UNIDAD 2: PROBABILIDAD

1.INTRODUCCIÓN

Hasta la llegada del Cálculo de probabilidades y la Estadística, al campo de las ciencias, sólo se consideraban como fenómenos susceptibles de ser estudiados aquellos que se caracterizaban porque siempre que fueran analizados en idénticas condiciones en distintos experimentos, siempre se daban los mismos resultados, son EXPERIMENTOS DETERMINISTAS.
La Física y la Química están fundamentadas sobre fenómenos deterministas.
Pero en la vida se presentan también fenómenos que no son posibles de predecir de antemano su resultado, por ejemplo, el resultado de lanzar un dado. Este tipo de experimento que son repetibles en las mismas condiciones pero que dan resultados distintos fruto del azar se llaman EXPERIMENTOS ALEATORIOS.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

Llamamos **sucesos elementales** a todos los posibles resultados que se pueden obtener en un experimento. Además, el conjunto formado por los sucesos elementales se denota como **espacio muestral (E).**

Ejemplos:

1. El espacio muestral asociado al experimento de lanzar una moneda es: $E = \{C, X\}$

2. El espacio muestral asociado al lanzamiento de dos monedas será: $E = \{CC, CX, XC, XX\}$

3. El espacio muestral asociado al experimento de lanzar un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Tipos de sucesos:

- Suceso cierto o seguro: Es el que siempre se realiza. Es evidente que tendrá que estar formado por todos los resultados posibles del experimento, es decir, coincide con E.
- Suceso imposible: Es el suceso que no se realiza nunca. Lo designaremos por ∅.
- Suceso contrario del suceso A: Es el que ocurre cuando no se realiza A. Se representa por $\bar{A}$ o A^C.
- Sucesos incompatibles: Decimos que dos sucesos A y B son incompatibles cuando no pueden ocurrir simultáneamente.

Operaciones con sucesos:

- Unión de sucesos:
  Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos suceso unión de A y B al suceso que se realiza cuando se realiza A o B.
  Ejemplo: “Lanzar un dado” $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
  Consideramos los sucesos A= “Salir un número par”=$\{2,4,6\}$ y B= “Salir número primo”=$\{1,2,3,5\}$.
  Entonces el suceso “Salir número par o primo”=$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
  Además se cumple: $\bar{A} \cup A = E$

- Intersección de sucesos:
  Llamamos suceso intersección de A y B al suceso que se realiza si se realizan A y B.
  En el ejemplo anterior el suceso "Salir número par y primo" es $A \cap B = \{2\}$
  Si $A \cap B = \emptyset$, entonces se dice que A y B son incompatibles.
  Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces se dice que A y B son compatibles.
  Además $\bar{A} \cap A = \emptyset$

Propiedades de las operaciones unión e intersección:

1) Asociativa
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
2) Conmutativa
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
3) Idempotente
$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$
4) Simplificativa
$$A \cup (B \cap A) = A$$
$$A \cap (B \cup A) = A$$
5) Distributiva
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
6) Leyes de Morgan
$$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(Todas estas propiedades garantizan que el conjunto de sucesos tiene estructura de álgebra de Boole, y por eso se habla a menudo del álgebra de sucesos)

3.CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Primeramente, se van a dar dos definiciones incompletas de probabilidad que van a derivar en la definición axiomática de probabilidad.

DEFINICIONES INCOMPLETAS DE PROBABILIDAD

- **Definición clásica de probabilidad o Regla de Laplace :** define la probabilidad de que ocurra el suceso A es el cociente entre el número de casos favorables a A entre todos los posibles resultados del experimento:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

  El gran inconveniente de esta definición es que en muchos experimentos donde se quiere calcular la probabilidad de un suceso, los sucesos elementales no son equiprobables (no tienen la misma probabilidad de suceder todos los sucesos) y en estos casos no se puede aplicar la regla de Laplace.

- **Definición frecuencial de probabilidad o ley del azar**: En determinados experimentos se tiene que si se repite indefinidamente el experimento, entonces la frecuencia relativa del suceso se estabiliza entorno a un valor. De esta forma la probabilidad del suceso A toma la forma:
$P(A) = \lim_{N \to \infty} f(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$ *se conoce también como ley de los grnades números*

  El inconveniente surge porque muchos de los experimente no se pueden repetir bajo las mismas condiciones (como en el cálculo del riesgo de la concesión de una hipoteca). Por ello esta definición de probabilidad es incompleta.

- **Definición axiomática de probabilidad.**
Se llama probabilidad P a toda aplicación que asocia a cada suceso A un número real entre 0 y 1, que cumple los siguientes axiomas:
1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A$
2) $P(E) = 1$
3) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son incompatibles* $\Longrightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i$

  Propiedades:
  i) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
  ii) $P(\emptyset) = 0$
  iii) $Si\ A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
  iv) $Si\ A\ y\ B\ son\ compatibles, es\ decir, A \cap B \neq \emptyset\ se\ tiene\ que$:
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

  Ejemplo:

  "Extraer una carta de una baraja"
  Sucesos: A= "Obtener un oro" B= "Obtener un rey"
  C= "Obtener un as de espadas" D= "Obtener figuras"

  i) A y B son compatibles, pues $A \cap B = "Obtener\ rey\ de\ oros" \Longrightarrow A \cap B \neq \emptyset$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$

  ii) A y C son incompatibles, pues no se puede obtener un oro y el as de espadas a la vez: $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{10}{40} + \frac{1}{40} = \frac{11}{40}$

  iii) $B \subset D \Longrightarrow P(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \leq P(D) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

  iv) $A \cap D = "Obtener\ figura\ de\ oros"$

  $$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Llamamos **probabilidad del suceso B condicionado por el suceso A**, y se denota como **P(B/A),** a la probabilidad de que ocurra B suponiendo que haya ocurrido A. Es decir, es la probabilidad de que ocurra un suceso habiendo ocurrido otro antes. Estrictamente se define la probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A como:

$$P(B\backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Veamos ahora algunas propiedades de la probabilidad condicionada:

a) $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$.

Demostración:

En efecto:

$$1 = P(E/A) = P(B \cup \overline{B}/A) = P(B/A) + P(\overline{B}/A) \Rightarrow$$
$$P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A).$$

b) Si $B \subset C$, entonces $P(B/A) \leq P(C/A)$.

Si $B \subset C$, entonces $C = B \cup (C \cap \overline{B})$, luego:

$$P(C/A) = P(B/A) + P(C \cap \overline{B}/A)$$

y como $P(C \cap \overline{B}/A) \geq 0$, será $P(C/A) \geq P(B/A)$

c) Si $B \subset A$, entonces $P(B/A) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$

En efecto, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)}$

d) Si $A \subset B$, entonces $P(B/A) = 1$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)}$$

e) Si $A \cap B = \phi$, entonces $P(B/A) = 0$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\phi)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

Asimismo, de la expresión de la probabilidad condicionada se tiene: $P(A \cap B) = P(A)P(B\backslash A)$ se conoce como **teorema del producto.**

EJEMPLO:
Supongamos que queremos calcular la probabilidad de obtener un dos en el lanzamiento de un dado sabiendo que salió par. Se tiene entonces que nos piden:
Considerando A=”sacar par” y B=”sacar un dos”, entonces

$$P(B\backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Otro ejemplo de la probabilidad condicionada es el siguiente: Se sabe que el 50% de la población fuma y que el 10% fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?

A = “ser hipertenso” B = “ser fumador” A ∩ B = “ser hipertenso y fumador”

P(A|B) = 0,10/0,50 = 0,20

5. SUCESOS INDEPENDIENTES

Se dice que el **suceso B depende del suceso A** cuando se cumple que P(B/A)≠P(B). En caso contrario, cuando se cumple que P(B/A)=P(B) se dice que el **suceso B es independiente del suceso A.**
Asimismo, de la anterior definición se cumple que dos sucesos independientes verifican que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Veamos a continuación alguna de las propiedades:

a) Si los sucesos A y B son independientes entonces P(B/A)=P(B).
b) Si los sucesos A y B son independientes, los sucesos A y $\bar{B}$ son independientes.
c) Si los sucesos A y B son independientes, entonces los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ también son independientes.
d) Si los sucesos A y B son incompatibles con P(A)>0 y P(B)>0, entonces A y B son dependientes.

EJEMPLO:
Si tenemos una baraja de 40 cartas y hay reemplazamiento cuando se saca una carta de la baraja, se tiene que considerando el suceso A=”sacar una primera carta de la baraja” y el suceso B=”sacar una segunda carta de la baraja” van a ser independientes pues se cumple que: P(B/A)=1/40 = P(B)

Si ahora consideramos que no hay reemplazamiento. Tendremos que:
P(B/A)=1/39 ≠ P(B)=1/40

6. FÓRMULA DE LAS PROBABILIDADES TOTALES

Sean los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ un conjunto de n sucesos. Se dice que es un sistema completo de sucesos siempre que se verifique:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ (son todos sucesos incompatibles entre ellos).
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ (la unión de todos los sucesos es el total)

Por tanto sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos. Si B es un suceso del que conocemos las P(B/Ai) y también se conocen las P(Ai), entonces se define la probabilidad total como:
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) \cdot P(B/Ai)$

Supongamos que se barajan tres posibles candidatos para representar a tu comunidad de vecinos el próximo año:

a) Sr. Cuesta, con una probabilidad del 60%

b) Sr. Jiménez, con una probabilidad del 30%

c) Sr. Pérez, con una probabilidad del 10%

En función de quien sea el próximo presidente, la probabilidad de que se realice la reforma que solicitaste es:

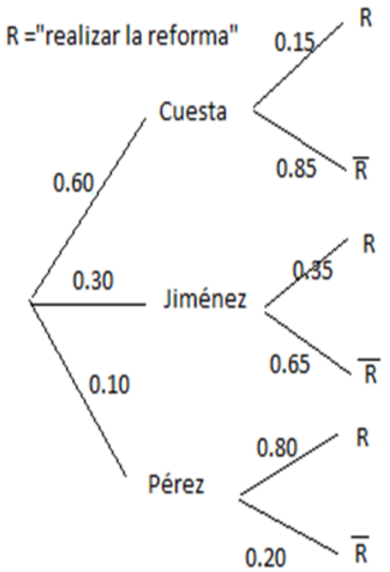
a) Si sale el Sr. Cuesta: la probabilidad es del 15%

b) Si sale el Sr. Jiménez: la probabilidad es del 35%

c) Si sale el Sr. Pérez: la probabilidad es del 80%

Entonces, ya que los tres candidatos a presidente forman un sistema completo, la probabilidad de que te hagan la reforma es:

$$P = (0{,}60 \cdot 0{,}15) + (0{,}30 \cdot 0{,}35) + (0{,}10 \cdot 0{,}80) = 0{,}275$$



7. TEOREMA DE BAYES

Tomando el sistema completo de sucesos $A_{1,}A_2,\ldots An$, si B es un suceso del que conocemos las probabilidades P(B/Ai) y también se conocen las P(Ai) entonces se define el teorema de Bayes como:

$$P\left({}^{A_i}\!/_{B}\right) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

Las $P(B/Ai)$ se denominan como probabilidades a priori mientras que las $P(Ai/B)$ se llaman probabilidades a posteriori.

EJEMPLO:

Se tienen tres urnas con las siguientes composiciones: A_1, 3 blancas y 1 negra; A_2, 2 blancas y 2 negras; A_3, 1 blanca y 3 negras. Elegimos una urna al azar y sacamos una bola de ella. ¿Cuál es la urna que nos da una probabilidad mayor para que la bola extraída sea blanca?

Si consideramos como equiprobables las distintas urnas, tenemos:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Sea B el suceso extraer bola blanca. Entonces:

$$P(B/A_1) = \frac{3}{4},\ P(B/A_2) = \frac{2}{4},\ P(B/A_3) = \frac{1}{4}$$

Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\cdot P(B/A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2/B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$P(A_3/B) = \frac{1}{6}$$