que la moda deseáramos precisar más y calcular la mediana como un valor concreto, tomaríamos  $x_i = 165$ ,  $a_i = 10$ ,  $f_i = 12$ ,  $F_{i-1} = 5$ , de donde  $Me = x_i + a_i \cdot \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} = 165 + \frac{10(13-5)}{12} = 165 + \frac{80}{12} = 171'67$

Respecto los cuartiles, calculemos por ejemplo  $P_{15}$ , asociado a  $\frac{15N}{100} = \frac{390}{100} = 3'9$ , así que  $P_{15}$  está en [155, 165). Si quisiésemos precisar más, haríamos  $P_{15} = x_i + a_i \cdot \frac{\frac{15N}{100} - F_{i-1}}{f_i} = 155 + \frac{10(3'9-0)}{5} = 172'8$ .

Calculemos por ejemplo  $P_{85}$ , asociado a  $\frac{85N}{100} = \frac{2210}{100} = 22'1$ , así que  $P_{85}$  está en [175, 185). Si quisiésemos precisar más, haríamos  $P_{85} = x_i + a_i \cdot \frac{\frac{85N}{100} - F_{i-1}}{f_i} = 175 + \frac{10(22'1-17)}{8} = 181'375$ .

Por las precisiones anteriores,  $P_{15} = 172'8$  y  $p_{85} = 181'375$ , podemos decir que el 70 % de los valores centrales está entre 172'8 y 181'375.

### 3.5.6. El recorrido; $Re$

El **recorrido** es la distancia entre los valores máximo y mínimo de la población. Se designa por  $Re$ , y se calcula restando el valor mínimo al valor máximo;  $Re = x_{max} - x_{min}$ .

**Nota 3.15** Cuanto mayor sea el recorrido de una población, menos representativas serán la media, la mediana y la moda. Los siguientes parámetros también ayudarán a establecer la representatividad.

### 3.5.7. La varianza, $\sigma^2$

Es la media de los cuadrados de las desviaciones respecto la media, siendo las desviaciones la diferencia entre cada valor y la media  $\bar{x}$ . Se representa por  $\sigma^2$ , y se calcula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N} \quad \text{o bien} \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

**Nota 3.16** Las dos formas anteriores son válidas para calcular la varianza, si bien seguramente va a ser más cómoda la primera, ya que la media  $\bar{x}$  va a ser seguramente decimal, y en la primera fórmula realizar  $\sum (x_i - \bar{x})^2$  va a significar sumar los cuadrados de las diferencias de muchos números decimales.

Para usar la segunda fórmula, lo que tendremos que hacer es tener calculados los siguientes datos:

- En V.E. discretas:  $x_i$ ,  $f_i$ ,  $x_i f_i$ ,  $x_i^2$ , y  $x_i^2 f_i$
- En V.E. continuas:  $[x_i, x_{i+1})$ ,  $m_i$ ,  $f_i$ ,  $m_i f_i$ ,  $m_i^2$ , y  $m_i^2 f_i$ .

Y como veremos en los ejemplos, al usar la segunda fórmula necesitaremos los datos anteriores, y sólo trabajaremos con decimales al final del proceso.

### 3.5.8. La desviación típica, $\sigma$

La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se denota por  $\sigma$ , y por ello  $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ , sirviendo para medir el grado de separación de los datos; a mayor  $\sigma$ , mayor dispersión de los datos respecto a la media.

**Nota 3.17** Realmente, no hay mucha diferencia en la información que da la varianza o la desviación típica, salvo que la varianza, al ser una media de diferencias al cuadrado<sup>6</sup> respecto los datos iniciales no está en el mismo rango que los datos iniciales, está al cuadrado. Pero esa diferencia de escala se corrige al tomar la raíz cuadrada, ya que la desviación típica vuelve a estar a la misma escala que los datos iniciales.

**Nota 3.18** Cuanto más cercano a cero sea  $\sigma^2$  (o  $\sigma$ ), la media será más representativa, al estar próximos los datos. Cuanto más grande sea  $\sigma^2$  (o  $\sigma$ ), los datos serán más dispersos.

**Ejemplo 3.18** Antes de retomar los ejemplos 3.2 y 3.3, veamos uno que nos ayude a entender  $\sigma^2$ .

- En una ciudad de dos personas, cada una posee un coche. Calcular  $\bar{x}$  y  $\sigma^2$

Dicho y hecho. La media es  $\bar{x} = \frac{1+1}{2} = 1$ , y la varianza es igual a la media de  $(x_i - \bar{x})^2$ , o sea, la media de  $(x_i - 1)^2$ , que admite dos posibilidades,  $(1 - 1)^2 = 0$  y  $(1 - 1)^2 = 0$ , y la media de 0 y 0 es  $\frac{0+0}{2} = 0$ , así que la varianza es  $\sigma^2 = 0$ . O sea, cuando todos los datos son iguales, la varianza es cero.

- En una ciudad de dos personas, una posee dos coches, otra ninguno. Calcular  $\bar{x}$  y  $\sigma^2$

Dicho y hecho. La media es  $\bar{x} = \frac{2+0}{2} = 1$ , y la varianza es igual a la media de  $(x_i - \bar{x})^2$ , o sea, la media de  $(x_i - 1)^2$ , que admite dos posibilidades,  $(2 - 1)^2 = 1$  y  $(0 - 1)^2 = 1$ , y la media de 1 y 1 es  $\frac{1+1}{2} = 1$ , así que la varianza es  $\sigma^2 = 1$ . O sea, cuando todos los datos no son iguales, la varianza nos da la separación media de los cuadrados de las diferencias de los datos con respecto la media; en este caso la media era 1, y tanto 2 como 0 se separan una unidad de 1.

<sup>6</sup>Elevar al cuadrado es necesario para que todos los sumandos sean positivos, y con ellos la media.

**3.5.9. Intervalo**  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$

Por lo general, en casi todos los estudios estadísticos podemos encontrar un intervalo abierto centrado en la media  $\bar{x}$  y de radio igual a la desviación típica  $\sigma$  en el que se hayan aproximadamente las 2/3 partes de los datos de la población. A este intervalo lo llamaremos  $I = (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$

**Ejemplo 3.19** Calcular los parámetros estadísticos de dispersión del anterior ejemplo 3.2, que hablaba del número de hermanos de los alumnos de una clase de primero de bachillerato.

Rescatamos la tabla del citado ejemplo 3.2, y por simplicidad le quitamos algunas columnas y le añadimos otras; las que nos interesan ahora son  $x_i, f_i, x_i f_i, x_i^2,$  y  $x_i^2 f_i$ . Entonces:

$x_i$	$f_i$	$x_i f_i$	$x_i^2$	$x_i^2 f_i$
0	7	0	0	0
1	7	7	1	7
2	9	18	4	36
3	2	6	9	18
5	1	5	25	25
	26	36		86

- $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{36}{26} = 1'38$
- $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{86}{26} - 1'38^2 = 3'30 - 1'38^2 = 1'39$
- $\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{1'39} = 1'17$

Respecto el intervalo  $I = (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ , teniendo en cuenta que  $\bar{x} = 1'38$  y  $\sigma = 1'17$ , queda definido el intervalo  $I = (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (1'38 - 1'17, 1'38 + 1'17) = (0'21, 2'55)$ . A continuación contamos los datos que hay en dicho intervalo, 16 (los 1 y 2), que representan un 61'54% del total de 26. En este caso no hemos llegado a los 2/3.

**Ejemplo 3.20** Calcular los parámetros estadísticos de dispersión del anterior ejemplo 3.3, que hablaba de la altura de los 26 miembros de una clase de primero de bachillerato.

De nuevo rescatamos la tabla del citado ejemplo 3.3, pero para acortarla me quedo sólo con las columnas  $[x_i, x_{i+1}), m_i, f_i, m_i f_i, m_i^2,$  y  $m_i^2 f_i$ . Entonces:

$[x_i, x_{i+1})$	$m_i$	$f_i$	$m_i f_i$	$m_i^2$	$m_i^2 f_i$
[155,165)	160	5	800	25600	128000
[165,175)	170	12	2040	28900	346800
[175,185)	180	8	1440	32400	259200
[185,195)	190	1	190	36100	36100
	26	4470			770100

- $\bar{x} = \frac{\sum m_i \cdot f_i}{N} = \frac{4470}{26} = 171'92$
- $\sigma^2 = \frac{\sum m_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{770100}{26} - 171'92^2 = 62'74$
- $\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{62'74} = 7'92$

Respecto el intervalo  $I = (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ , teniendo en cuenta que  $\bar{x} = 171'92$  y  $\sigma = 7'92$ , queda definido el intervalo  $I = (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (171'92 - 7'92, 171'92 + 7'92) = (164, 179'84)$ . Dentro de ese intervalo está completo el intervalo [165, 175), donde hay 12 observaciones, pero además hay parte de los intervalos [155, 165) y [175, 185), veamos qué parte de frecuencia le corresponde, la idea es aplicar dos reglas de tres; si en [155, 165) la frecuencia es 5, en (164, 165) hay 0'5, y si en [175, 185) la frecuencia es 8, en [175, 179'84) la frecuencia es 3'87.

Así, el total de frecuencia absoluta en (164, 179'84) es igual al total de frecuencias que hay en los intervalos (164, 165), (164, 165) y [175, 179'84), o sea, 0'5 + 12 + 3'87 = 16'37.

Hacemos otra regla de tres directa, si el 100% es 26,  $x$  es 16'37, y resulta ser  $x = 62'96\%$ , ese es el porcentaje de datos en  $I = (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ .

**Ejemplo 3.21** Retomemos el ejemplo 3.6, que hablaba de un conjunto de 100 matrimonios que tenían el siguiente número de hijos. Calcular los parámetros estadísticos.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i f_i$	$x_i^2$	$x_i^2 f_i$
0	4	4	0	0	0
1	16	20	16	1	16
2	36	56	72	4	144
3	30	86	90	9	270
4	10	96	40	16	160
5	4	100	20	25	100
	100		238		690

- Recorrido;  $Re = x_{max} - x_{min} = 5 - 0 = 5$
- Moda;  $Mo = 2$
- Cuartiles;  $C_1 = 2, C_2 = Me = 2$  (ya que  $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ ),  $C_3 = 3$
- Media;  $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{238}{100} = 2'38$
- Varianza;  $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{690}{100} - 2'38^2 = 1'2356$
- Desviación Típica;  $\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{1'2356} = 1'11$

Respecto el intervalo  $I = (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (2'38 - 1'11, 2'38 + 1'11) = (1'27, 3'49)$ , que contiene a los valores 'tener 2 y 3 hijos', con suma de frecuencias 36 + 30 = 66, lo cual es un 66% de los datos.

## Parte II

# Distribuciones de Probabilidad.



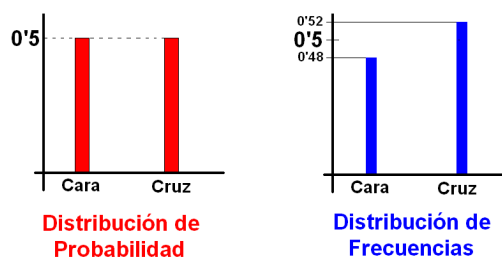
### 3.6. Distribuciones de probabilidad y variables aleatorias.

**Definición 3.6 (distribución de probabilidad)** Las distribuciones de probabilidad son idealizaciones de las distribuciones de frecuencias relativas de un fenómeno estadístico, usándose para realizar estudios sobre experimentos que en la práctica no pueden repetirse indefinidamente.

**Ejemplo 3.22** Si lanzamos un dado 600 veces, por la Ley de Laplace es de esperar que cada una de las caras salga 100 veces, o que lo haga con un 0'16 de probabilidad. Esa sería una distribución de probabilidad, algo ideal, ya que si en realidad lanzamos el dado, va a ser muy difícil que cada cara salga exactamente las 100 veces; una podrá salir 100, otra 115, otra 85... a esto se le llama distribución de frecuencias.

En teoría (Ley Fuerte de los Grandes Números), a medida que el número de lanzamientos aumente, la distribución de frecuencias tenderá a la distribución de probabilidad.

**Ejemplo 3.23** Si lanzamos una moneda 1000 veces, la distribución de probabilidad (o la situación ideal) es que la cara salga un 50 % de las veces, 500, con probabilidad 0'5, al igual que la cruz. La distribución de frecuencias será algo muy parecido, 51 % a 49 %, 52 % a 48 %... que por la Ley Fuerte de los Grandes números deberá converger a la distribución de frecuencias a medida que aumenten los lanzamientos.



**Ejemplo 3.24** Si Lanzamos dos dados 100 veces y sumamos sus puntos, la distribución de probabilidad la calculamos según Laplace, y tenemos:

$$\begin{array}{lll}
 \blacksquare P(x = 2) = P(x = 12) = \frac{1}{36} & \blacksquare P(x = 4) = P(x = 10) = \frac{3}{36} & \blacksquare P(x = 6) = P(x = 8) = \frac{5}{36} \\
 \blacksquare P(x = 3) = P(x = 11) = \frac{2}{36} & \blacksquare P(x = 5) = P(x = 9) = \frac{4}{36} & \blacksquare P(x = 7) = \frac{6}{36}
 \end{array}$$

La distribución de probabilidad anterior es la teoría, lo ideal, el modelo. En la realidad lo que saldrá es algo parecido, una distribución de frecuencias que a medida que aumenten los lanzamientos se parecerá más a la distribución de probabilidad.

**Nota 3.19** Así pues, la Distribución de Probabilidad nos permite explicar el experimento independientemente de las veces que se repita, al ser algo teórico e ideal calculado *a priori*. A cada valor se le asigna una probabilidad que representa una frecuencia relativa *a priori*. Si realizamos físicamente el experimento, las probabilidades *a posteriori* de cada valor deberán converger a las calculadas *a priori*.

**Definición 3.7 (Variable aleatoria)** Sea  $(\Omega, p)$  un espacio de probabilidad, sea  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales. Una variable aleatoria es cualquier aplicación  $X$  de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  de forma que la imagen inversa de cualquier intervalo  $(-\infty, x]$  es un suceso del espacio de probabilidad. En esta situación está claro que se puede calcular  $p(X \leq x)$ .

**Nota 3.20** La definición anterior, la matemáticamente correcta, la vamos a traducir nosotros a un nivel más elemental como que una variable aleatoria  $X$  es una aplicación que va a tomar diferentes valores, todos ellos sucesos del espacio muestral, cada uno de los cuales está acompañado de su correspondiente probabilidad. A los sucesos, distintos o no, que toma la variable aleatoria tras experimentar varias veces, los llamaremos *espacio muestral de la variable aleatoria*.

**Nota 3.21** Una variable aleatoria podríamos considerarla como el resultado de repetir un mismo experimento aleatorio una serie de veces y anotar los resultados obtenidos en cada nueva experimentación, cada uno de los cuales tenía cierta probabilidad.

**Ejemplo 3.25** Consideremos el espacio de probabilidad asociado a lanzar una moneda,  $\Omega = \{c, x\}$ , con  $p(c) = p(x) = \frac{1}{2}$ . Una variable aleatoria  $X$  es una aplicación que en cada nueva etapa genera un suceso del espacio muestral  $\Omega$ . Así por ejemplo, si  $X$  tomase 5 valores podríamos tener los siguientes espacios muestrales de la variable aleatoria:  $X : c, c, x, c, x$ , o bien  $X : x, x, c, x, c$ , o bien  $X : c, c, c, x, c$ , etc. La variable  $X$  recibe el nombre de aleatoria porque aunque es sabido los valores que puede tomar (los sucesos de  $\Omega$ ), hasta que no se experimenta (en este caso 5 veces), no se sabe cuáles va a tomar.

**Nota 3.22** Aunque en el ejemplo anterior no se aprecia ser  $p(c) = p(x)$ , si un suceso posee mayor probabilidad que otro, debería aparecer más veces en el espacio muestral de la variable aleatoria.

**Ejemplo 3.26** Considero el espacio muestral asociado a tirar dos dados y sumar sus puntuaciones (véase el ejemplo 3.24),  $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , donde algunos resultados son más probables que otros. El espacio muestral de una variable aleatoria  $X$  asociada a dicho espacio de probabilidad con 20 lanzamientos dobles de dados, podría ser:  $X : 4, 6, 7, 8, 10, 2, 6, 9, 7, 7, 11, 5, 7, 8, 7, 3, 8, 7, 9, 11$ , donde los resultados cercanos a 7 son más probables que los cercanos a 2 ó 12, y por eso han aparecido más veces.

**Nota 3.23** Una Variable Aleatoria hace el papel de una Variable Estadística; si ésta tomaba diferentes valores (pesos, tallas, número de individuos...) de forma que después contáramos cuántos había de cada tipo (discreta) o clase (continua), pudiendo repetirse. Una Variable Aleatoria nos va a generar diferentes valores procedentes del espacio muestral, de forma que también nos podemos plantear el contar cuántos hay de cada tipo, agruparlos en intervalos, calcular medias, varianzas...

**Nota 3.24** Para ir concluyendo, una Variable Aleatoria sólo es una colección de sucesos del espacio muestral  $\Omega$  de una espacio de probabilidad. En dicha colección, el orden de los sucesos no es necesariamente importante, sí es importante cuántos sucesos hay de cada tipo. Asociado a cada suceso hay una determinada probabilidad heredada del espacio de probabilidad  $(\Omega, p)$ .

**Nota 3.25** Para concluir este punto, la relación existente entre Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad es que en cada nuevo elemento del espacio muestral de la V.A., cada suceso que aparece puede hacerlo con cierta probabilidad, probabilidad que está descrita en la distribución de probabilidad asociada al experimento.

**Ejemplo 3.27** Lanzamos un dado. Es bien sabido su espacio muestral  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y su distribución de probabilidad;  $P(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = 1/6$ . Si consideramos la V.A. asociada al experimento aleatorio, en cada nueva etapa la variable aleatoria puede tomar cualquier valor del 1 al 6 con la misma probabilidad.

### 3.7. Distribuciones de probabilidad en el caso discreto

Ya sabemos qué es una distribución de probabilidad, así como una variable aleatoria. Si recordamos, estaban las Variables Estadísticas discretas y las continuas, que se trataban de forma diferente. De forma similar vamos a distinguir las Variables Aleatorias y Distribuciones entre discretas y continuas. Pensemos a continuación que los valores  $x_i$  del recorrido no tienen asociados unas frecuencias relativas  $h_i$ , sino unas probabilidades  $0 \leq p_i \leq 1$ .

**Definición 3.8 (función masa de probabilidad)** *En una Variable Estadística (V.E.) discreta, la distribución de probabilidad viene dada por una función llamada función masa de probabilidad, que asocia a cada valor de la variable su probabilidad, donde:*

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad y \quad \sum p_i = 1$$

$x_i$	$p_i$
$x_1$	$p_1$
$x_2$	$p_2$
$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$p_n$
	1

**Definición 3.9 (variable aleatoria discreta)** Si recordamos, al hablar de V.E. discretas, estaba el concepto de frecuencia relativa  $h_i = f_i/N$ . Teniendo en cuenta que  $0 \leq f_i \leq N$ , se deduce que  $0 \leq h_i \leq 1$ , y teniendo en cuenta que  $\sum f_i = N$  se tiene que  $\sum h_i = 1$ . Por ello, al hablar de V.E. discretas tiene sentido referirse a ellas en términos de probabilidad, llamándose en dicho caso Variables Aleatorias discretas o V.A. discretas.

**Nota 3.26** En las V.A. discretas, las distintas probabilidades se las llevan los sucesos  $x_i$  del recorrido, y fuera de esos puntos, las probabilidades son cero.

**Nota 3.27** Por analogía con las V.E. discretas, en las V.A. discretas se pueden definir los parámetros estadísticos de forma similar a las distribuciones estadísticas, sin más que sustituir las frecuencias relativas  $h_i = f_i/N$  por las probabilidades  $p_i$ ; eso sí, a la media ahora la llamaremos  $\mu$  en lugar de  $\bar{x}$ :

	Distribuciones Estadísticas	Distribuciones de Probabilidad
Media	$\bar{x} = \sum x_i \frac{f_i}{N} = \sum x_i h_i$	$\mu = \sum x_i p_i$
Varianza	$\sigma^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 h_i = \sum x_i^2 h_i - \bar{x}^2$	$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i = \sum x_i^2 p_i - \mu^2$
Desv. típica	$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$

### 3.8. Distribución Binomial $B(n, p)$

La distribución binomial es un caso particular de distribución discreta y que tiene su importancia al aparecer en muchos fenómenos estadísticos; más concretamente, se corresponde a todos los experimentos aleatorios sencillos en el que en cada experimentación sólo puede ocurrir el suceso  $A$  con probabilidad  $p$  o su contrario (con probabilidad  $q = 1 - p$ ), y este experimento sencillo se repite muchas veces en las mismas condiciones.

Este experimento tiene una Distribución de Probabilidad muy concreta, llamada distribución Binomial  $B(n, p)$  o  $Bi(n, p)$ , donde  $n$  es el número de veces que se repite el experimento, y  $p$  la probabilidad de que ocurra el suceso  $A$  en cada experimentación, llamada probabilidad de éxito. Los valores de la distribución son  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$  (ojo que el 0 entra, el experimento podría no darse ninguna vez). Llamemos  $q = 1 - p$  la probabilidad de fracaso, se tiene que:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{donde} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

**Nota 3.28** Más propiedades de los números combinatorios pueden encontrarse en el apartado ?? del tema anterior. Por otra, el resultado siguiente, sin demostración, es muy importante, ya que nos ahorrará mucho trabajo al calcular la media y desviación típica de los posibles resultados en una distribución binomial.

**Proposición 3.1** La media y desviación típica de la binomial valen lo siguiente:

$$\text{Media; } \mu = np$$

$$\text{Desviación típica; } \sigma = \sqrt{npq}$$

**Nota 3.29** La binomial es un caso de distribución discreta que tendrá mucha importancia al describir perfectamente un suceso sencillo que se repite muchas veces, si bien calcular la probabilidad de distribución una binomial a lo largo de un tramo de observaciones puede ser muy tedioso, al tenerse que hacer una suma más o menos larga de números combinatorios por productos de potencias. Más adelante, punto 3.13, aprenderemos a aproximar distribuciones binomiales mediante distribuciones normales.

**Ejemplo 3.28** En una distr. Binomial  $B(8, 0'2)$ , calcula  $P(X = 0)$ ,  $P(X \neq 0)$ ,  $P(X = 2)$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ :

- $P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 \cdot q^{n-0} = \binom{8}{0} 0'2^0 \cdot 0'8^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0'167 = 0'167$
- $P(X \neq 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0'167 = 0'833$
- $P(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 \cdot q^{n-2} = \binom{8}{2} 0'2^2 \cdot 0'8^6 = 28 \cdot 0'04 \cdot 0'262 = 0'293$
- $\mu = np = 8 \cdot 0'2 = 1'6$
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0'2 \cdot 0'8} = \sqrt{1'28} = 1'13$

**Ejemplo 3.29** Lanzamos una moneda 10 veces. Calcula la probabilidad de obtener 3 caras, la media y la desviación típica.

Este experimento se ajusta perfectamente a una distribución de probabilidad binomial; el lanzar una moneda es un experimento aislado que tiene una probabilidad de salir cara (lo voy a llamar éxito) de  $\frac{1}{2}$ , y de fracaso (cruz) también  $\frac{1}{2}$ . Por más veces que repita el lanzamiento, las probabilidades siguen siendo las mismas, así que estoy en el caso de una binomial, en este caso una  $B(10, 0'5)$ , ya que repito un experimento aislado (tirar una moneda) diez veces, y cada una tiene la probabilidad de éxito (salir cara) igual a  $\frac{1}{2} = 0'5$ .

- $P(X = 3) = \binom{10}{3} p^3 \cdot q^{10-3} = \binom{10}{3} 0'5^3 \cdot 0'5^7 = 120 \cdot 0'125 \cdot 0'0078 = 0'117$
- $\mu = np = 10 \cdot 0'5 = 5$ ; es de esperar que en 10 lanzamientos salgan 5 caras y 5 cruces (lógico).
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0'5 \cdot 0'5} = \sqrt{2'5} = 1'581$ ; por lo que la gran mayoría de veces el número de caras en diez lanzamientos de una moneda estará en el intervalo  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (3'419, 6'581)$

**Ejemplo 3.30** Extraemos 6 cartas de una baraja española y anotamos el número de veces que sale el palo de oros ¿Es un experimento que se ajusta a una binomial?

Si en el experimento hay reemplazamiento, y tras sacar la carta se anota y se vuelve a dejar en la baraja, sería una binomial  $B(6, \frac{1}{4})$ , ya que en cada extracción, las probabilidades de extraer oros (éxito) son de  $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0'25$ , y se realizan 6 extracciones.

Ahora bien, si no hay reemplazamiento, en la primera extracción la probabilidad de sacar oros es de  $\frac{10}{40}$ , pero en la siguiente la probabilidad viene condicionada por la extracción anterior, ya que no quedan 40 cartas como acos posibles, sino 39, en la tercera extracción quedarán 38... igualmente, según vayamos sacando oros o no, los casos favorables irán cambiando, y en definitiva, en cada experimento aislado las probabilidades son distintas, así que no sería una binomial.

**Ejemplo 3.31** La probabilidad de que yo apruebe un examen de matemáticas es de  $0'6$ . Si realizo 10 exámenes a lo largo del curso ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe menos de 8 exámenes?

Sea  $X$  el número de exámenes que apruebo a lo largo del curso. Por lo que me están preguntando es  $P(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + P(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7)$ . Ahora bien, así debo de calcular 8 probabilidades y sumarlas.

Eso sería correcto, si bien acabo antes usando la probabilidad del complementario, ya que se verifica que  $p(X < 8) = 1 - p(X \geq 8) = 1 - [p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)]$ , debiendo calcular sólo 3 desarrollos, sumarlos y restarlos a 1.

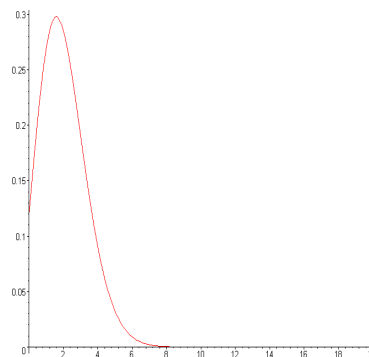
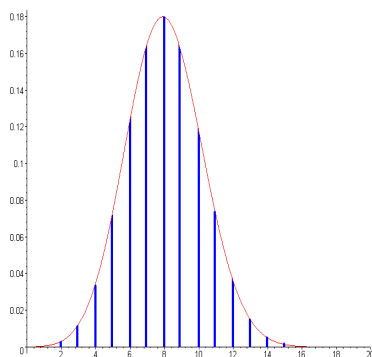
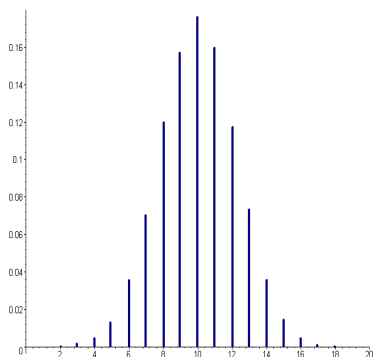
$$\begin{aligned} p(X < 8) = 1 - p(X \geq 8) &= 1 - [p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)] = \\ &= 1 - \left[ \binom{10}{8} \cdot 0'6^8 \cdot 0'4^2 + \binom{10}{9} \cdot 0'6^9 \cdot 0'4^1 + \binom{10}{10} \cdot 0'6^{10} \cdot 0'4^0 \right] = \\ &= 1 - [0'1209 + 0'0403 + 0'0060] = 1 - 0'1672 = 0'8328 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.32** Lanzamos 15 dados, y anotamos el número de veces que sale “4” ¿Es un experimento que se ajusta a una distribución binomial? Calcula el número esperado de veces que debería salir el número “4” al lanzar 15 dados.

Sí, en cada experimento aislado, tirar una vez un dado, la probabilidad de éxito (que salga “4”) es  $\frac{1}{6}$ . Si repito 15 veces el experimento (tirar los 15 dados), la probabilidad de éxito en cada uno (que salga “4”), sigue siendo la misma,  $\frac{1}{6}$ , por ello este suceso se ajusta a una Binomial  $B(15, \frac{1}{6})$ .

Respecto el número esperado,  $\mu = n \cdot p = 15 \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2'5$

### Para terminar con la binomial



Aquí se pueden ver varios ejemplos de la distribución binomial, en todos ellos,  $n = 20$ , mas en el de la izquierda se tiene  $p = 0'5$ , de donde se ve que la distribución de probabilidad está centrada en la media  $20 \cdot 0'5 = 10$ .

Si tomamos, segunda gráfica,  $p = 0'4$ , vemos que la misma tiene una forma parecida, centrándose en la media  $20 \cdot 0'4 = 8$ , pero se desplaza algo hacia la izquierda. Igualmente se aprecia que es factible aproximar la distribución de probabilidad con una campana de Gauss completa.

Finalmente, con un  $p = 0'1$ , más extremo, vemos que no hay campana de Gauss como tal, ya que la gráfica está tan desplazada, que las probabilidades de pocos éxitos son altas (lógico, con una  $p$  muy baja), y las de muchos éxitos muy bajas (algo lógico por el mismo motivo), por lo que la gráfica no es simétrica respecto la media, y no hay campana de Gauss como tal.

Algo que se aprecia es que si la  $p$  es cercana a  $0'5$ , es más fácil tener campana de Gauss que con una  $p$  cercana a los extremos 0 ó 1.

### Un truco final

A la hora de hacer problemas con la binomial, a veces nos interesará hacerlo con la probabilidad de éxito y a veces con la de fallo, la estrategia será, normalmente, hacer una especie tabla con dos filas, una para los éxitos, otra para los fracasos, y pasar al complementario.

←													$B(n,p)$ Éxitos
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$B(n,1-p)$ Fracasos
←													

Por ejemplo, una binomial con  $n = 12$ . Está claro que 0 éxitos se corresponden a 12 fracasos, 1 éxito se corresponde a 11 fracasos... (la suma debe ser siempre igual a  $n$ , en este caso 12). Por lo que por ejemplo, tener 3 o menos éxitos (flecha verde) es lo mismo que tener 9 o más fracasos.

Seguimos con el ejemplo de la binomial con  $n = 12$ , tener entre 4 y 7 éxitos es lo mismo que tener entre 5 y 8 fracasos, o tener más de 8 éxitos será lo mismo que obtener menos de 4 fracasos.

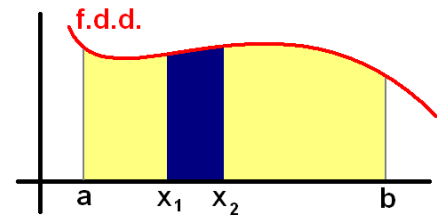
### 3.9. Distribuciones de probabilidad en el caso continuo

En su momento vimos la diferencia entre las variables estadísticas discretas, que se estudiaban de forma puntual, y las continuas, que se estudiaban por medio de intervalos. Esta diferencia también se va a poder trasladar a las distribuciones de probabilidad. Mientras las de tipo discreto, como la binomial, toman sus valores en puntos concretos, dando saltos la probabilidad en dichos puntos, las distribuciones de probabilidad de tipo continuo podrán alcanzar cualquier valor de un intervalo, por lo que la gráfica relacionada con la probabilidad será una curva continua (sin saltos).

De hecho, las distribuciones de probabilidad de variable continua se definen por medio de una función  $y = f(x)$  mayor o igual que cero para todo  $x$  que se llama función de probabilidad o función de densidad.

**Definición 3.10 (función de densidad)** *Dada una variable estadística continua, se le puede asignar una función de probabilidad, llamada función de densidad (f.d.d.), que asocie a cada intervalo de valores de la variable su probabilidad. Esta probabilidad viene dada por la razón entre el área que encierra la función de densidad entre los extremos del intervalo en cuestión y el área que encierra la función de densidad en todo su dominio:*

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{\text{área de } f \text{ en } [x_1, x_2]}{\text{área de } f \text{ en } [a, b]}$$



**Nota 3.30 (importante)** En esta situación la probabilidad de un punto aislado  $x_0$  es igual a cero, ya que

$$P(x_0) = P(x_0 \leq X \leq x_0) = \frac{\text{área de } f \text{ en } [x_0, x_0]}{\text{área de } f \text{ en } [a, b]} = \frac{0}{\text{área de } f \text{ en } [a, b]} = 0$$

Por ello, en el caso de V.E. continuas se deduce que  $P(X < x_0) = P(X \leq x_0)$  y análogamente se deduce que  $P(X > x_0) = P(X \geq x_0)$ .

**Nota 3.31** Igualmente se deduce que el área encerrada por la función de densidad en todo su dominio, todo  $\mathbb{R}$ , es igual a 1.

**Nota 3.32** Al igual que para el caso de las V.A. discretas, podrían definirse los parámetros estadísticos  $\mu$ ,  $\sigma^2$  y  $\sigma$ , si bien al calcularse a partir de áreas habría que usar el cálculo integral, y por ello no las definiremos de forma general, sólo para el caso de la Distribución Normal que veremos a continuación.

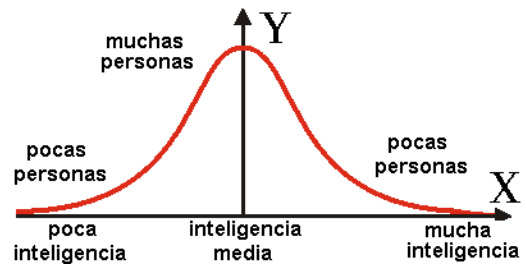
### 3.10. La distribución Normal

#### 3.10.1. La distribución Normal $N(\mu, \sigma)$

La distribución normal es un caso particular de distribución de probabilidad de variable continua, y es muy importante al tener una función de probabilidad (densidad) en forma de campana de gauss, lo que se ajusta muy bien a muchísimos experimentos y fenómenos aleatorios que estudian en una población determinada una característica concreta, como:

- Caracteres morfológicos de las personas; talla, peso, envergadura, inteligencia...
- Caracteres fisiológicos; efectos de una vacuna, de una dosis de abono, de una droga...
- Caracteres sociológicos; consumo de productos, días a la semana de salidas nocturnas...
- Caracteres físicos; duración de bombillas, resistencia de presas, % de piezas defectuosas...

Todos los fenómenos anteriores tienen algo en común; si representamos las distintas frecuencias de los distintos valores, dicha gráfica, continua, tiene forma de campana más o menos simétrica, y en ella los valores más pequeños del recorrido (por ejemplo si hablamos de inteligencia las personas con menor coeficiente intelectual) son las menos, a medida que vamos avanzando en el recorrido, las frecuencias aumentan, en la media la campana alcanza la máxima altura (por ejemplo, la mayoría de las personas tiene una inteligencia media), para ir decreciendo la campana a partir de que el recorrido pasa de la media (cada vez hay menos personas superdotadas o de un coeficiente intelectual cada vez más alto)

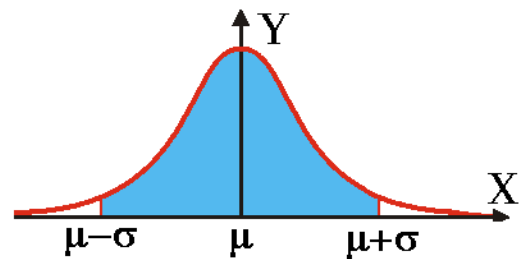


Muchos fenómenos de la vida real se ajustan a dicha distribución de probabilidad, y por ello tiene importancia una función matemática que se ajusta a dicha forma de campana, y es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

No nos preocupamos ahora de qué significa la expresión del margen; es la que es y nosotros NO la vamos a utilizar, pero sí es interesante saber que según lo que valgan  $\mu$  y  $\sigma$ , la campana será de forma más rechoncha o picuda, aproximándose más o menos a una distribución de la vida real, como el estudio de la inteligencia en una población. Igualmente es importante decir que el área total encerrada por la misma es 1.

Por eso es interesante estudiar estas funciones con forma de campana, y de hecho, si consideramos que  $\mu$  es la media de una distribución continua, y que  $\sigma$  es su desviación típica, la expresión anterior se llama función de densidad de una normal de media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ , llamada  $N(\mu, \sigma)$ , y su gráfica es la del margen, una campana más o menos rechoncha centrada en  $\mu$ , donde efectivamente en el intervalo  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$  va a estar el grueso de las observaciones:



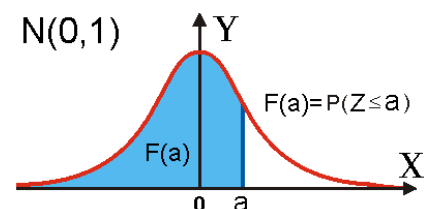
Pero como ya se ha dicho antes, para calcular probabilidades en distribuciones de probabilidad continuas hace falta calcular áreas, y para ello hace falta el cálculo integral, algo dificultoso, por lo que para calcular probabilidades de continuas lo que se acaba usando son tablas en las que alguien ya ha calculado las citadas probabilidades. Claro está, hay infinitos  $\mu$  y  $\sigma$ , pero no puede haber infinitas tablas, así que se estudia en especial una, la tabla de probabilidades de la distribución normal  $N(0, 1)$ , o aquella de media 0 y desviación típica 1. Caso concreto, sí, pero muy interesante, ya que puede ser aproximada por sencillas binomiales, y además, mediante un proceso llamado tipificación va a ser posible pasar de  $N(0, 1)$  a cualquier  $N(\mu, \sigma)$ .

### 3.10.2. La Distribución Normal standard, $Z = N(0, 1)$

La distribución  $Z$  o  $N(0, 1)$ , es aquella normal de media 0 y desv.típica 1, y la tabla que permite calcular  $p(Z \leq a)$  con  $0 \leq a < 4$  es la siguiente (el resto de casos los veremos en el punto 3.10.4):

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
<b>0,0</b>	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
<b>0,1</b>	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
<b>0,2</b>	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
<b>0,3</b>	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
<b>0,4</b>	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
<b>0,5</b>	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
<b>0,6</b>	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
<b>0,7</b>	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
<b>0,8</b>	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
<b>0,9</b>	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
<b>1,0</b>	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
<b>1,1</b>	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
<b>1,2</b>	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
<b>1,3</b>	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
<b>1,4</b>	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
<b>2,0</b>	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
<b>2,1</b>	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
<b>2,2</b>	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
<b>2,3</b>	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
<b>2,4</b>	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
<b>2,5</b>	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
<b>2,6</b>	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
<b>2,7</b>	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
<b>2,8</b>	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
<b>2,9</b>	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
<b>3,0</b>	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
<b>3,1</b>	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
<b>3,2</b>	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
<b>3,3</b>	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
<b>3,4</b>	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
<b>3,5</b>	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
<b>3,6</b>	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
<b>3,7</b>	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
<b>3,8</b>	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
<b>3,9</b>	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Usarla es bien sencillo, la probabilidad de que  $Z$  valga menor o igual que  $a$ ,  $P(Z \leq a)$  se calcula leyendo primero la columna de la izquierda (que representa las unidades y décimas de  $a$ ), y después la fila de arriba (centésimas de  $a$ ), así por ejemplo,  $P(Z \leq 1'78) = 0'9625$ , tras cruzar la fila 1'7 con la columna 0'08. Otro ejemplo,  $P(Z \leq 1'32) = 0'9066$

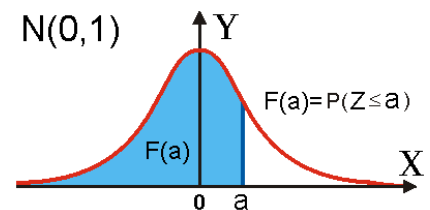


### 3.10.3. La Distribución Normal standard algo mejorada

Esta es una tabla  $Z = N(0, 1)$  con más precisión que la anterior (es la usada en selectividad).

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
<b>0,0</b>	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
<b>0,1</b>	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
<b>0,2</b>	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
<b>0,3</b>	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
<b>0,4</b>	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
<b>0,5</b>	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
<b>0,6</b>	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
<b>0,7</b>	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
<b>0,8</b>	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
<b>0,9</b>	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
<b>1,0</b>	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
<b>1,1</b>	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
<b>1,2</b>	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
<b>1,3</b>	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
<b>1,4</b>	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
<b>2,0</b>	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
<b>2,1</b>	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
<b>2,2</b>	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
<b>2,3</b>	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
<b>2,4</b>	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
<b>2,5</b>	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
<b>2,6</b>	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
<b>2,7</b>	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
<b>2,8</b>	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
<b>2,9</b>	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
<b>3,0</b>	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
<b>3,1</b>	0,99903	0,99906	0,99909	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
<b>3,2</b>	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
<b>3,3</b>	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99959	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
<b>3,4</b>	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
<b>3,5</b>	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
<b>3,6</b>	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
<b>3,7</b>	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992
<b>3,8</b>	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
<b>3,9</b>	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
<b>4,0</b>	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Usarla es bien sencillo, la probabilidad de que  $Z$  valga menor o igual que  $a$ ,  $P(Z \leq a)$  se calcula leyendo primero la columna de la izquierda (que representa las unidades y décimas de  $a$ ), y después la fila de arriba (centésimas de  $a$ ), así por ejemplo,  $P(Z \leq 1'78) = 0'9625$ , tras cruzar la fila 1'7 con la columna 0'08. Otro ejemplo,  $P(Z \leq 1'32) = 0'9066$

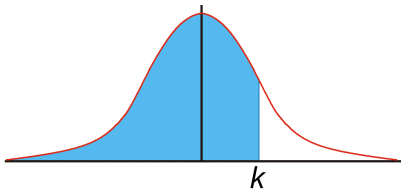


### 3.10.4. Problemas de cálculo relacionados con la tabla de $Z$ ; problemas directos.

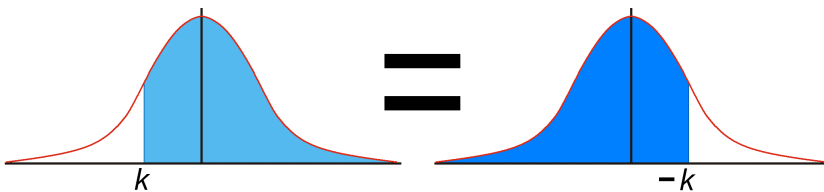
En esta sección vamos a dar los diferentes casos que se pueden presentar a la hora de calcular problemas relacionados con la tabla de la normal estándar. En los problemas directos el punto de referencia es conocido y la probabilidad desconocida. Lo conveniente no es que el alumno se las aprenda, sino que sepa cómo razonarlas, por ejemplo haciendo los correspondientes dibujos y teniendo en cuenta la simetría de la función en forma de campana.

Se presentan los cuatro casos siguientes:

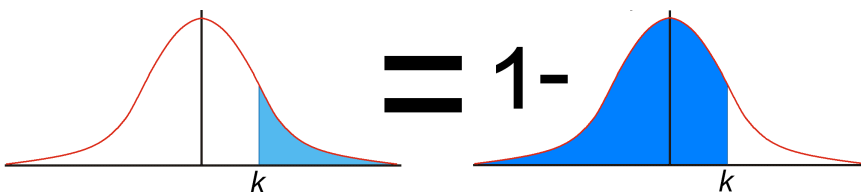
- $\left. \begin{array}{l} p(Z \leq k) \\ k \text{ positivo} \end{array} \right\}$  Se usa la tabla



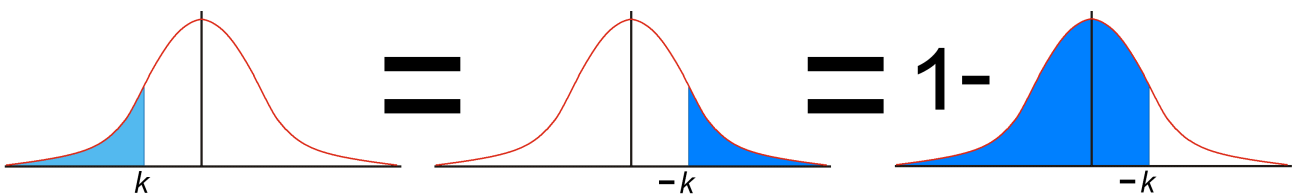
- $\left. \begin{array}{l} p(Z \geq k) \\ k \text{ negativo} \end{array} \right\} = p(Z \leq -k)$  con  $-k$  positivo, y se usa la tabla



- $\left. \begin{array}{l} p(Z \geq k) \\ k \text{ positivo} \end{array} \right\} = 1 - p(Z \leq k)$  con  $k$  positivo, y se usa la tabla



- $\left. \begin{array}{l} p(Z \leq k) \\ k \text{ negativo} \end{array} \right\} = 1 - p(Z \leq -k)$  con  $-k$  positivo, y se usa la tabla



- $\left. \begin{array}{l} p(a \leq Z \leq b) \\ \text{con } a < b \end{array} \right\} = p(Z \leq b) - p(Z \leq a)$ , y se resuelve según casos anteriores

**Nota 3.33 (importante)** En los ejemplos anteriores, hemos usado  $\leq$  y  $\geq$  en lugar de  $<$  y  $>$ . A efectos prácticos es lo mismo, ya que solo se difiere en la probabilidad de que  $Z$  valga o no el punto extremo, y como se ha dicho en la nota 3.30, dicha probabilidad es cero.

**Nota 3.34** Es importante comprender que la probabilidad de que  $Z$  sea menor que un punto es igual a todo el área encerrada por debajo de la curva antes de dicho punto, por lo que en cierta forma lo que va haciendo la curva, a medida que vamos de  $-\infty$  a  $+\infty$  es acumular probabilidad.

**Nota 3.35** Es importante comprender que la gráfica es simétrica, y que a la izquierda del 0 hay una probabilidad de 0'5 (esa es la probabilidad acumulada antes del 0), y otro tanto a la derecha del cero (esa es la que falta por acumular para que el total sea 1).

**Nota 3.36** Es importante comprender que a partir de 4, la gráfica se pega tanto al eje de abscisas que con 4 decimales ya no se acumula probabilidad.

**Nota 3.37** Por ello, aunque la tabla sólo calcula  $p(Z \leq a)$  para  $a < 4$ , es evidente que  $p(Z \leq a) = 1$  si  $a$  fuese mayor que cuatro (si usamos 4 decimales).

**Ejemplo 3.33** Sea  $Z = N(0, 1)$ . Calcular las siguientes probabilidades; como indicación, seguir los comentarios adjuntos:

- $p(Z < 0'86)$ ; nada que comentar, el caso más directo, se mira directamente la tabla;  $p(Z < 0'86) = 0'8051$ .
- $p(Z \leq 0'86)$ ; coincide con la anterior, en las distribuciones de probabilidad continuas las probabilidades de un punto son cero;  $p(Z \leq 0'86) = p(Z < 0'86) = 0'8051$ .
- $p(Z = 0'86)$ ; ya se ha dicho; las probabilidades de los puntos aislados en las continuas son cero;  $p(Z = 0'86) = 0$ .
- $p(Z > -0'21)$ ; se aplica la simetría de la gráfica y se mira la tabla;  $p(Z > -0'21) = p(Z < 0'21) = 0'5832$
- $p(Z \geq -2'35)$ ; se aplica la simetría de la tabla y se mira la tabla;  $p(Z \geq -2'35) = p(Z \leq 2'35) = 0'9906$
- $p(Z < -2'08)$ ; primero se usa la simetría de la curva, se aplica la propiedad del complementario y finalmente se mira la tabla;  $p(Z < -2'08) = p(Z > 2'08) = 1 - p(Z \leq 2'08) = 1 - 0'9808 = 0'0192$
- $p(Z \leq -1'26)$ ; primero se usa la simetría de la curva, se aplica la propiedad del complementario y finalmente se mira la tabla;  $p(Z \leq -1'26) = p(Z > 1'26) = 1 - p(Z \leq 1'26) = 1 - 0'8770 = 0'1230$
- $p(Z > 1'43)$ ; complementario y se mira la tabla;  $p(Z > 1'43) = 1 - p(Z \leq 1'43) = 1 - 0'9236 = 0'0760$
- $p(Z \geq 3'4)$ ; complementario y se mira la tabla;  $p(Z \geq 3'4) = 1 - p(Z < 3'4) = 1 - 0'9997 = 0'0003$
- $p(-3'1 \leq Z < 1'07)$  es igual a la diferencia de dos probabilidades; a  $p(Z < 1'07)$  le quito  $p(Z < -3'1)$ ; así  $p(-3'1 \leq Z < 1'07) = p(Z < 1'07) - p(Z < -3'1) = 0'8577 - [1 - p(Z < 3'1)] = 0'8577 - 1 + 0'9990 = 0'8567$ .

**Nota 3.38 (importante)** Como se ve, de lo que se trata es, tal vez usando la simetría y la propiedad del complementario, de buscar el caso  $p(Z \leq k)$  con  $k$  positivo, ya que es el único caso en el que podemos mirar la tabla.

**Nota 3.39** A la hora de usar el complementario en los ejemplos anteriores, yo he cambiado los signos  $<$  por  $\geq$ , los signos  $>$  por  $\leq$  y viceversa. Formalmente ha de ser así, pero si cambiase los signos  $<$  por  $>$  o los signos  $\leq$  por  $\geq$  y viceversa, aunque formalmente no estuviese bien, los resultados serían los mismos ya que se insiste (ya lo hemos dicho en las notas 3.30 y 3.33) en que las probabilidades de los puntos son cero para las distribuciones continuas, en particular para la normal  $N(0, 1)$ .

### 3.10.5. Problemas de cálculo relacionados con la tabla de $Z$ ; problemas indirectos.

Se supone que ya sabemos mirar la tabla de  $Z = N(0, 1)$  y calcular la probabilidad de cualquier tramo, ya sea por ejemplo  $p(Z < 0'7)$ ,  $p(Z \geq -0'3)$ ,  $p(Z \leq -2'81)$ ,  $p(Z > 1'14)$  o  $p(-2'1 \leq Z < 3'02)$ . Este tipo de cuestiones son de tipo directo; queremos saber la probabilidad encerrada por  $Z$  a lo largo de un tramo de la recta real, buscamos en la tabla el oportuno  $k$ , hacemos las correcciones oportunas, y se acabó el problema.

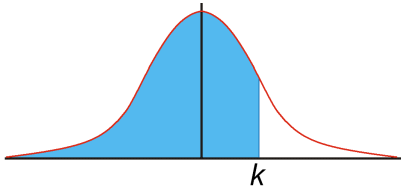
También están los problemas indirectos, o aquellos en los que conocemos una probabilidad y lo que nos preguntan es cuál es el punto de la recta real que la genera; por ejemplo, si me preguntaran cuál es el  $k$  de modo que  $p(Z < k) = 0'8729$ , la respuesta sería  $k = 1'14$ , ya que si miro la tabla tengo que  $p(Z < 1'14) = 0'8729$ .

Este tipo de problemas se resolverá mirando la tabla de la  $N(0, 1)$ , que como es sabido, se aplica para  $p(Z \leq k)$  igual a algo entre 0'5 y 1. Para el resto de casos tendremos que hacer unos ajustes

para poder usar la tabla. De nuevo, lo conveniente no es que el alumno se aprenda las fórmulas de los 4 casos, sino que sepa cómo razonarlas, por ejemplo haciendo los correspondientes gráficos. Los cuatro casos que pueden darse (los tres últimos hay que pasarlos de alguna forma al primero) son:

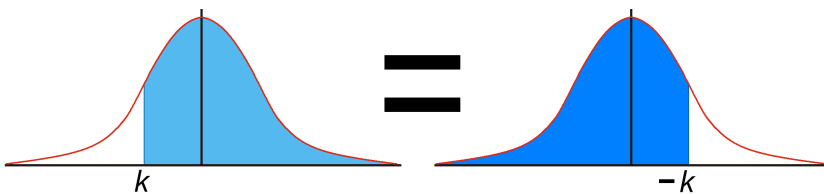
- $P(Z \leq k) = \text{algo mayor que } 0'5$

*Se usa la tabla para calcular  $k$ . No cambio el signo.*



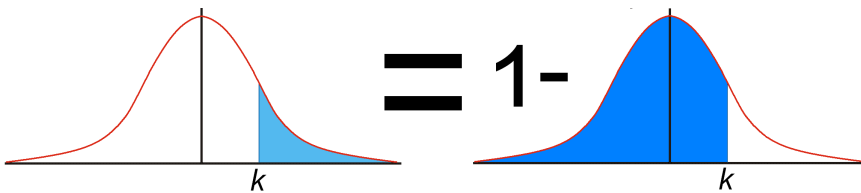
- $P(Z \geq k) = \text{algo mayor que } 0'5$

*De nuevo debe salir  $k < 0$ . El truco es: “en vez de resolver  $P(Z \geq k) \geq 0'5$ , lo que resuelvo en la tabla es  $P(Z \leq k) \geq 0'5$ , y una vez obtenido  $k$ , le cambio el signo”.*



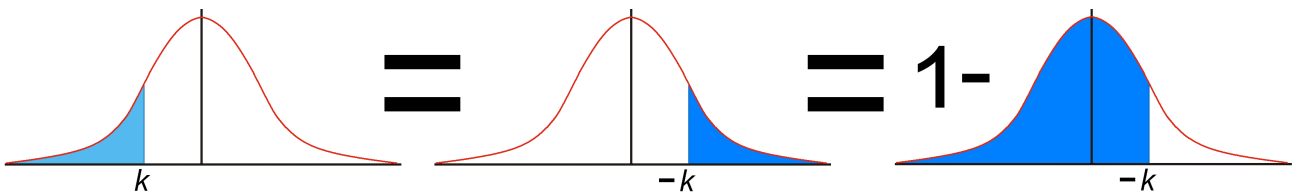
- $P(Z \geq k) = \text{algo menor que } 0'5$

*Ahora debe salir  $k > 0$ . El truco es: “le resto a 1 la probabilidad  $< 0'5$ , y calculo  $k$  mirando la tabla”. No cambio el signo.*



- $P(Z \leq k) = \text{algo menor que } 0'5$

*En este caso debe salir  $k < 0$ . El truco es: “a 1 le resto la probabilidad  $< 0'5$ , calculo el  $k$  según la tabla, saliendo positivo, y le cambio el signo a  $k$ ”.*



**Nota 3.40** Estos problemas de tipo indirecto van a ser muy útiles, ya que nos van a permitir calcular los cuantiles e intervalos característicos del punto 3.12, y cuando veamos la inferencia estadística, los valores  $Z_{\alpha/2}$  de los intervalos de confianza.

**Ejemplo 3.34** Determinar los  $k$  que hacen ciertas las siguientes igualdades.

1.  $p(Z \leq k) = 0'9788$

Estamos en el primer caso, la probabilidad de que  $Z$  sea menor o igual que  $k$  es una cantidad mayor que  $0'5$ . La tabla de la  $N(0, 1)$  está hecha para calcular la probabilidad de que  $Z$  sea menor o igual que  $k$  y nos da valores mayores que  $0'5$ , así que lo que hacemos es mirar directamente la tabla, y buscar cuál es el valor que tras mirar en la tabla nos da  $0'9788$ . En este caso la solución es  $2'03$ , ya que mirando la tabla,  $p(Z \leq 2'03) = 0'9788$ .

2.  $p(Z \geq k) = 0'9686$ 

Este es el llamado caso segundo. La fórmula dice que en vez de resolver  $p(Z \geq k) = 0'9686$  resuelva  $p(Z \leq -k) = 0'9686$ . En dicho caso, tras mirar la tabla tengo que  $-k = 1'86$ , por lo que  $k = -1'86$ .

La respuesta anterior es la correcta, pero veamos cómo deducirla sin aprender ninguna fórmula. Si se tiene que  $p(Z \geq k) = 0'9686$ , está claro que  $k$  es negativo, ya que de 0 a  $+\infty$  hay una probabilidad de 0'5. Como la probabilidad que me dan es mayor que 0'5,  $k$  queda por detrás de 0, habiendo 0'4686 de probabilidad de  $k$  a 0, y el 0'5 de 0 a  $+\infty$ , y ya lo he dicho, si  $k$  está antes del cero, es que es negativo. Uso ahora que la gráfica es simétrica, y la misma probabilidad hay de  $k$  a  $+\infty$  que de  $-\infty$  a  $-k$ , por lo que  $p(Z \geq k) = 0'9686$  es lo mismo que  $p(Z \leq -k) = 0'9686$ , y ya lo tengo todo para mirar la tabla de la  $N(0, 1)$ ; si  $k$  era negativo,  $-k$  es positivo, tengo también  $p(Z \leq -k)$ , y esto es igual a 0'9686 que es un número mayor que 0'5. Mirando la tabla, veo que  $-k = 1'86$ ,  $p(Z \leq 1'86) = 0'9686$ , pero busco  $k$  y no  $-k$ , así que cambio el signo; si  $-k = 1'86$ , es que  $k = -1'86$ .

3.  $p(Z \geq k) = 0'1038$ 

Caso tercero. La fórmula me dice que efectúe  $1 - 0'1038 = 0'8962$  y que sencillamente mire en la tabla quién me da esa probabilidad, por lo que  $k = 1'26$ , que es la solución.

De nuevo, explico el razonamiento que permite no aprenderse la oportuna fórmula. Yo sé que de 0 a  $+\infty$  hay una probabilidad de 0'5, como  $p(Z \geq k)$  es menor que 0'5, deduzco que  $k$  es positivo, que es una de las condiciones para usar la tabla. Otra condición es que la probabilidad sea mayor que 0'5, que no es el caso, así que voy a usar la propiedad del complementario; si  $p(Z \geq k) = 0'1038$ , es que  $p(Z < k) = 1 - 0'1038 = 0'8962$ , y ese valor sí lo puedo mirar en la tabla (lo tengo todo;  $k$  positivo,  $p(Z < k)$  y una probabilidad mayor que 0'5), de donde  $k = 1'26$ , que es la solución. Sí, he tomado el complementario de la probabilidad, pero  $k$  sigue siendo positivo.

4.  $p(Z \leq k) = 0'0207$ 

Este es el llamado caso cuarto. La teoría me dice que le reste a 1 dicha probabilidad de 0'0207, saliendo finalmente  $1 - 0'0207 = 0'9793$  que es lo que debo buscar en la tabla, de donde  $k = 2'04$ , y por ello la solución sale tras cambiar el signo y tomar  $k = -2'04$ . Esa es la solución correcta, pero como yo no quiero aprenderme fórmulas, el razonamiento es el siguiente:

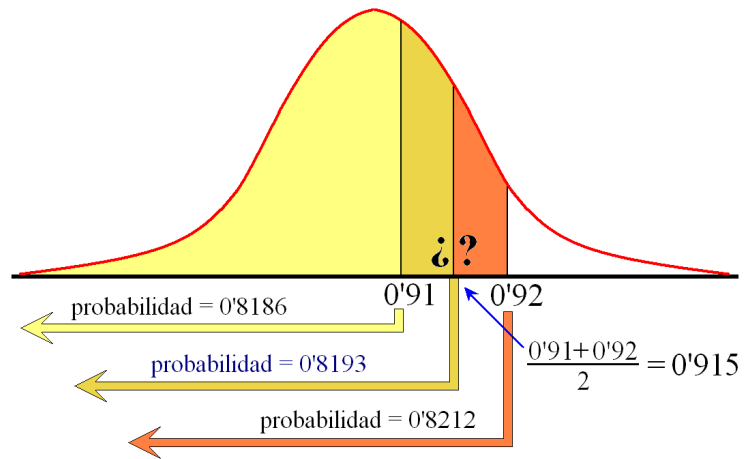
Me están pidiendo  $k$  de modo que la probabilidad de que  $p(Z \leq k) = 0'0207$ . La probabilidad conocida es de 0'0207, que es menor de 0'5, por lo que yo sé que el  $k$  buscado es negativo (la probabilidad acumulada de  $-\infty$  a 0 de la expresión  $Z \leq k$  es igual a 0'5, como la probabilidad que yo tengo es de  $0'0207 < 0'5$ , está claro que  $k$  está entre  $-\infty$  y 0, y por ello  $k$  es negativo). La gráfica es simétrica, así que el área que hay de  $-\infty$  a  $k$  es el mismo que de  $k$  a  $+\infty$ , esto es,  $p(Z \leq k) = p(Z \geq -k)$ , con  $-k$  positivo, ahora bien, para mirar correctamente la tabla de  $Z$ , no sólo ha de ser  $-k$  positivo, sino tenerse  $Z \leq -k$ , y no  $Z \geq k$ . Ello se corrige tomando complementarios, ya que  $p(Z \geq -k) = 1 - p(Z < -k)$ , y esta última expresión ya puede buscarse en la tabla, al ser un  $Z <$  algo positivo.

En definitiva, de  $p(Z \leq k) = 0'0207$  paso a  $1 - p(Z > -k) = 0'0207$ , por lo que  $p(Z \leq -k) = 1 - 0'0207 = 0'9793$ , que sí se puede mirar en la tabla, por lo que de  $p(Z \leq -k) = 0'9793$  deduzco que  $-k = 2'04$ , por lo que el  $k$  buscado es  $k = -2'04$ .

**Nota 3.41** Aunque los ejemplos anteriores se han hecho para  $p(Z \leq k)$  o  $p(Z \geq k)$ , se insiste en que las soluciones son las mismas que si hubiésemos puesto  $p(Z < k)$  o  $p(Z > k)$ , ya que dichas expresiones sólo difieren en un punto, y la probabilidad de una distribución continua como la normal en un punto es igual a cero.

**Nota 3.42 (importante)** Ya sabemos cómo calcular problemas indirectos relacionados con la tabla de la distribución normal  $N(0, 1)$ . Si nos fijamos, en todos los problemas anteriores, cuando hemos mirado la tabla, hemos tenido la suerte de buscar valores que sí estaban en la tabla. Ello no pasará siempre. Por ejemplo,  $p(Z \leq k) = 0'8186$  tiene de solución  $k = 0'91$ , mientras  $p(Z \leq k) = 0'8212$  tiene de solución  $k = 0'92$ . Pero ¿y si quisiera resolver  $p(Z \leq k) = 0'8193$ ? Pues me encontraría con que 0'8193 no está en la tabla y que directamente no puedo calcular  $k$ .

En estos casos usaremos la estrategia de promediar: 0'8193 está entre 0'8196 y 0'8212, que se corresponden respectivamente a  $k = 0'91$  y  $k = 0'92$ , así que el  $k$  asociado a 0'8193 debería estar entre 0'91 y 0'92, por lo que tomaremos el promedio de 0'91 y 0'92, que es igual a 0'915 (la forma más directa de calcular el promedio de dos números consecutivos es añadir un 5 tras la última cifra decimal del número más pequeño, pasando de 0'91 a 0'915).



**Nota 3.43** El tomar el promedio tampoco nos va a garantizar tomar el  $k$  exacto, pero nos vamos a aproximar más que tomando los dos extremos.

**Nota 3.44** Si en el ejemplo anterior  $p(Z \leq k) = 0'8193$  no promediara, y tuviera que decidir si quedarme con 0'91 o 0'92, me quedaría con este último, ya que  $p(Z \leq 0'91) = 0'8186$ , que no llega a 0'8193, mientras que  $p(Z \leq 0'92) = 0'8212$ , que se pasa. Realmente, tanto 0'91 que no llega, como 0'92 que se pasa, no son satisfactorios, pero como el enunciado es ¿cuál es el  $k$  de modo que  $p(Z \leq k) = 0'8193$ ? o sea ¿cuál es el  $k$  que delante suyo hay una probabilidad de 0'8193?, si tomo  $k = 0'91$  no hemos llegado a esa probabilidad, así que el enunciado no es cierto. Al tomar  $k = 0'92$  es cierto que nos pasamos, pero delante suya sí hay esa probabilidad de 0'8193, por lo que tomaríamos el valor por exceso. De todos modos, en este tipo de casos lo que haremos será promediar.

**Ejemplo 3.35** Resolver los siguientes ejercicios indirectos relacionados con la tabla  $N(0, 1)$

1. Hallar  $k$  de modo que  $p(Z \leq k) = 0'6789$

Es un problema del caso primero,  $Z \leq k$  y probabilidad entre 0'5 y 1, así que  $k > 0$  y aplico directamente la tabla, pero veo que la probabilidad 0'6789 no está en la misma, si están 0'6772 (asociada a 0'46) y 0'6808 (asociada a 0'47). Como 0'6789 está entre 0'6772 y 0'6808, tomo  $k$  entre 0'46 y 0'47, por ejemplo la media,  $k = 0'465$ .

2. Hallar  $k$  de modo que  $p(Z < k) = 0'3112$

En este caso,  $k$  va a salir negativo. El procedimiento es usar primero la simetría, y después el complementario:  $p(Z < k) = p(Z > -k) = 1 - p(Z \leq -k) = 0'3112$ , por ello,  $p(Z \leq -k) = 1 - 0'3112 = 0'6888$ , que sí puedo buscarlo en la tabla, aunque no está. Como en la tabla 0'6888 está entre 0'6879 y 0'6915, asociados a 0'49 y 0'50,  $-k$  está entre estos dos valores, y tomo la media,  $-k = 0'495$ , y de aquí  $k = 0'495$ .

3. Hallar  $k$  de modo que  $p(Z > k) = 0'4532$

En este caso,  $k$  va a salir positivo. El procedimiento es usar el complementario:  $p(Z > k) = 1 - p(Z \leq k) = 0'4532$ , por ello,  $p(Z \leq k) = 1 - 0'4532 = 0'5468$ , que sí puedo buscarlo en la tabla, aunque no está. Como 0'5468 está entre 0'5438 y 0'5478, asociados a 0'11 y 0'12,  $k$  está entre estos dos valores, y tomo la media,  $k = 0'115$ .

De todos modos, en este ejemplo vemos que realmente 0'5468 está mucho más cerca de 0'5478 que de 0'5438, por lo que quizás un valor más apropiado en vez de la media 0'115 fuera 0'1175 o 0'118, si bien lo dejaremos así.

4. Hallar  $k$  de modo que  $p(Z \geq k) = 0'8251$

En este caso,  $k$  va a salir negativo. El procedimiento es usar la simetría;  $p(Z \geq k) = p(Z \leq -k) = 0'8251$ , por ello, mirando la tabla, Como en la tabla 0'8251 está entre 0'8238 y 0'8264, asociados a 0'93 y 0'94,  $-k$  está entre estos dos valores, y tomo la media,  $-k = 0'935$ , de donde  $k = -0'935$ , donde ahora la media 0'935 si parece bien situada (la media de 0'8238 y 0'8264 es precisamente 0'8251).

### 3.11. Tipificación de una $N(\mu, \sigma)$

Como hemos visto, el cálculo de probabilidades en una Distribución Normal estándar  $Z = N(0, 1)$  se realiza mediante el uso de la tabla de probabilidades de la página 30. ¿Qué sucede para una

distribución  $N(\mu, \sigma)$  cualquiera? No existen tablas para cada uno de los infinitos  $\mu$  e infinitos  $\sigma$  que pueden presentarse.

Existe otra forma de calcular éstas probabilidades para cualquier  $N(\mu, \sigma)$ ; relacionarla con la normal estándar y usar su tabla de probabilidades usando dos importantes propiedades que cumplen las distribuciones normales:

- Si se le suma o resta a todos los valores de la variable una constante, a su media también:

$$\text{Si } X \simeq N(\mu, \sigma) \quad \text{entonces} \quad X + a \simeq N(\mu + a, \sigma)$$

- Si se multiplican o dividen todos los valores de la variable por una constante, su media y su desviación típica también quedan multiplicados o divididos:

$$\text{Si } X \simeq N(\mu, \sigma) \quad \text{entonces} \quad k \cdot X \simeq N(k\mu, k\sigma)$$

**Definición 3.11 (Tipificación de la variable)** Usando ambas propiedades, si a los valores de una variable  $X$  le restamos su media  $\mu$  y lo dividimos por su desviación típica  $\sigma$ , se obtiene:

$$X \simeq N(\mu, \sigma) \implies \frac{X - \mu}{\sigma} \simeq N\left(\frac{N - \mu}{\sigma}, \frac{\sigma}{\sigma}\right) = N(0, 1)$$

A este proceso se le llama **tipificación** de la variable  $X \simeq N(\mu, \sigma)$

**Nota 3.45** En todo este proceso se supone  $\sigma \neq 0$ . Esto no es ninguna restricción, ya que salvo que todos los valores sean idénticos, la desviación típica será distinta de cero.

**Nota 3.46 (importante)** Cualquier distribución normal  $N(\mu, \sigma)$  está relacionada mediante la tipificación con la distribución normal estándar  $Z$ . En general se tiene:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

**Nota 3.47** Usaremos el proceso de tipificación cuando tengamos que calcular la probabilidad de cualquier normal que no sea la  $N(0, 1)$ , ya que tras tipificar tendremos una normal  $Z$  de la que sí tenemos su tabla. Es importante en cada etapa escribir  $X$  o  $Z$  según corresponda.

**Ejemplo 3.36** En una distribución  $X \simeq N(6, 4)$ , calcula:

- $p(X \leq 3) = p\left(\frac{X - 6}{4} \leq \frac{3 - 6}{4}\right) = p(Z \leq -0'75) = P(Z \geq 0'75) = 1 - p(Z \leq 0'75) = 1 - 0'7734 = 0'2266$
- $p(X \geq 12) = p\left(\frac{X - 6}{4} \geq \frac{12 - 6}{4}\right) = p(Z \geq 1'5) = 1 - p(Z \leq 1'5) = 1 - 0'9932 = 0'0668$
- $p(X < 7) = p\left(\frac{X - 6}{4} < \frac{7 - 6}{4}\right) = p(Z < 0'25) = 0'5987$
- $p(X > 3) = p\left(\frac{X - 6}{4} > \frac{3 - 6}{4}\right) = p(Z > -0'75) = p(Z < 0'75) = 0'7734$
- $p(5 \leq X \leq 8) = p\left(\frac{5 - 6}{4} \leq \frac{X - 6}{4} \leq \frac{8 - 6}{4}\right) = p(-0'25 \leq Z \leq 0'5) = p(Z \leq 0'5) - p(Z \leq -0'25) = 0'6915 - p(Z \geq 0'25) = 0'6915 - [1 - p(Z \leq 0'25)] = 0'6915 - 1 + 0'5987 = 0'2902$

**Nota 3.48** Los ejemplos anteriores de tipificación se corresponden a lo que hemos llamado problemas de mirar la tabla de tipo directo. Cuando calculemos los percentiles, o los intervalos característicos de probabilidad  $1 - \alpha$ , aprenderemos a tipificar en los problemas llamados indirectos

### 3.12. Cálculo de cuantiles e intervalos característicos en una $N(\mu, \sigma)$ .

#### 3.12.1. Cálculo de cuantiles

Los cuantiles o fractiles; a saber, los cuartiles, los deciles y los percentiles, servían para separar mediante porcentajes los valores de distribuciones estadísticas, pudiéndose hacer lo propio con las de probabilidad. Los citados cuantiles eran:

**Los cuartiles**  $Q_1, Q_2, Q_3$  y  $Q_4$ , que separan los valores de una distribución en tramos del 25 %; por ejemplo, el primer 25 % de los datos está antes de  $Q_1$ , el 50 % central está entre  $Q_1$  y  $Q_3$ , etc.

**Los deciles**  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8$  y  $D_9$ , que separan los valores de una distribución en tramos del 10 %; así por ejemplo el primer 20 % de los datos está antes de  $D_2$ . El último 10 % está tras  $D_9$ , el 20 % central está entre  $D_4$  y  $D_5$ .

**Los percentiles**  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_{97}, P_{98}$  y  $P_{99}$ , que separan los valores de una distribución en tramos del 1 %; así por ejemplo el primer 7 % de los datos está antes de  $P_7$ . El último 12 % está tras  $P_{88}$ , el 16 % central está entre  $P_{42}$  y  $P_{56}$ .

En el caso de Variables estadísticas discretas o continuas se calculaban mirando dónde la frecuencia absoluta acumulada  $F_i$  sobrepasaba determinados valores que tenían que ver con el tipo de cuantil, el número de cuantil y el número de observaciones. En el caso de variables aleatorias continuas vamos a ver que el concepto es muy similar, si bien se va a corresponder a lo que nosotros llamamos un problema de tipo indirecto (habrá que buscar una probabilidad en la tabla y calcular el punto sobre el que se aplica).

Para este tipo de problemas también pueden darse fórmulas para cada caso concreto, pero es preferible comprender bien cuál es el proceso de cálculo, ya que no estamos haciendo nada nuevo, sólo aplicar lo dicho en el punto 3.10.5.

**Ejemplo 3.37** Establecer el valor en el que una  $N(0, 1)$  deja por delante suyo el 58 % de los datos.

- Tengo una  $N(0, 1)$ , y me preguntan por  $P_{58}$ , o aquel valor que deja delante suya una probabilidad de 0'58. El planteamiento es:
- Busco  $P_{58}$  de forma que  $p(Z \leq P_{58}) = 0'58$ .
- Claramente, es un problema de tipo indirecto, busco 0'58 en la tabla, y veo que 0'58 está entre 0'5793 y 0'5832, asociados a 0'20 y 0'21 respectivamente, así que tomo  $P_{58} = 0'205$ .

**Ejemplo 3.38** Establecer el valor en el que una  $N(0, 1)$  deja por delante suyo el 36 % de los datos.

- Tengo una  $N(0, 1)$ , y me preguntan por  $P_{36}$ , o aquel valor que deja delante suya una probabilidad de 0'36. El planteamiento es:
- Busco  $P_{36}$  de forma que  $p(Z \leq P_{36}) = 0'36$ .
- De nuevo, es claramente un problema de tipo indirecto. El problema es que en la tabla no aparece 0'36, ya que es una probabilidad más pequeña que 0'5, mientras en tabla sólo puedo buscar probabilidades entre 0'5 y 1, así que debo hacer algún ajuste (voy a aplicar respectivamente el complementario y la simetría de la tabla).
- Si  $P_{36}$  deja por delante suyo el 0'36, es que deja por detrás  $1 - 0'36 = 0'64$ , o lo que es lo mismo,  $-P_{36}$  deja por delante suyo la probabilidad 0'64, que está entre 0'6368 y 0'6406, asociados respectivamente a 0'35 y 0'36, por lo que promediando,  $-P_{36} = 0'355$ , y por ello,  $P_{36} = -0'355$ .

**Ejemplo 3.39** Establecer el valor en el que una  $N(0, 1)$  deja por detrás suyo el 75 % de los datos.

- Tengo una  $N(0, 1)$ , y me preguntan por  $P_{25}$ , o aquel valor que deja delante suya una probabilidad de 0'25 (ya que deja por detrás otra de 0'75).
- Busco  $P_{25}$  de forma que  $p(Z \leq P_{25}) = 0'25$ .
- De nuevo, es claramente un problema de tipo indirecto y de nuevo, como 0'25 es más pequeño que 0'5, el percentil va a ser negativo y deberé hacer algún ajuste previo.
- Si  $P_{25}$  deja por delante el 0'25, es que deja por detrás el 0'75, o lo que es lo mismo,  $-P_{25}$  deja por delante suyo la probabilidad 0'75, que mirando en la tabla, está entre 0'7486 y 0'7517, asociados respectivamente a 0'67 y 0'68, por lo que promediando,  $-P_{25} = 0'675$ , y por ello,  $P_{25} = -0'675$ .

**Ejemplo 3.40** En una  $N(0, 1)$ ,  $P_{66} = 0'425$

En efecto, me preguntan cuál es el  $P_{66}$  de modo que  $p(Z \leq P_{66}) = 0'66$ , ya que  $P_{66}$  deja por debajo suyo el 66% de los datos. Mirando la tabla  $N(0, 1)$  y promediando,  $P_{66} = 0'425$

**Ejemplo 3.41** En una  $N(0, 1)$ ,  $P_{34} = -0'415$

En efecto, me preguntan cuál es el  $P_{34}$  de modo que  $P(Z \leq P_{34}) = 0'34$ , como  $0'34$  no puedo verlo en la tabla, hago algún ajuste;  $0'34 = p(Z \leq P_{34}) = p(Z \geq P_{66}) = 1 - p(Z < P_{66})$ , por ello, se tiene que  $p(Z < P_{66}) = 1 - 0'34 = 0'66$ , por lo que  $P_{66} = 0'415$ , y por ello,  $P_{34} = -0'415$ .

**Ejemplo 3.42** Establecer el valor en el que una  $N(10, 3)$  deja por delante suyo el 58% de los datos.

- Ya no tengo una  $N(0, 1)$ , sino una  $N(10, 3)$ , y me preguntan por  $P_{58}$ , o aquel valor que deja delante suya una probabilidad de  $0'58$ . Este problema ya lo resolví para una  $N(0, 1)$  en el problema 3.37, siendo la solución  $P_{58} = 0'205$  para una  $N(0, 1)$ .
- Busco  $P_{58}$  de forma que  $p(X \leq P_{58}) = 0'58$  (nótese cómo ahora pongo  $X$  y no pongo  $Z$ ).
- De nuevo, es claramente un problema de tipo indirecto y como  $0'58$  es mayor  $0'5$ , el percentil va a ser positivo (ahora ha habido suerte). De todos modos, nada nos va a librar de tipificar<sup>7</sup>.
- Busco  $P_{58}$  de forma que  $p(X \leq P_{58}) = 0'58$ . Esto es,  $P_{58}$  de modo que  $p\left(\frac{X - 10}{3} \leq \frac{P_{58} - 10}{3}\right) = 0'58$
- Por ello, busco  $P_{58}$  de modo que  $p\left(Z \leq \frac{P_{58} - 10}{3}\right) = 0'58$ , y ahora sí estoy trabajando con una  $N(0, 1)$ , por lo que busco en la tabla quién me da  $0'58$  y obtengo  $0'205$ , ya que  $p(Z \leq 0'205) = 0'58$ .
- Como tenía  $p\left(Z \leq \frac{P_{58} - 10}{3}\right) = 0'58$ , y sé que  $p(Z \leq 0'205) = 0'58$ , se deduce que  $\frac{P_{58} - 10}{3} = 0'205$ .
- Despejando,  $P_{58} - 10 = 3 \cdot 0'205$ , y por ello  $P_{58} = 10 + 3 \cdot 0'205 = 10'615$ , que es el percentil buscado.

**Ejemplo 3.43** Establecer el valor de una  $N(200, 20)$  que deja por delante suyo un 67% de los datos.

- Me preguntan por  $P_{67}$  de modo que  $p(X \leq P_{67}) = 0'67$ . Sé que va a estar por encima de la media.
- Tras tipificar, busco  $P_{67}$  de modo que  $p\left(\frac{X - 200}{20} \leq \frac{P_{67} - 200}{20}\right) = 0'67$ .
- Esto es, busco  $P_{67}$  de modo que  $p\left(Z \leq \frac{P_{67} - 200}{20}\right) = 0'67$
- En la tabla de  $Z$ ,  $p(Z \leq 0'44) = 0'67$ , así que de ambas igualdades se deduce que  $\frac{P_{67} - 200}{20} = 0'44$
- Despejando,  $P_{67} = 200 + 20 \cdot 0'44 = 208'8$ . Ese es el dato.

**Ejemplo 3.44** Establecer el valor en el que una  $N(70, 9)$  deja por delante suyo el 24% de los datos.

- No tengo una  $N(0, 1)$ , sino una  $N(70, 9)$ , y me preguntan por  $P_{24}$ , o aquel valor que deja delante suya una probabilidad de  $0'24$ . Como esta probabilidad es menor que  $0'5$ , en una  $N(0, 1)$  este valor saldría negativo, en una  $N(70, 9)$ , con una media tan desplazada y positiva, será positivo.
- De todos modos, sea positivo o negativo, si quiero calcular un percentil inferior al 50, lo más cómodo es calcular su simétrico respecto la media, en este caso  $P_{76}$  (ya que la media de 24 y 76 es 50, donde se sitúa la media de la normal), y la misma distancia que haya de  $\mu$  (70) a  $P_{76}$  (a calcular), será la que haya de  $P_{24}$  a  $\mu$ , al ser la distribución simétrica.
- Calculo pues quién es  $P_{76}$  de modo que  $p(X \leq P_{76}) = 0'76$ .
- Tipifico la expresión anterior; busco  $P_{76}$  de modo que  $p\left(\frac{X - 70}{9} \leq \frac{P_{76} - 70}{9}\right) = 0'76$
- Esto es, busco  $P_{76}$  de modo que  $p\left(Z \leq \frac{P_{76} - 70}{9}\right) = 0'76$ .
- Mirando la tabla  $N(0, 1)$  (no tengo otra), veo que  $P(Z \leq 0'705) = 0'76$ , y por ello,  $\frac{P_{76} - 70}{9} = 0'705$ .
- Despejo, y veo que  $P_{76} = 70 + 9 \cdot 0'705 = 76'345$
- Pero no busco  $P_{76}$ , sino su simétrico respecto  $\mu = P_{50} = 70$ , que es  $P_{24}$ . Como de  $\mu$  (70) a  $P_{76}$  (76'345) hay 6'345, lo mismo habrá de  $P_{24}$  a  $\mu$ , y por ello,  $P_{24} = \mu - 6'345 = 63'655$ . Esta es la solución.

<sup>7</sup>Busco  $P_{58}$  de forma que  $p(X \leq P_{58}) = 0'58$ . Esta es una igualdad entre dos probabilidades, la parte de la izquierda,  $p()$  y la parte de la derecha,  $0'58$ , por lo que la idea es mirar la tabla de la  $N(0, 1)$  y buscar  $0'58$ . Desgraciadamente, no puedo hacer eso, ya que no tengo la probabilidad de  $Z \leq P_{58}$ , sino la de  $X \leq P_{58}$ , y ello se soluciona tipificando.

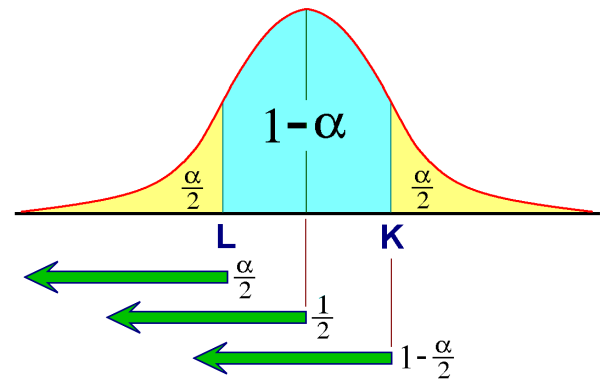
### 3.12.2. Intervalo característico para una normal.

Dada una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución de probabilidad normal  $N(\mu, \sigma)$ , o sea, con función de densidad en forma de campana de Gauss, simétrica y que alcanza su máximo en  $\mu$ , y dada una probabilidad  $1 - \alpha$  (que se puede medir tanto en % como en valores decimales en el intervalo  $[0, 1]$ ), el intervalo característico para esa probabilidad es el intervalo central de la distribución que encierra acumula dicha probabilidad  $1 - \alpha$ , o equivalentemente, que deja fuera de él una probabilidad total de  $\alpha$ , o equivalentemente, que deja tanto antes como después de él  $\frac{\alpha}{2}$ .

Aunque sepa calcular los oportunos percentiles, a los dos valores que delimitan el intervalo característico los llamaremos  $L$  y  $K$  (se tiene  $L \leq K$ ), de forma que  $L$  deja antes de él una probabilidad de  $\frac{\alpha}{2}$ , que es lo mismo (la campana de Gauss es simétrica) que deja  $K$  tras él, por lo que  $K$  deja delante de él  $1 - \frac{\alpha}{2}$ .

Eso lo podemos ver en el gráfico del margen. Supongamos que nos piden los valores  $L$  y  $K$  que en una  $N(0, 1)$  encierran el 98% de la probabilidad o el 0'98 si lo vemos en decimal. Llamamos entonces  $1 - \alpha = 0'98$ , deduciéndose que  $\alpha = 0'02$ . El intervalo característico para el 0'98 es aquel que deja dentro de él el 0'98, o que deja fuera de él un total de  $\alpha = 0'02$ , o que deja tanto antes como después de él  $\frac{\alpha}{2} = \frac{0'02}{2} = 0'01$ .

Por ello,  $L$  deja delante suya una probabilidad de 0'01, mientras  $K$  deja detrás suyo esa misma probabilidad, el 0'01, o lo que es lo mismo,  $K$  deja delante suyo una probabilidad de  $1 - 0'01 = 0'99$ . Mirando la tabla (problema indirecto),  $K = 2'325$ , y simétricamente  $L = -2'325$ .



**Nota 3.49** Si en vez de probabilidades decimales hubiéramos usado porcentajes, sería lo mismo, cambiando el 1 por el 100%. De hecho, como consejo, creo que es mejor primero calcular las colas con porcentajes, y después, dividiendo por 100, pasar a probabilidades, que es lo que finalmente se va a mirar en la tabla.

**Ejemplo 3.45** Si nos piden calcular el intervalo característico para el 96% central en una  $N(0, 1)$ , consideramos  $100 - \alpha = 96\%$ , por lo que  $\alpha$ , valor de las colas de la distribución, vale el 4%, y  $L$  deja delante suyo un  $\frac{4}{2} = 2\%$ , que es lo que deja  $K$  por detrás al ser simétrica la campana de Gauss, por lo que  $K$  deja delante suyo un  $100 - 2 = 98\%$ . Por ello (problema indirecto)  $K = 2'055$  y  $L = -2'055$ .

**Ejemplo 3.46** Un ejercicio similar pero no con porcentajes, sino con probabilidades, sería calcular el intervalo característico para el 0'99. Entonces, como  $1 - \alpha = 0'99$ , se tiene que  $\alpha = 0'01$ , y por ello,  $L$  deja delante suyo un  $\frac{0'01}{2} = 0'005$ , que es lo mismo que deja  $K$  por detrás, por lo que  $K$  deja por delante suyo un  $1 - 0'005 = 0'995$ , y de aquí (problema indirecto)  $K = 2'575$  y  $L = -2'575$ .

**Ejemplo 3.47** En una  $N(80, 30)$ , hallar los dos valores que encierran el 76% central de los datos.

- Es un problema similar al de los dos ejercicios anteriores, si bien al no tenerse inicialmente una  $N(0, 1)$  habrá que tipificar por el camino, o por variar respecto lo explicado en el punto 3.12, voy a resolverlo para una  $N(0, 1)$  y voy a destipificar.
- Lo primero que vamos a hacer es calcular qué probabilidad llevan las dos colas de la distribución; si el intervalo central es del 76%,  $100 - \alpha = 76$ , por lo que  $\alpha = 34$ , probabilidad de las dos colas, por lo que cada cola lleva un 17%;  $L$  deja delante suya el 17%,  $K$  deja detrás suya el 17%, o lo que es lo mismo,  $K$  deja delante suyo el  $100 - 17 = 83\%$ , que en probabilidad es el (divido por 100) el 0'83.
- Ya tengo localizado  $K$ , es aquel valor que deja delante suya el 0'83, por lo que en una  $N(0, 1)$ ,  $K$  sería igual a 0'955. Por cierto,  $L$  sería igual a  $-0'955$ , pero de nuevo, en una  $N(0, 1)$ .
- Bueno, pues destipifico (paso de la  $N(0, 1)$  a la  $N(80, 30)$ ); si  $\frac{X - \mu}{\sigma} = Z$ , entonces  $\frac{K - 80}{30} = 0'955$ , por ello,  $K = 80 + 30 \cdot 0'955 = 80 + 28'65 = 108'65$ , y por simetría (ese 80 que se suma a 28'65 para calcular  $K$  es la media  $\mu$ , para calcular  $L$  lo que se hace es restar)  $L = 80 - 30 \cdot 0'955 = 80 - 28'65 = 51'35$ .
- Esa es la solución,  $L = 51'35$ , y  $K = 108'65$ .

### 3.13. Aproximación de una binomial por una normal

Una distribución binomial  $B(n, p)$  se puede aproximar por una distribución normal siempre que  $n$  sea grande y  $p$  no esté muy próxima a 0 ó 1 (de hecho, cuanto más se parezca  $p$  a 0'5 la aproximación será mejor). Se recuerda que en una  $B(n, p)$ , la media era  $\mu = np$ , y la desviación típica  $\sigma = +\sqrt{npq}$ . La aproximación consistirá en utilizar una distribución normal con la misma media y desviación típica que la distribución binomial, y en la práctica podrá ser utilizada cuando se verifiquen las tres condiciones siguientes:

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} n \geq 30 \\ np \geq 5 \\ nq \geq 5 \end{array} \right\} \quad \text{entonces} \quad X \equiv B(n, p) \sim N(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq})$$

Que tras tipificar, queda como  $\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$ .

**Nota 3.50** La utilidad de esta aproximación es que a veces calcular la probabilidad asociada a una binomial es un proceso fácil pero laborioso, especialmente si hay implicados muchos sumandos, como le puede suceder a una  $X \sim B(80, 0'6)$  si por ejemplo deseásemos calcular  $p(15 < X \leq 50)$ , ya que debería calcular desde  $\binom{80}{16} \cdot 0'6^{16} \cdot 0'4^{64}$  hasta  $\binom{80}{50} \cdot 0'6^{50} \cdot 0'4^{30}$  y sumarlos todos, cuando con una normal tipificada bastaría con restar la probabilidad de los extremos.

**Nota 3.51 (importante)** A la hora de aproximar una binomial por una normal hay que tener en cuenta un elemento muy importante, y es que la distribución original, la binomial, es discreta, y por ello las probabilidades de los puntos enteros aislados no son cero, mientras aquella por la que aproximamos, la normal, es continua, y por ello las probabilidades de los puntos aislados son cero. Por ello, cuando aproximemos una binomial por una normal, deberemos hacer una pequeña corrección, llamada *corrección de Yates*

**Nota 3.52 (corrección de Yates)** Sea  $B(n, p)$  una distribución binomial discreta en condiciones de ser aproximada por una normal, sea  $X \simeq N(np, \sqrt{npq})$  dicha aproximación, sea  $\frac{X - np}{\sqrt{npq}}$  la tipificación de dicha normal

- $p(B < a) \sim p(N(np, \sqrt{npq}) < a) \stackrel{(\#)}{=} p(N(np, \sqrt{npq}) < a - 0'5) = p\left(Z < \frac{a - 0'5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
- $p(B \leq a) \sim p(N(np, \sqrt{npq}) \leq a) \stackrel{(\#)}{=} p(N(np, \sqrt{npq}) \leq a + 0'5) = p\left(Z \leq \frac{a + 0'5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
- $p(B > b) \sim p(N(np, \sqrt{npq}) > b) \stackrel{(\#)}{=} p(N(np, \sqrt{npq}) > b + 0'5) = p\left(Z > \frac{b + 0'5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$
- $p(B \geq b) \sim p(N(np, \sqrt{npq}) \geq b) \stackrel{(\#)}{=} p(N(np, \sqrt{npq}) \geq b - 0'5) = p\left(Z \geq \frac{b - 0'5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$

**Ejemplo 3.48** Demostrar que la distribución  $B(100, 0'7)$  se puede aproximar por la normal  $N(70, 4'58)$

Veamos si se verifican las tres condiciones para ello:

- $n = 100 > 30$ , sí
- $np = 100 \cdot 0'7 = 70 > 5$ , sí
- $nq = 100 \cdot 0'3 = 30 > 5$ , y sí

Efectivamente se dan las tres condiciones, por lo que puedo aproximar la binomial  $B(100, 0'7)$  por la normal

$$B(100, 0'7) \sim N(100 \cdot 0'7, \sqrt{100 \cdot 0'7 \cdot 0'3}) = N(70, \sqrt{21}) = N(70, 4'58)$$

**Ejemplo 3.49** En Andalucía, cada nuevo día tiene una probabilidad de 0'6 de que haya buen tiempo. Si consideramos las observaciones de todo un año no bisiesto, determinar:

1. Probabilidad de que haya buen tiempo al menos 300 días.
2. Probabilidad de que haya buen tiempo más de 300 días.
3. Probabilidad de que haya buen tiempo menos de 200 días.
4. Probabilidad de que haya buen tiempo como mucho 200 días.
5. Probabilidad de que haya buen tiempo exactamente 175 días.

Antes de comenzar, este es un problema típico para pasar a una distribución normal, ya que salvo el tercer apartado, que también lo vamos a resolver como una normal, son muy tediosas. En efecto, la distribución original es una  $X \sim B(365, 0'6)$ , llamando éxito a que haga buen tiempo, el primer apartado se resolvería así:

$$p(X \geq 300) = p(X = 300) + \dots + p(X = 365) = \binom{365}{300} \cdot 0'6^{300} \cdot 0'4^{65} + \dots + \binom{365}{365} \cdot 0'6^{365} \cdot 0'4^0$$

Evidentemente no es factible hacer 65 desarrollos binomiales, por lo que habrá que buscar un atajo, y ese atajo es pasar a una distribución normal, para ello, vemos si se dan las tres condiciones oportunas:

- $n = 365 > 30$ , sí
- $np = 365 \cdot 0'6 = 219 > 5$ , sí
- $nq = 365 \cdot 0'4 = 146 > 5$ , y sí

Por ello,  $B(365, 0'6) \sim N(365 \cdot 0'6, \sqrt{365 \cdot 0'6 \cdot 0'4}) = N(219, \sqrt{87'6}) = N(219, 9'3595)$ , y ahora sí, resolvemos los 5 apartados del problema pasándolo a una normal. Voy a marcar con (Y) el paso en el que aplico la corrección de Yates para introducir los puntos discretos ya que la normal es continua y para ésta son cero.

$$1. p(X \geq 300) \stackrel{(Y)}{\approx} p(N \geq 300 - 0'5) = p\left(Z \geq \frac{300 - 269 - 0'5}{9'3595}\right) = p(Z \geq 3'26) = 1 - p(Z < 3'26) = 1 - 0'9994 = 0'0006$$

$$2. p(X > 300) \stackrel{(Y)}{\approx} p(N > 300 + 0'5) = p\left(Z > \frac{300 - 269 + 0'5}{9'3595}\right) = p(Z > 3'37) = 1 - p(Z \leq 3'37) = 1 - 0'9994 = 0'0006$$

$$3. p(X < 200) \stackrel{(Y)}{\approx} p(N < 200 - 0'5) = p\left(Z < \frac{200 - 269 - 0'5}{9'3595}\right) = p(Z < -7'43) = 1 - p(Z \leq 7'43) = 1 - 1 = 0$$

$$4. p(X \leq 200) \stackrel{(Y)}{\approx} p(N \leq 200 + 0'5) = p\left(Z \leq \frac{200 - 269 + 0'5}{9'3595}\right) = p(Z \leq -7'32) = 1 - p(Z < 7'43) = 1 - 1 = 0$$

$$5. p(X = 175) \stackrel{(Y)}{\approx} p(174'5 \leq N \leq 175'5) = p\left(Z \leq \frac{175'5 - 269}{9'3595}\right) - p\left(Z \leq \frac{174'5 - 269}{9'3595}\right) = p(Z \leq -9'898) - p(Z \leq -10'0967) = 0 - 0 = 0$$

Deseo hacer un comentario para el último apartado. La aproximación mediante una normal nos dice que la probabilidad sale cero. De los 5 apartados, este último es el único en el que tiene sentido calcular la probabilidad directamente mediante una binomial, ya que sólo se calcula un sumando;  $\binom{365}{175} \cdot 0'6^{175} \cdot 0'4^{190}$ . Con una buena calculadora vemos que el resultado es igual a 0'0000085267, que efectivamente es prácticamente igual a cero (la tabla de  $Z$  toma 4 decimales, el resultado exacto parte de 5 ceros). En general habrá cierta discrepancia entre el resultado obtenido al aproximar y el resultado al tomar directamente la binomial, siendo más exacto usar la binomial, aunque no siempre será posible.



3.14. Otras tablas de la normal  $N(0,1)$ 

Distribución normal standard $N(0,1)$ , rama izquierda										
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Distribución normal standard $N(0,1)$ , rama derecha										
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Distribución normal standard $N(0,1)$ , 6 decimales										
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
<b>0.0</b>	.500000	.503989	.507978	.511967	.515953	.519939	.523922	.527903	.531881	.535856
<b>0.1</b>	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563559	.567495	.571424	.575345
<b>0.2</b>	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
<b>0.3</b>	.617911	.621719	.625516	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
<b>0.4</b>	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
<b>0.5</b>	.691462	.694974	.698468	.701944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
<b>0.6</b>	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
<b>0.7</b>	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
<b>0.8</b>	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
<b>0.9</b>	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
<b>1.0</b>	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
<b>1.1</b>	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.878999	.881000	.882977
<b>1.2</b>	.884930	.886860	.888767	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
<b>1.3</b>	.903199	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
<b>1.4</b>	.919243	.920730	.922196	.923641	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931888
<b>1.5</b>	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
<b>1.6</b>	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950529	.951543	.952540	.953521	.954486
<b>1.7</b>	.955435	.956367	.957284	.958185	.959071	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
<b>1.8</b>	.964070	.964852	.965621	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
<b>1.9</b>	.971284	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976705
<b>2.0</b>	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
<b>2.1</b>	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
<b>2.2</b>	.986097	.986447	.986791	.987126	.987455	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
<b>2.3</b>	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
<b>2.4</b>	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
<b>2.5</b>	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
<b>2.6</b>	.995339	.995473	.995603	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
<b>2.7</b>	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
<b>2.8</b>	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
<b>2.9</b>	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
<b>3.0</b>	.998650	.998655	.998659	.998663	.998668	.998672	.998676	.998685	.998689	.998694
<b>3.1</b>	.998694	.998698	.998702	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999
<b>3.2</b>	.999032	.999064	.999096	.999126	.999155	.999184	.999211	.999238	.999264	.999289
<b>3.3</b>	.999313	.999336	.999359	.999381	.999402	.999423	.999443	.999462	.999481	.999499
<b>3.4</b>	.999517	.999533	.999550	.999566	.999581	.999596	.999610	.999624	.999638	.999650
<b>3.5</b>	.999663	.999675	.999687	.999698	.999709	.999720	.999730	.999740	.999749	.999758
<b>3.6</b>	.999767	.999776	.999784	.999792	.999800	.999807	.999815	.999821	.999828	.999835
<b>3.7</b>	.999841	.999847	.999853	.999858	.999864	.999869	.999874	.999879	.999883	.999888
<b>3.8</b>	.999892	.999896	.999900	.999904	.999908	.999912	.999915	.999918	.999922	.999925
<b>3.9</b>	.999928	.999930	.999933	.999936	.999938	.999941	.999943	.999946	.999948	.999950
<b>4.0</b>	.999952	.999954	.999956	.999958	.999959	.999961	.999963	.999964	.999966	.999967
<b>4.1</b>	.999968	.999970	.999971	.999972	.999973	.999974	.999975	.999976	.999977	.999978
<b>4.2</b>	.999979	.999980	.999981	.999982	.999983	.999983	.999984	.999985	.999985	.999986

## Tabla normal a la milésima



	0'000	0'001	0'002	0'003	0'004	0'005	0'006	0'007	0'008	0'009
0'00	0,500000	0,500399	0,500798	0,501197	0,501596	0,501995	0,502394	0,502793	0,503192	0,503590
0'01	0,503989	0,504388	0,504787	0,505186	0,505585	0,505984	0,506383	0,506782	0,507181	0,507579
0'02	0,507978	0,508377	0,508776	0,509175	0,509574	0,509973	0,510371	0,510770	0,511169	0,511568
0'03	0,511966	0,512365	0,512764	0,513163	0,513561	0,513960	0,514359	0,514757	0,515156	0,515555
0'04	0,515953	0,516352	0,516751	0,517149	0,517548	0,517946	0,518345	0,518743	0,519142	0,519540
0'05	0,519939	0,520337	0,520736	0,521134	0,521532	0,521931	0,522329	0,522727	0,523126	0,523524
0'06	0,523922	0,524320	0,524719	0,525117	0,525515	0,525913	0,526311	0,526709	0,527107	0,527505
0'07	0,527903	0,528301	0,528699	0,529097	0,529495	0,529893	0,530290	0,530688	0,531086	0,531484
0'08	0,531881	0,532279	0,532677	0,533074	0,533472	0,533869	0,534267	0,534664	0,535062	0,535459
0'09	0,535856	0,536254	0,536651	0,537048	0,537445	0,537843	0,538240	0,538637	0,539034	0,539431
0'10	0,539828	0,540225	0,540622	0,541019	0,541415	0,541812	0,542209	0,542606	0,543002	0,543399
0'11	0,543795	0,544192	0,544588	0,544985	0,545381	0,545777	0,546174	0,546570	0,546966	0,547362
0'12	0,547758	0,548154	0,548550	0,548946	0,549342	0,549738	0,550134	0,550530	0,550926	0,551321
0'13	0,551717	0,552112	0,552508	0,552903	0,553299	0,553694	0,554089	0,554485	0,554880	0,555275
0'14	0,555670	0,556065	0,556460	0,556855	0,557250	0,557645	0,558039	0,558434	0,558829	0,559223
0'15	0,559618	0,560012	0,560407	0,560801	0,561195	0,561589	0,561983	0,562378	0,562772	0,563166
0'16	0,563559	0,563953	0,564347	0,564741	0,565134	0,565528	0,565922	0,566315	0,566708	0,567102
0'17	0,567495	0,567888	0,568281	0,568674	0,569067	0,569460	0,569853	0,570246	0,570639	0,571031
0'18	0,571424	0,571816	0,572209	0,572601	0,572993	0,573385	0,573778	0,574170	0,574562	0,574954
0'19	0,575345	0,575737	0,576129	0,576521	0,576912	0,577304	0,577695	0,578086	0,578477	0,578869
0'20	0,579260	0,579651	0,580042	0,580432	0,580823	0,581214	0,581605	0,581995	0,582386	0,582776
0'21	0,583166	0,583556	0,583946	0,584337	0,584726	0,585116	0,585506	0,585896	0,586285	0,586675
0'22	0,587064	0,587454	0,587843	0,588232	0,588621	0,589010	0,589399	0,589788	0,590177	0,590566
0'23	0,590954	0,591343	0,591731	0,592119	0,592508	0,592896	0,593284	0,593672	0,594059	0,594447
0'24	0,594835	0,595222	0,595610	0,595997	0,596385	0,596772	0,597159	0,597546	0,597933	0,598320
0'25	0,598706	0,599093	0,599479	0,599866	0,600252	0,600638	0,601025	0,601411	0,601797	0,602182
0'26	0,602568	0,602954	0,603339	0,603725	0,604110	0,604495	0,604880	0,605265	0,605650	0,606035
0'27	0,606420	0,606804	0,607189	0,607573	0,607958	0,608342	0,608726	0,609110	0,609494	0,609878
0'28	0,610261	0,610645	0,611028	0,611412	0,611795	0,612178	0,612561	0,612944	0,613327	0,613709
0'29	0,614092	0,614474	0,614857	0,615239	0,615621	0,616003	0,616385	0,616767	0,617148	0,617530
0'30	0,617911	0,618293	0,618674	0,619055	0,619436	0,619817	0,620198	0,620578	0,620959	0,621339
0'31	0,621720	0,622100	0,622480	0,622860	0,623239	0,623619	0,623999	0,624378	0,624758	0,625137
0'32	0,625516	0,625895	0,626274	0,626652	0,627031	0,627409	0,627788	0,628166	0,628544	0,628922
0'33	0,629300	0,629678	0,630055	0,630433	0,630810	0,631187	0,631565	0,631942	0,632318	0,632695
0'34	0,633072	0,633448	0,633825	0,634201	0,634577	0,634953	0,635329	0,635704	0,636080	0,636455
0'35	0,636831	0,637206	0,637581	0,637956	0,638331	0,638705	0,639080	0,639454	0,639828	0,640202
0'36	0,640576	0,640950	0,641324	0,641698	0,642071	0,642444	0,642817	0,643190	0,643563	0,643936
0'37	0,644309	0,644681	0,645054	0,645426	0,645798	0,646170	0,646542	0,646913	0,647285	0,647656
0'38	0,648027	0,648398	0,648769	0,649140	0,649511	0,649881	0,650252	0,650622	0,650992	0,651362
0'39	0,651732	0,652101	0,652471	0,652840	0,653209	0,653579	0,653947	0,654316	0,654685	0,655053
0'40	0,655422	0,655790	0,656158	0,656526	0,656894	0,657261	0,657629	0,657996	0,658363	0,658730
0'41	0,659097	0,659464	0,659830	0,660197	0,660563	0,660929	0,661295	0,661661	0,662026	0,662392
0'42	0,662757	0,663122	0,663487	0,663852	0,664217	0,664582	0,664946	0,665310	0,665674	0,666038
0'43	0,666402	0,666766	0,667129	0,667493	0,667856	0,668219	0,668582	0,668944	0,669307	0,669669
0'44	0,670031	0,670394	0,670755	0,671117	0,671479	0,671840	0,672201	0,672562	0,672923	0,673284
0'45	0,673645	0,674005	0,674366	0,674726	0,675086	0,675445	0,675805	0,676164	0,676524	0,676883
0'46	0,677242	0,677601	0,677959	0,678318	0,678676	0,679034	0,679392	0,679750	0,680108	0,680465
0'47	0,680822	0,681180	0,681537	0,681893	0,682250	0,682607	0,682963	0,683319	0,683675	0,684031
0'48	0,684386	0,684742	0,685097	0,685452	0,685807	0,686162	0,686516	0,686871	0,687225	0,687579
0'49	0,687933	0,688287	0,688640	0,688994	0,689347	0,689700	0,690053	0,690405	0,690758	0,691110
0'50	0,691462	0,691814	0,692166	0,692518	0,692869	0,693221	0,693572	0,693923	0,694273	0,694624
0'51	0,694974	0,695324	0,695674	0,696024	0,696374	0,696723	0,697073	0,697422	0,697771	0,698120
0'52	0,698468	0,698817	0,699165	0,699513	0,699861	0,700208	0,700556	0,700903	0,701250	0,701597
0'53	0,701944	0,702291	0,702637	0,702983	0,703329	0,703675	0,704021	0,704366	0,704711	0,705057
0'54	0,705401	0,705746	0,706091	0,706435	0,706779	0,707123	0,707467	0,707811	0,708154	0,708497
0'55	0,708840	0,709183	0,709526	0,709868	0,710211	0,710553	0,710895	0,711236	0,711578	0,711919
0'56	0,712260	0,712601	0,712942	0,713283	0,713623	0,713963	0,714303	0,714643	0,714983	0,715322
0'57	0,715661	0,716000	0,716339	0,716678	0,717016	0,717354	0,717692	0,718030	0,718368	0,718705
0'58	0,719043	0,719380	0,719717	0,720053	0,720390	0,720726	0,721062	0,721398	0,721734	0,722069
0'59	0,722405	0,722740	0,723075	0,723409	0,723744	0,724078	0,724412	0,724746	0,725080	0,725414

	0'000	0'001	0'002	0'003	0'004	0'005	0'006	0'007	0'008	0'009
0'60	0,725747	0,726080	0,726413	0,726746	0,727078	0,727411	0,727743	0,728075	0,728406	0,728738
0'61	0,729069	0,729400	0,729731	0,730062	0,730392	0,730723	0,731053	0,731383	0,731712	0,732042
0'62	0,732371	0,732700	0,733029	0,733358	0,733686	0,734014	0,734343	0,734670	0,734998	0,735325
0'63	0,735653	0,735980	0,736307	0,736633	0,736960	0,737286	0,737612	0,737938	0,738263	0,738589
0'64	0,738914	0,739239	0,739563	0,739888	0,740212	0,740536	0,740860	0,741184	0,741508	0,741831
0'65	0,742154	0,742477	0,742799	0,743122	0,743444	0,743766	0,744088	0,744410	0,744731	0,745052
0'66	0,745373	0,745694	0,746014	0,746335	0,746655	0,746975	0,747294	0,747614	0,747933	0,748252
0'67	0,748571	0,748890	0,749208	0,749526	0,749844	0,750162	0,750480	0,750797	0,751114	0,751431
0'68	0,751748	0,752064	0,752381	0,752697	0,753012	0,753328	0,753643	0,753959	0,754274	0,754588
0'69	0,754903	0,755217	0,755531	0,755845	0,756159	0,756472	0,756786	0,757099	0,757411	0,757724
0'70	0,758036	0,758348	0,758660	0,758972	0,759284	0,759595	0,759906	0,760217	0,760527	0,760838
0'71	0,761148	0,761458	0,761768	0,762077	0,762386	0,762695	0,763004	0,763313	0,763621	0,763930
0'72	0,764238	0,764545	0,764853	0,765160	0,765467	0,765774	0,766081	0,766387	0,766693	0,766999
0'73	0,767305	0,767610	0,767916	0,768221	0,768526	0,768830	0,769135	0,769439	0,769743	0,770047
0'74	0,770350	0,770653	0,770956	0,771259	0,771562	0,771864	0,772166	0,772468	0,772770	0,773071
0'75	0,773373	0,773674	0,773974	0,774275	0,774575	0,774876	0,775175	0,775475	0,775775	0,776074
0'76	0,776373	0,776671	0,776970	0,777268	0,777566	0,777864	0,778162	0,778459	0,778756	0,779053
0'77	0,779350	0,779647	0,779943	0,780239	0,780535	0,780830	0,781126	0,781421	0,781715	0,782010
0'78	0,782305	0,782599	0,782893	0,783186	0,783480	0,783773	0,784066	0,784359	0,784652	0,784944
0'79	0,785236	0,785528	0,785820	0,786111	0,786402	0,786693	0,786984	0,787274	0,787565	0,787855
0'80	0,788145	0,788434	0,788724	0,789013	0,789302	0,789590	0,789879	0,790167	0,790455	0,790742
0'81	0,791030	0,791317	0,791604	0,791891	0,792178	0,792464	0,792750	0,793036	0,793321	0,793607
0'82	0,793892	0,794177	0,794462	0,794746	0,795030	0,795314	0,795598	0,795881	0,796158	0,796448
0'83	0,796731	0,797013	0,797296	0,797578	0,797860	0,798141	0,798423	0,798704	0,798985	0,799265
0'84	0,799546	0,799826	0,800106	0,800386	0,800665	0,800945	0,801224	0,801502	0,801781	0,802059
0'85	0,802337	0,802615	0,802893	0,803170	0,803448	0,803724	0,804001	0,804278	0,804554	0,804830
0'86	0,805105	0,805381	0,805656	0,805931	0,806206	0,806481	0,806755	0,807029	0,807303	0,807576
0'87	0,807850	0,808123	0,808396	0,808668	0,808941	0,809213	0,809485	0,809757	0,810028	0,810299
0'88	0,810570	0,810841	0,811112	0,811382	0,811652	0,811922	0,812191	0,812461	0,812730	0,812998
0'89	0,813267	0,813535	0,813804	0,814071	0,814339	0,814606	0,814874	0,815141	0,815407	0,815674
0'90	0,815940	0,816206	0,816472	0,816737	0,817002	0,817267	0,817532	0,817797	0,818061	0,818325
0'91	0,818589	0,818852	0,819116	0,819379	0,819642	0,819904	0,820167	0,820429	0,820691	0,820952
0'92	0,821214	0,821475	0,821736	0,821996	0,822257	0,822517	0,822777	0,823037	0,823296	0,823555
0'93	0,823814	0,824073	0,824332	0,824590	0,824848	0,825106	0,825363	0,825621	0,825878	0,826135
0'94	0,826391	0,826648	0,826904	0,827160	0,827415	0,827671	0,827926	0,828181	0,828435	0,828690
0'95	0,828944	0,829198	0,829452	0,829705	0,829958	0,830211	0,830464	0,830716	0,830969	0,831221
0'96	0,831472	0,831724	0,831975	0,832226	0,832477	0,832728	0,832978	0,833228	0,833478	0,833727
0'97	0,833977	0,834226	0,834475	0,834723	0,834972	0,835220	0,835468	0,835715	0,835963	0,836210
0'98	0,836457	0,836704	0,836950	0,837196	0,837442	0,837688	0,837933	0,838179	0,838424	0,838668
0'99	0,838913	0,839157	0,839401	0,839645	0,839889	0,840132	0,840375	0,840618	0,840860	0,841103
1'00	0,841345	0,841587	0,841828	0,842070	0,842311	0,842552	0,842792	0,843033	0,843273	0,843513
1'01	0,843752	0,843992	0,844231	0,844470	0,844709	0,844947	0,845185	0,845423	0,845661	0,845899
1'02	0,846136	0,846373	0,846610	0,846846	0,847082	0,847318	0,847554	0,847790	0,848025	0,848260
1'03	0,848495	0,848730	0,848964	0,849198	0,849432	0,849666	0,849899	0,850132	0,850365	0,850598
1'04	0,850830	0,851062	0,851294	0,851526	0,851757	0,851989	0,852219	0,852450	0,852681	0,852911
1'05	0,853141	0,853371	0,853600	0,853830	0,854059	0,854287	0,854516	0,854744	0,854972	0,855200
1'06	0,855428	0,855655	0,855882	0,856109	0,856336	0,856562	0,856788	0,857014	0,857240	0,857465
1'07	0,857690	0,857915	0,858140	0,858364	0,858589	0,858813	0,859036	0,859260	0,859483	0,859706
1'08	0,859929	0,860151	0,860374	0,860596	0,860818	0,861039	0,861261	0,861482	0,861702	0,861923
1'09	0,862143	0,862364	0,862583	0,862803	0,863023	0,863242	0,863461	0,863679	0,863898	0,864116
1'10	0,864334	0,864552	0,864769	0,864986	0,865203	0,865420	0,865637	0,865853	0,866069	0,866285
1'11	0,866500	0,866716	0,866931	0,867146	0,867360	0,867575	0,867789	0,868003	0,868217	0,868430
1'12	0,868643	0,868856	0,869069	0,869281	0,869493	0,869705	0,869917	0,870129	0,870340	0,870551
1'13	0,870762	0,870972	0,871183	0,871393	0,871603	0,871812	0,872022	0,872231	0,872440	0,872648
1'14	0,872857	0,873065	0,873273	0,873481	0,873688	0,873895	0,874102	0,874309	0,874516	0,874722
1'15	0,874928	0,875134	0,875339	0,875545	0,875750	0,875955	0,876159	0,876364	0,876568	0,876772
1'16	0,876976	0,877179	0,877382	0,877585	0,877788	0,877991	0,878193	0,878395	0,878597	0,878798
1'17	0,879000	0,879201	0,879401	0,879602	0,879802	0,880003	0,880203	0,880402	0,880602	0,880801
1'18	0,881000	0,881199	0,881397	0,881595	0,881793	0,881991	0,882189	0,882386	0,882583	0,882780
1'19	0,882977	0,883173	0,883369	0,883565	0,883761	0,883956	0,884152	0,884347	0,884541	0,884736

	0'000	0'001	0'002	0'003	0'004	0'005	0'006	0'007	0'008	0'009
1'20	0,884930	0,885124	0,885318	0,885512	0,885705	0,885898	0,886091	0,886284	0,886476	0,886669
1'21	0,886861	0,887052	0,887244	0,887435	0,887626	0,887817	0,888008	0,888198	0,888388	0,888578
1'22	0,888768	0,888957	0,889146	0,889335	0,889524	0,889712	0,889901	0,890089	0,890277	0,890464
1'23	0,890651	0,890839	0,891025	0,891212	0,891399	0,891585	0,891771	0,891956	0,892142	0,892327
1'24	0,892512	0,892697	0,892882	0,893066	0,893250	0,893434	0,893618	0,893801	0,893984	0,894167
1'25	0,894350	0,894533	0,894715	0,894897	0,895079	0,895261	0,895442	0,895623	0,895804	0,895985
1'26	0,896165	0,896346	0,896526	0,896705	0,896885	0,897064	0,897243	0,897422	0,897601	0,897779
1'27	0,897958	0,898136	0,898313	0,898491	0,898668	0,898845	0,899022	0,899199	0,899375	0,899551
1'28	0,899727	0,899903	0,900079	0,900254	0,900429	0,900604	0,900778	0,900953	0,901127	0,901301
1'29	0,901475	0,901648	0,901821	0,901994	0,902167	0,902340	0,902512	0,902684	0,902856	0,903028
1'30	0,903200	0,903371	0,903542	0,903713	0,903883	0,904054	0,904224	0,904394	0,904563	0,904733
1'31	0,904902	0,905071	0,905240	0,905409	0,905577	0,905745	0,905913	0,906081	0,906248	0,906415
1'32	0,906582	0,906749	0,906916	0,907082	0,907248	0,907414	0,907580	0,907746	0,907911	0,908076
1'33	0,908241	0,908405	0,908570	0,908734	0,908898	0,909062	0,909225	0,909389	0,909552	0,909715
1'34	0,909877	0,910040	0,910202	0,910364	0,910526	0,910687	0,910849	0,911010	0,911171	0,911332
1'35	0,911492	0,911652	0,911812	0,911972	0,912132	0,912291	0,912450	0,912609	0,912768	0,912927
1'36	0,913085	0,913243	0,913401	0,913559	0,913716	0,913873	0,914031	0,914187	0,914344	0,914500
1'37	0,914657	0,914813	0,914968	0,915124	0,915279	0,915434	0,915589	0,915744	0,915898	0,916053
1'38	0,916207	0,916361	0,916514	0,916668	0,916821	0,916974	0,917127	0,917279	0,917431	0,917584
1'39	0,917736	0,917887	0,918039	0,918190	0,918341	0,918492	0,918643	0,918793	0,918943	0,919094
1'40	0,919243	0,919393	0,919542	0,919692	0,919841	0,919989	0,920138	0,920286	0,920434	0,920582
1'41	0,920730	0,920878	0,921025	0,921172	0,921319	0,921466	0,921612	0,921759	0,921905	0,922050
1'42	0,922196	0,922342	0,922487	0,922632	0,922777	0,922921	0,923066	0,923210	0,923354	0,923498
1'43	0,923641	0,923785	0,923928	0,924071	0,924214	0,924356	0,924499	0,924641	0,924783	0,924925
1'44	0,925066	0,925208	0,925349	0,925490	0,925631	0,925771	0,925911	0,926052	0,926191	0,926331
1'45	0,926471	0,926610	0,926749	0,926888	0,927027	0,927165	0,927304	0,927442	0,927580	0,927717
1'46	0,927855	0,927992	0,928129	0,928266	0,928403	0,928540	0,928676	0,928812	0,928948	0,929084
1'47	0,929219	0,929354	0,929490	0,929624	0,929759	0,929894	0,930028	0,930162	0,930296	0,930430
1'48	0,930563	0,930697	0,930830	0,930963	0,931096	0,931228	0,931360	0,931493	0,931625	0,931756
1'49	0,931888	0,932019	0,932150	0,932281	0,932412	0,932543	0,932673	0,932803	0,932933	0,933063
1'50	0,933193	0,933322	0,933451	0,933580	0,933709	0,933838	0,933966	0,934095	0,934223	0,934351
1'51	0,934478	0,934606	0,934733	0,934860	0,934987	0,935114	0,935240	0,935367	0,935493	0,935619
1'52	0,935745	0,935870	0,935995	0,936121	0,936246	0,936370	0,936495	0,936619	0,936744	0,936868
1'53	0,936992	0,937115	0,937239	0,937362	0,937485	0,937608	0,937731	0,937853	0,937976	0,938098
1'54	0,938220	0,938342	0,938463	0,938585	0,938706	0,938827	0,938948	0,939068	0,939189	0,939309
1'55	0,939429	0,939549	0,939669	0,939788	0,939908	0,940027	0,940146	0,940265	0,940383	0,940502
1'56	0,940620	0,940738	0,940856	0,940974	0,941091	0,941209	0,941326	0,941443	0,941559	0,941676
1'57	0,941792	0,941909	0,942025	0,942141	0,942256	0,942372	0,942487	0,942602	0,942717	0,942832
1'58	0,942947	0,943061	0,943175	0,943289	0,943403	0,943517	0,943630	0,943744	0,943857	0,943970
1'59	0,944083	0,944195	0,944308	0,944420	0,944532	0,944644	0,944756	0,944867	0,944979	0,945090
1'60	0,945201	0,945312	0,945422	0,945533	0,945643	0,945753	0,945863	0,945973	0,946082	0,946192
1'61	0,946301	0,946410	0,946519	0,946628	0,946736	0,946845	0,946953	0,947061	0,947169	0,947276
1'62	0,947384	0,947491	0,947598	0,947705	0,947812	0,947919	0,948025	0,948131	0,948238	0,948343
1'63	0,948449	0,948555	0,948660	0,948766	0,948871	0,948975	0,949080	0,949185	0,949289	0,949393
1'64	0,949497	0,949601	0,949705	0,949809	0,949912	0,950015	0,950118	0,950221	0,950324	0,950426
1'65	0,950529	0,950631	0,950733	0,950835	0,950936	0,951038	0,951139	0,951240	0,951341	0,951442
1'66	0,951543	0,951643	0,951744	0,951844	0,951944	0,952044	0,952143	0,952243	0,952342	0,952441
1'67	0,952540	0,952639	0,952738	0,952836	0,952935	0,953033	0,953131	0,953229	0,953326	0,953424
1'68	0,953521	0,953619	0,953716	0,953812	0,953909	0,954006	0,954102	0,954198	0,954294	0,954390
1'69	0,954486	0,954582	0,954677	0,954772	0,954867	0,954962	0,955057	0,955152	0,955246	0,955340
1'70	0,955435	0,955529	0,955622	0,955716	0,955809	0,955903	0,955996	0,956089	0,956182	0,956275
1'71	0,956367	0,956459	0,956552	0,956644	0,956736	0,956827	0,956919	0,957010	0,957102	0,957193
1'72	0,957284	0,957375	0,957465	0,957556	0,957646	0,957736	0,957826	0,957916	0,958006	0,958095
1'73	0,958185	0,958274	0,958363	0,958452	0,958541	0,958630	0,958718	0,958806	0,958895	0,958983
1'74	0,959070	0,959158	0,959246	0,959333	0,959420	0,959508	0,959595	0,959681	0,959768	0,959854
1'75	0,959941	0,960027	0,960113	0,960199	0,960285	0,960370	0,960456	0,960541	0,960626	0,960711
1'76	0,960796	0,960881	0,960965	0,961050	0,961134	0,961218	0,961302	0,961386	0,961470	0,961553
1'77	0,961636	0,961720	0,961803	0,961886	0,961968	0,962051	0,962134	0,962216	0,962298	0,962380
1'78	0,962462	0,962544	0,962625	0,962707	0,962788	0,962869	0,962950	0,963031	0,963112	0,963193
1'79	0,963273	0,963353	0,963434	0,963514	0,963593	0,963673	0,963753	0,963832	0,963911	0,963991

	0'000	0'001	0'002	0'003	0'004	0'005	0'006	0'007	0'008	0'009
1'80	0,964070	0,964149	0,964227	0,964306	0,964384	0,964463	0,964541	0,964619	0,964697	0,964774
1'81	0,964852	0,964930	0,965007	0,965084	0,965161	0,965238	0,965315	0,965391	0,965468	0,965544
1'82	0,965620	0,965697	0,965773	0,965848	0,965924	0,965999	0,966075	0,966150	0,966225	0,966300
1'83	0,966375	0,966450	0,966524	0,966599	0,966673	0,966747	0,966821	0,966895	0,966969	0,967042
1'84	0,967116	0,967189	0,967262	0,967335	0,967408	0,967481	0,967554	0,967626	0,967699	0,967771
1'85	0,967843	0,967915	0,967987	0,968059	0,968130	0,968202	0,968273	0,968344	0,968415	0,968486
1'86	0,968557	0,968628	0,968698	0,968769	0,968839	0,968909	0,968979	0,969049	0,969119	0,969189
1'87	0,969258	0,969327	0,969397	0,969466	0,969535	0,969604	0,969672	0,969741	0,969809	0,969878
1'88	0,969946	0,970014	0,970082	0,970150	0,970218	0,970285	0,970353	0,970420	0,970487	0,970554
1'89	0,970621	0,970688	0,970755	0,970821	0,970887	0,970954	0,971020	0,971086	0,971152	0,971218
1'90	0,971283	0,971349	0,971414	0,971480	0,971545	0,971610	0,971675	0,971740	0,971804	0,971869
1'91	0,971933	0,971998	0,972062	0,972126	0,972190	0,972254	0,972317	0,972381	0,972444	0,972508
1'92	0,972571	0,972634	0,972697	0,972760	0,972823	0,972885	0,972948	0,973010	0,973072	0,973135
1'93	0,973197	0,973258	0,973320	0,973382	0,973443	0,973505	0,973566	0,973627	0,973688	0,973749
1'94	0,973810	0,973871	0,973931	0,973992	0,974052	0,974113	0,974173	0,974233	0,974293	0,974352
1'95	0,974412	0,974471	0,974531	0,974590	0,974649	0,974708	0,974767	0,974826	0,974885	0,974944
1'96	0,975002	0,975060	0,975119	0,975177	0,975235	0,975293	0,975351	0,975408	0,975466	0,975523
1'97	0,975581	0,975638	0,975695	0,975752	0,975809	0,975866	0,975923	0,975979	0,976036	0,976092
1'98	0,976148	0,976204	0,976260	0,976316	0,976372	0,976428	0,976483	0,976539	0,976594	0,976649
1'99	0,976705	0,976760	0,976814	0,976869	0,976924	0,976979	0,977033	0,977087	0,977142	0,977196
2'00	0,977250	0,977304	0,977358	0,977411	0,977465	0,977518	0,977572	0,977625	0,977678	0,977731
2'01	0,977784	0,977837	0,977890	0,977943	0,977995	0,978048	0,978100	0,978152	0,978204	0,978256
2'02	0,978308	0,978360	0,978412	0,978463	0,978515	0,978566	0,978618	0,978669	0,978720	0,978771
2'03	0,978822	0,978873	0,978923	0,978974	0,979024	0,979075	0,979125	0,979175	0,979225	0,979275
2'04	0,979325	0,979375	0,979424	0,979474	0,979523	0,979573	0,979622	0,979671	0,979720	0,979769
2'05	0,979818	0,979867	0,979915	0,979964	0,980012	0,980060	0,980109	0,980157	0,980205	0,980253
2'06	0,980301	0,980348	0,980396	0,980444	0,980491	0,980538	0,980586	0,980633	0,980680	0,980727
2'07	0,980774	0,980821	0,980867	0,980914	0,980960	0,981007	0,981053	0,981099	0,981145	0,981191
2'08	0,981237	0,981283	0,981329	0,981374	0,981420	0,981465	0,981511	0,981556	0,981601	0,981646
2'09	0,981691	0,981736	0,981781	0,981825	0,981870	0,981915	0,981959	0,982003	0,982047	0,982092
2'10	0,982136	0,982180	0,982223	0,982267	0,982311	0,982354	0,982398	0,982441	0,982485	0,982528
2'11	0,982571	0,982614	0,982657	0,982700	0,982742	0,982785	0,982828	0,982870	0,982912	0,982955
2'12	0,982997	0,983039	0,983081	0,983123	0,983165	0,983207	0,983248	0,983290	0,983331	0,983373
2'13	0,983414	0,983455	0,983497	0,983538	0,983579	0,983619	0,983660	0,983701	0,983742	0,983782
2'14	0,983823	0,983863	0,983903	0,983943	0,983984	0,984024	0,984064	0,984103	0,984143	0,984183
2'15	0,984222	0,984262	0,984301	0,984341	0,984380	0,984419	0,984458	0,984497	0,984536	0,984575
2'16	0,984614	0,984652	0,984691	0,984729	0,984768	0,984806	0,984844	0,984883	0,984921	0,984959
2'17	0,984997	0,985034	0,985072	0,985110	0,985147	0,985185	0,985222	0,985260	0,985297	0,985334
2'18	0,985371	0,985408	0,985445	0,985482	0,985519	0,985556	0,985592	0,985629	0,985665	0,985702
2'19	0,985738	0,985774	0,985810	0,985846	0,985882	0,985918	0,985954	0,985990	0,986025	0,986061
2'20	0,986097	0,986132	0,986167	0,986203	0,986238	0,986273	0,986308	0,986343	0,986378	0,986413
2'21	0,986447	0,986482	0,986517	0,986551	0,986586	0,986620	0,986654	0,986688	0,986723	0,986757
2'22	0,986791	0,986825	0,986858	0,986892	0,986926	0,986959	0,986993	0,987026	0,987060	0,987093
2'23	0,987126	0,987159	0,987193	0,987226	0,987258	0,987291	0,987324	0,987357	0,987389	0,987422
2'24	0,987455	0,987487	0,987519	0,987552	0,987584	0,987616	0,987648	0,987680	0,987712	0,987744
2'25	0,987776	0,987807	0,987839	0,987870	0,987902	0,987933	0,987965	0,987996	0,988027	0,988058
2'26	0,988089	0,988120	0,988151	0,988182	0,988213	0,988244	0,988274	0,988305	0,988335	0,988366
2'27	0,988396	0,988427	0,988457	0,988487	0,988517	0,988547	0,988577	0,988607	0,988637	0,988666
2'28	0,988696	0,988726	0,988755	0,988785	0,988814	0,988844	0,988873	0,988902	0,988931	0,988960
2'29	0,988989	0,989018	0,989047	0,989076	0,989105	0,989133	0,989162	0,989191	0,989219	0,989248
2'30	0,989276	0,989304	0,989332	0,989361	0,989389	0,989417	0,989445	0,989473	0,989500	0,989528
2'31	0,989556	0,989584	0,989611	0,989639	0,989666	0,989694	0,989721	0,989748	0,989775	0,989802
2'32	0,989830	0,989857	0,989884	0,989910	0,989937	0,989964	0,989991	0,990017	0,990044	0,990070
2'33	0,990097	0,990123	0,990150	0,990176	0,990202	0,990228	0,990254	0,990280	0,990306	0,990332
2'34	0,990358	0,990384	0,990410	0,990435	0,990461	0,990486	0,990512	0,990537	0,990563	0,990588
2'35	0,990613	0,990638	0,990664	0,990689	0,990714	0,990739	0,990764	0,990788	0,990813	0,990838
2'36	0,990863	0,990887	0,990912	0,990936	0,990961	0,990985	0,991009	0,991034	0,991058	0,991082
2'37	0,991106	0,991130	0,991154	0,991178	0,991202	0,991226	0,991249	0,991273	0,991297	0,991320
2'38	0,991344	0,991367	0,991391	0,991414	0,991437	0,991460	0,991484	0,991507	0,991530	0,991553
2'39	0,991576	0,991599	0,991622	0,991644	0,991667	0,991690	0,991712	0,991735	0,991758	0,991780

	0'000	0'001	0'002	0'003	0'004	0'005	0'006	0'007	0'008	0'009
2'40	0,991802	0,991825	0,991847	0,991869	0,991892	0,991914	0,991936	0,991958	0,991980	0,992002
2'41	0,992024	0,992046	0,992067	0,992089	0,992111	0,992132	0,992154	0,992175	0,992197	0,992218
2'42	0,992240	0,992261	0,992282	0,992304	0,992325	0,992346	0,992367	0,992388	0,992409	0,992430
2'43	0,992451	0,992471	0,992492	0,992513	0,992534	0,992554	0,992575	0,992595	0,992616	0,992636
2'44	0,992656	0,992677	0,992697	0,992717	0,992737	0,992757	0,992777	0,992797	0,992817	0,992837
2'45	0,992857	0,992877	0,992897	0,992916	0,992936	0,992956	0,992975	0,992995	0,993014	0,993034
2'46	0,993053	0,993072	0,993092	0,993111	0,993130	0,993149	0,993168	0,993187	0,993206	0,993225
2'47	0,993244	0,993263	0,993282	0,993301	0,993320	0,993338	0,993357	0,993375	0,993394	0,993412
2'48	0,993431	0,993449	0,993468	0,993486	0,993504	0,993522	0,993541	0,993559	0,993577	0,993595
2'49	0,993613	0,993631	0,993649	0,993667	0,993684	0,993702	0,993720	0,993738	0,993755	0,993773
2'50	0,993790	0,993808	0,993825	0,993843	0,993860	0,993877	0,993895	0,993912	0,993929	0,993946
2'51	0,993963	0,993981	0,993998	0,994013	0,994031	0,994048	0,994065	0,994082	0,994099	0,994116
2'52	0,994132	0,994149	0,994166	0,994182	0,994199	0,994215	0,994232	0,994248	0,994264	0,994281
2'53	0,994297	0,994313	0,994329	0,994345	0,994362	0,994378	0,994394	0,994410	0,994426	0,994442
2'54	0,994457	0,994473	0,994489	0,994505	0,994520	0,994536	0,994552	0,994567	0,994583	0,994598
2'55	0,994614	0,994629	0,994645	0,994660	0,994675	0,994691	0,994706	0,994721	0,994736	0,994751
2'56	0,994766	0,994781	0,994796	0,994811	0,994826	0,994841	0,994856	0,994871	0,994886	0,994900
2'57	0,994915	0,994930	0,994944	0,994959	0,994973	0,994988	0,995002	0,995017	0,995031	0,995046
2'58	0,995060	0,995074	0,995089	0,995103	0,995117	0,995131	0,995145	0,995159	0,995173	0,995187
2'59	0,995201	0,995215	0,995229	0,995243	0,995257	0,995270	0,995284	0,995298	0,995312	0,995325
2'60	0,995339	0,995352	0,995366	0,995379	0,995393	0,995406	0,995420	0,995433	0,995446	0,995460
2'61	0,995473	0,995486	0,995499	0,995512	0,995526	0,995539	0,995552	0,995565	0,995578	0,995591
2'62	0,995604	0,995616	0,995629	0,995642	0,995655	0,995668	0,995680	0,995693	0,995706	0,995718
2'63	0,995731	0,995743	0,995756	0,995768	0,995781	0,995793	0,995806	0,995818	0,995830	0,995842
2'64	0,995855	0,995867	0,995879	0,995891	0,995903	0,995915	0,995928	0,995940	0,995952	0,995963
2'65	0,995975	0,995987	0,995999	0,996011	0,996023	0,996035	0,996046	0,996058	0,996070	0,996081
2'66	0,996093	0,996105	0,996116	0,996128	0,996139	0,996151	0,996162	0,996173	0,996185	0,996196
2'67	0,996207	0,996219	0,996230	0,996241	0,996252	0,996264	0,996275	0,996286	0,996297	0,996308
2'68	0,996319	0,996330	0,996341	0,996352	0,996363	0,996374	0,996384	0,996395	0,996406	0,996417
2'69	0,996427	0,996438	0,996449	0,996459	0,996470	0,996481	0,996491	0,996502	0,996512	0,996523
2'70	0,996533	0,996543	0,996554	0,996564	0,996574	0,996585	0,996595	0,996605	0,996615	0,996626
2'71	0,996636	0,996646	0,996656	0,996666	0,996676	0,996686	0,996696	0,996706	0,996716	0,996726
2'72	0,996736	0,996746	0,996756	0,996765	0,996775	0,996785	0,996795	0,996804	0,996814	0,996824
2'73	0,996833	0,996843	0,996852	0,996862	0,996871	0,996881	0,996890	0,996900	0,996909	0,996919
2'74	0,996928	0,996937	0,996947	0,996956	0,996965	0,996974	0,996984	0,996993	0,997002	0,997011
2'75	0,997020	0,997029	0,997038	0,997047	0,997056	0,997065	0,997074	0,997083	0,997092	0,997101
2'76	0,997110	0,997119	0,997128	0,997136	0,997145	0,997154	0,997163	0,997171	0,997180	0,997189
2'77	0,997197	0,997206	0,997214	0,997223	0,997231	0,997240	0,997248	0,997257	0,997265	0,997274
2'78	0,997282	0,997290	0,997299	0,997307	0,997315	0,997324	0,997332	0,997340	0,997348	0,997356
2'79	0,997365	0,997373	0,997381	0,997389	0,997397	0,997405	0,997413	0,997421	0,997429	0,997437
2'80	0,997445	0,997453	0,997461	0,997469	0,997476	0,997484	0,997492	0,997500	0,997507	0,997515
2'81	0,997523	0,997531	0,997538	0,997546	0,997554	0,997561	0,997569	0,997576	0,997584	0,997591
2'82	0,997599	0,997606	0,997614	0,997621	0,997629	0,997636	0,997643	0,997651	0,997658	0,997665
2'83	0,997673	0,997680	0,997687	0,997694	0,997702	0,997709	0,997716	0,997723	0,997730	0,997737
2'84	0,997744	0,997751	0,997758	0,997765	0,997772	0,997779	0,997786	0,997793	0,997800	0,997807
2'85	0,997814	0,997821	0,997828	0,997835	0,997841	0,997848	0,997855	0,997862	0,997868	0,997875
2'86	0,997882	0,997888	0,997895	0,997902	0,997908	0,997915	0,997922	0,997928	0,997935	0,997941
2'87	0,997948	0,997954	0,997961	0,997967	0,997973	0,997980	0,997986	0,997993	0,997999	0,998005
2'88	0,998012	0,998018	0,998024	0,998030	0,998037	0,998043	0,998049	0,998055	0,998062	0,998068
2'89	0,998074	0,998080	0,998086	0,998092	0,998098	0,998104	0,998110	0,998116	0,998122	0,998128
2'90	0,998134	0,998140	0,998146	0,998152	0,998158	0,998164	0,998170	0,998175	0,998181	0,998187
2'91	0,998193	0,998199	0,998204	0,998210	0,998216	0,998222	0,998227	0,998233	0,998239	0,998244
2'92	0,998250	0,998255	0,998261	0,998267	0,998272	0,998278	0,998283	0,998289	0,998294	0,998300
2'93	0,998305	0,998311	0,998316	0,998321	0,998327	0,998332	0,998338	0,998343	0,998348	0,998354
2'94	0,998359	0,998364	0,998370	0,998375	0,998380	0,998385	0,998390	0,998396	0,998401	0,998406
2'95	0,998411	0,998416	0,998421	0,998426	0,998432	0,998437	0,998442	0,998447	0,998452	0,998457
2'96	0,998462	0,998467	0,998472	0,998477	0,998482	0,998487	0,998491	0,998496	0,998501	0,998506
2'97	0,998511	0,998516	0,998521	0,998525	0,998530	0,998535	0,998540	0,998545	0,998549	0,998554
2'98	0,998559	0,998563	0,998568	0,998573	0,998577	0,998582	0,998587	0,998591	0,998596	0,998601
2'99	0,998605	0,998610	0,998614	0,998619	0,998623	0,998628	0,998632	0,998637	0,998641	0,998646

	0'000	0'001	0'002	0'003	0'004	0'005	0'006	0'007	0'008	0'009
<b>3'00</b>	0,998650	0,998655	0,998659	0,998663	0,998668	0,998672	0,998676	0,998681	0,998685	0,998689
<b>3'01</b>	0,998694	0,998698	0,998702	0,998707	0,998711	0,998715	0,998719	0,998724	0,998728	0,998732
<b>3'02</b>	0,998736	0,998740	0,998744	0,998749	0,998753	0,998757	0,998761	0,998765	0,998769	0,998773
<b>3'03</b>	0,998777	0,998781	0,998785	0,998789	0,998793	0,998797	0,998801	0,998805	0,998809	0,998813
<b>3'04</b>	0,998817	0,998821	0,998825	0,998829	0,998833	0,998837	0,998840	0,998844	0,998848	0,998852
<b>3'05</b>	0,998856	0,998860	0,998863	0,998867	0,998871	0,998875	0,998878	0,998882	0,998886	0,998890
<b>3'06</b>	0,998893	0,998897	0,998901	0,998904	0,998908	0,998912	0,998915	0,998919	0,998923	0,998926
<b>3'07</b>	0,998930	0,998933	0,998937	0,998940	0,998944	0,998947	0,998951	0,998955	0,998958	0,998962
<b>3'08</b>	0,998965	0,998968	0,998972	0,998975	0,998979	0,998982	0,998986	0,998989	0,998992	0,998996
<b>3'09</b>	0,998999	0,999003	0,999006	0,999009	0,999013	0,999016	0,999019	0,999023	0,999026	0,999029
<b>3'10</b>	0,999032	0,999036	0,999039	0,999042	0,999045	0,999049	0,999052	0,999055	0,999058	0,999061
<b>3'11</b>	0,999065	0,999068	0,999071	0,999074	0,999077	0,999080	0,999083	0,999086	0,999090	0,999093
<b>3'12</b>	0,999096	0,999099	0,999102	0,999105	0,999108	0,999111	0,999114	0,999117	0,999120	0,999123
<b>3'13</b>	0,999126	0,999129	0,999132	0,999135	0,999138	0,999141	0,999144	0,999147	0,999149	0,999152
<b>3'14</b>	0,999155	0,999158	0,999161	0,999164	0,999167	0,999170	0,999172	0,999175	0,999178	0,999181
<b>3'15</b>	0,999184	0,999186	0,999189	0,999192	0,999195	0,999198	0,999200	0,999203	0,999206	0,999208
<b>3'16</b>	0,999211	0,999214	0,999217	0,999219	0,999222	0,999225	0,999227	0,999230	0,999233	0,999235
<b>3'17</b>	0,999238	0,999240	0,999243	0,999246	0,999248	0,999251	0,999253	0,999256	0,999259	0,999261
<b>3'18</b>	0,999264	0,999266	0,999269	0,999271	0,999274	0,999276	0,999279	0,999281	0,999284	0,999286
<b>3'19</b>	0,999289	0,999291	0,999294	0,999296	0,999298	0,999301	0,999303	0,999306	0,999308	0,999310
<b>3'20</b>	0,999313	0,999315	0,999318	0,999320	0,999322	0,999325	0,999327	0,999329	0,999332	0,999334
<b>3'21</b>	0,999336	0,999339	0,999341	0,999343	0,999346	0,999348	0,999350	0,999352	0,999355	0,999357
<b>3'22</b>	0,999359	0,999361	0,999364	0,999366	0,999368	0,999370	0,999372	0,999375	0,999377	0,999379
<b>3'23</b>	0,999381	0,999383	0,999385	0,999388	0,999390	0,999392	0,999394	0,999396	0,999398	0,999400
<b>3'24</b>	0,999402	0,999404	0,999407	0,999409	0,999411	0,999413	0,999415	0,999417	0,999419	0,999421
<b>3'25</b>	0,999423	0,999425	0,999427	0,999429	0,999431	0,999433	0,999435	0,999437	0,999439	0,999441
<b>3'26</b>	0,999443	0,999445	0,999447	0,999449	0,999451	0,999453	0,999455	0,999457	0,999458	0,999460
<b>3'27</b>	0,999462	0,999464	0,999466	0,999468	0,999470	0,999472	0,999474	0,999475	0,999477	0,999479
<b>3'28</b>	0,999481	0,999483	0,999485	0,999486	0,999488	0,999490	0,999492	0,999494	0,999495	0,999497
<b>3'29</b>	0,999499	0,999501	0,999503	0,999504	0,999506	0,999508	0,999510	0,999511	0,999513	0,999515
<b>3'30</b>	0,999517	0,999518	0,999520	0,999522	0,999523	0,999525	0,999527	0,999528	0,999530	0,999532
<b>3'31</b>	0,999534	0,999535	0,999537	0,999538	0,999540	0,999542	0,999543	0,999545	0,999547	0,999548
<b>3'32</b>	0,999550	0,999552	0,999553	0,999555	0,999556	0,999558	0,999559	0,999561	0,999563	0,999564
<b>3'33</b>	0,999566	0,999567	0,999569	0,999570	0,999572	0,999574	0,999575	0,999577	0,999578	0,999580
<b>3'34</b>	0,999581	0,999583	0,999584	0,999586	0,999587	0,999589	0,999590	0,999592	0,999593	0,999594
<b>3'35</b>	0,999596	0,999597	0,999599	0,999600	0,999602	0,999603	0,999605	0,999606	0,999607	0,999609
<b>3'36</b>	0,999610	0,999612	0,999613	0,999614	0,999616	0,999617	0,999619	0,999620	0,999621	0,999623
<b>3'37</b>	0,999624	0,999626	0,999627	0,999628	0,999630	0,999631	0,999632	0,999634	0,999635	0,999636
<b>3'38</b>	0,999638	0,999639	0,999640	0,999642	0,999643	0,999644	0,999645	0,999647	0,999648	0,999649
<b>3'39</b>	0,999651	0,999652	0,999653	0,999654	0,999656	0,999657	0,999658	0,999659	0,999661	0,999662
<b>3'40</b>	0,999663	0,999664	0,999666	0,999667	0,999668	0,999669	0,999670	0,999672	0,999673	0,999674
<b>3'41</b>	0,999675	0,999676	0,999678	0,999679	0,999680	0,999681	0,999682	0,999683	0,999685	0,999686
<b>3'42</b>	0,999687	0,999688	0,999689	0,999690	0,999691	0,999693	0,999694	0,999695	0,999696	0,999697
<b>3'43</b>	0,999698	0,999699	0,999700	0,999702	0,999703	0,999704	0,999705	0,999706	0,999707	0,999708
<b>3'44</b>	0,999709	0,999710	0,999711	0,999712	0,999713	0,999714	0,999716	0,999717	0,999718	0,999719
<b>3'45</b>	0,999720	0,999721	0,999722	0,999723	0,999724	0,999725	0,999726	0,999727	0,999728	0,999729
<b>3'46</b>	0,999730	0,999731	0,999732	0,999733	0,999734	0,999735	0,999736	0,999737	0,999738	0,999739
<b>3'47</b>	0,999740	0,999741	0,999742	0,999743	0,999744	0,999745	0,999746	0,999746	0,999747	0,999748
<b>3'48</b>	0,999749	0,999750	0,999751	0,999752	0,999753	0,999754	0,999755	0,999756	0,999757	0,999758
<b>3'49</b>	0,999758	0,999759	0,999760	0,999761	0,999762	0,999763	0,999764	0,999765	0,999766	0,999766
<b>3'50</b>	0,999767	0,999768	0,999769	0,999770	0,999771	0,999772	0,999773	0,999773	0,999774	0,999775
<b>3'51</b>	0,999776	0,999777	0,999778	0,999778	0,999779	0,999780	0,999781	0,999782	0,999783	0,999783
<b>3'52</b>	0,999784	0,999785	0,999786	0,999787	0,999787	0,999788	0,999789	0,999790	0,999791	0,999791
<b>3'53</b>	0,999792	0,999793	0,999794	0,999795	0,999795	0,999796	0,999797	0,999798	0,999798	0,999799
<b>3'54</b>	0,999800	0,999801	0,999801	0,999802	0,999803	0,999804	0,999804	0,999805	0,999806	0,999807
<b>3'55</b>	0,999807	0,999808	0,999809	0,999810	0,999810	0,999811	0,999812	0,999812	0,999813	0,999814
<b>3'56</b>	0,999815	0,999815	0,999816	0,999817	0,999817	0,999818	0,999819	0,999819	0,999820	0,999821
<b>3'57</b>	0,999822	0,999822	0,999823	0,999824	0,999824	0,999825	0,999826	0,999826	0,999827	0,999828
<b>3'58</b>	0,999828	0,999829	0,999830	0,999830	0,999831	0,999831	0,999832	0,999833	0,999833	0,999834
<b>3'59</b>	0,999835	0,999835	0,999836	0,999837	0,999837	0,999838	0,999838	0,999839	0,999840	0,999840





