EJERCICIOS PROGRAMACIÓN LINEAL.

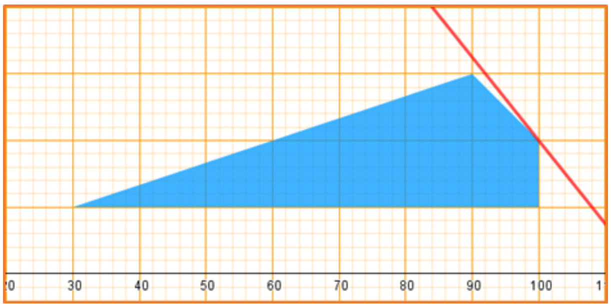
1. Dibuja las regiones factibles de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y < 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 3y > 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < -1 \end{cases}$

SOL:
a)

2. **Sea el sistema de inecuaciones siguiente: x + y ≤ 120; 3y ≤ x ; x ≤ 100; y ≥ 10.**
   a. **Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.**
   b. **¿En qué punto de esa región, F(x, y) = 25x + 20y alcanza el máximo?**

SOL:



Vértices: A(30,10); B(90,30); C(100,20); D(100,10)

b) Máximo (100,20)

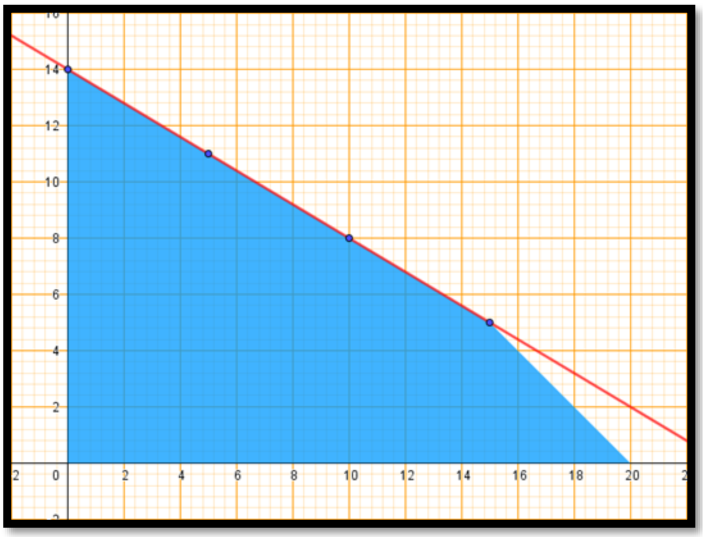
3. **Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos, A y B. Los del tipo A cuestan 300 euros y los del tipo B cuestan 500 euros. Sólo dispone de sitio para 20 frigoríficos y de 7000 euros para hacer las compras. ¿Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que gana el 30% del precio de la compra?**

SOL:
x = número de frigoríficos tipo A
y = número de frigoríficos tipo B
x e y números naturales

Función objetivo: F(x,y)=90x+150y hay que maximizar.

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 20 \\ 300x + 500y \leq 7000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Región factible:



Vértices: A(0,0) B(0,14) C(15,5) D(20,0)
F(A)=0
F(B)=2100
F(C)=2100
F(D)=1800
La función tiene como máximos todos los puntos del segmento BC, pero en el contexto del problema solo tienen sentido las soluciones de números naturales, por tanto, el máximo beneficio se tendrá en los puntos: (0,14); (5,11); (10,8) y (15,5)

4. **Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 de cable de tipo A, se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio y se obtiene de él un beneficio de 1500 €. Para fabricar 100 m de cable de tipo B, se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio y se obtiene un beneficio de 1000 €.**
¿Cuántos metros de cable hay que fabricar de cada tipo para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?
x= metros de cable de tipo A
y= metros de cable de tipo B

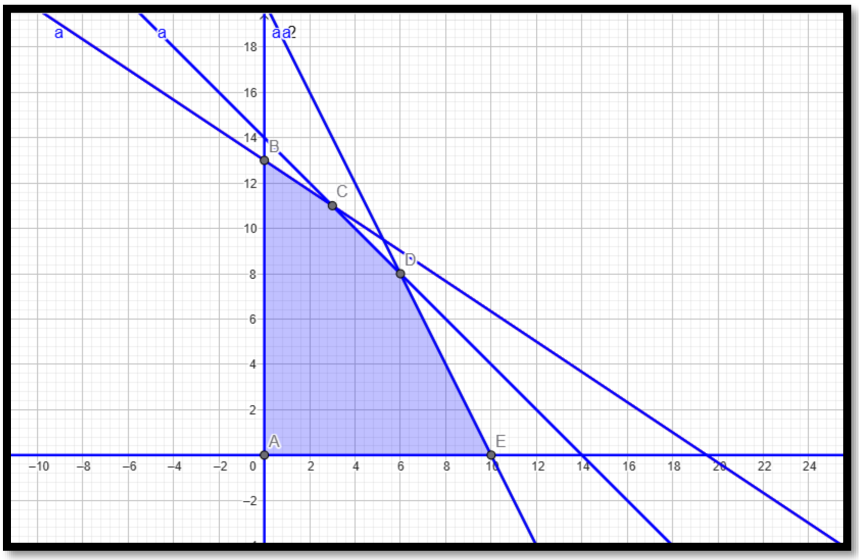
TIPO DE CABLE	CANTIDAD	COBRE	TITANIO	ALUMINIO
A	x	10x	2x	1x
B	y	15y	1y	1y

Función objetivo: F(x,y)= 1500x+1000y beneficios que hay que maximizar
Restricciones:

$$\begin{cases} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Región factible:

Vértices: A(0,0); B(0,13); C(3,11); D(6,8); E(10,0)



El máximo de la función se obtiene en el punto D(6,8). Por tanto para obtener el máximo beneficio debemos fabricar 600 metros de cable de tipo A y 800 metros de cable de tipo B y los beneficios serán de 17000 euros.

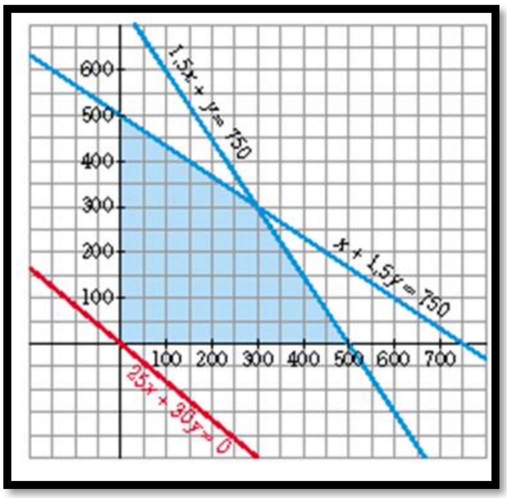
5. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €. La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

TIPO DE JOYAS	UNIDADES	ORO	PLATA	PRECIO
A	x	x	1,5x	25x
B	y	1,5x	y	30y

Función objetivo: $F(x,y) = 25x + 30y$ hay que maximizar.

Restricciones: $\begin{cases} x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Dibujamos la región factible:



Vértices: A (0, 500); B (300, 300) punto de intersección de las rectas $\begin{cases} x + 1{,}5y = 750 \\ 1{,}5x + y = 750 \end{cases}$

C (500, 0); D (0,0)

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$F(0{,}500) = 15000$

$F(300{,}300) = 7500 + 9000 = 16500$ valor máximo

$F(500{,}0) = 12500$

$F(0{,}0) = 0$

Hay que fabricar 300 joyas del tipo A y 300 joyas del tipo B.

6. Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos de riesgo alto y medio, con rendimientos del 14% y 7% respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo a razón de 4 a 5, determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

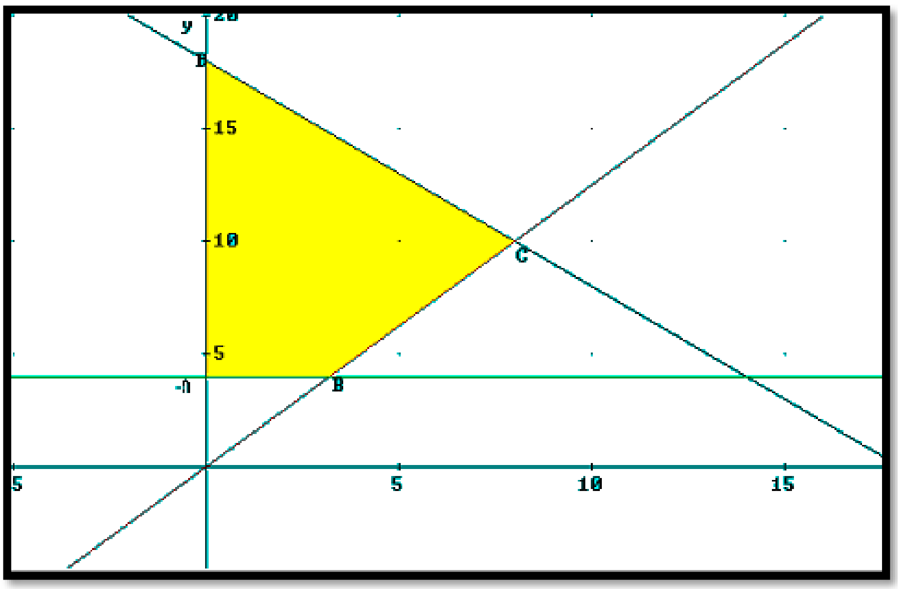
x = los millones dedicados a préstamos de riesgo alto

y = los millones dedicados a préstamos de riesgo medio.

La función objetivo es: $F(x, y) = 0{,}14x + 0{,}07y$ hay que maximizar.

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 18 \\ y \geq 4 \\ \frac{x}{y} \leq \frac{4}{5} \\ x \geq 0 \end{cases}$

Dibujamos la región factible:



Calculamos los vértices: A (0,4)

B (16/5, 4) punto de intersección de las rectas: $\begin{cases} y = 4 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$

C (8,10) punto de intersección de las rectas: $\begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$

D (0,18) punto de intersección de la recta $5x - 4y = 0$ con el eje Y.

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$F(0{,}4) = 0{,}28$

$F\left(\frac{16}{5},4\right) = 0{,}728$

$F(8{,}10) = 1{,}82$ valor máximo

$F(0{,}18) = 1{,}26$

Hay que dedicar 8 millones a los préstamos de riesgo alto y 10 millones a los de de riesgo medio.

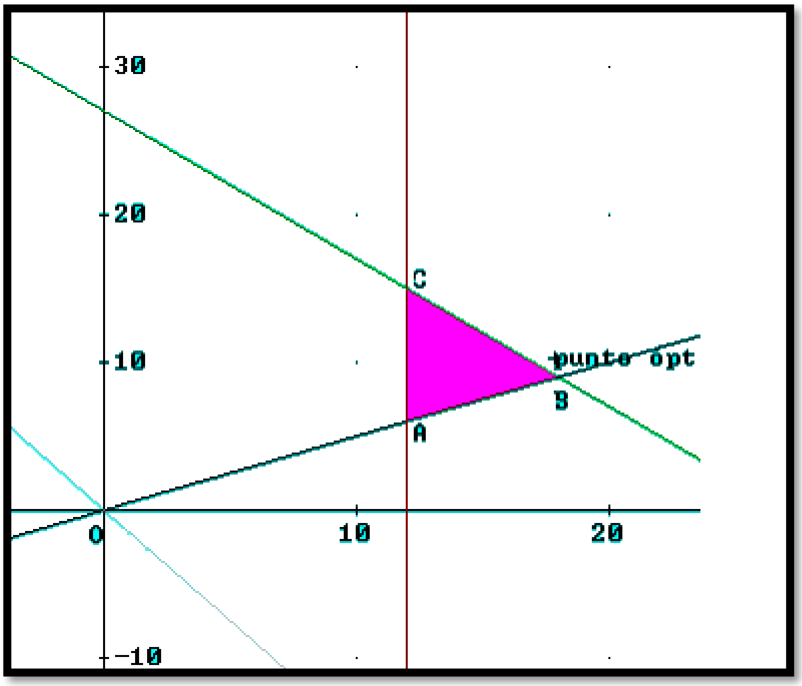
El máximo beneficio será de 1,82 millones de euros.

7. Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por vagón de coches y 360 € por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

Sean x número de vagones dedicados a coches e y número de vagones dedicados a motos.
La función objetivo es: $F(x,y) = 540x + 360y$ hay que maximizar.

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

Dibujamos la región factible:



Calculamos los vértices:
A (12,6)
B (18,9)
C (12,15)

Evaluamos la función objetivo:
$F(12{,}6) = 8640$
$F(18{,}9) = 12960$ valor máximo
$F(12{,}15) = 11880$

Deberá dedicar 18 vagones a coches y 9 vagones a motocicletas y el beneficio obtenido será de 12960 euros.

8. **Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas. Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes. El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y de A están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de A. El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y de B están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de B. El primer proveedor vende cada lote a 10 € y el segundo al doble. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos. ¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo?**

   x = número de lotes del 1º proveedor

   y = número de lotes del 2º proveedor

LOTES	CANTIDAD	SUSTANCIA A	SUSTANCIA B
1º proveedor	x	x	4x
2º oroveedor	y	4y	y

Función objetivo: F(x,y)= 10x+20y hay que minimizar

Restricciones: $\begin{cases} x + 4y \geq 10 \\ 4x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Dibujamos la región factible:

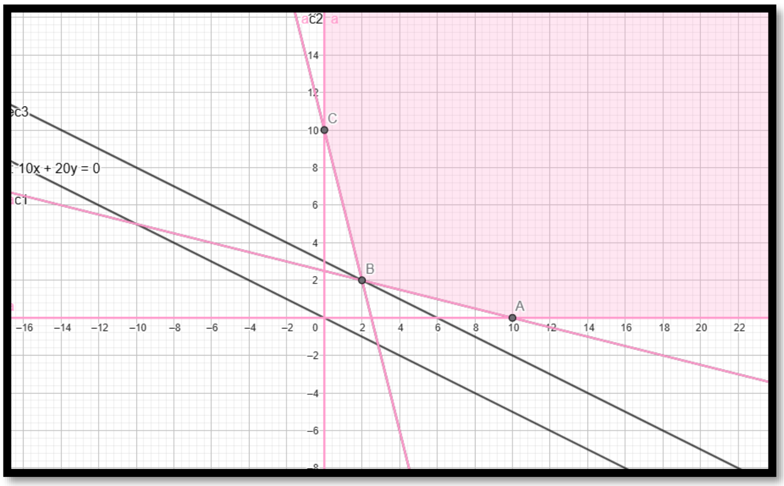
Región no acotada.

Vértices:

A(10,0)

B(2,2)

C(0,10)

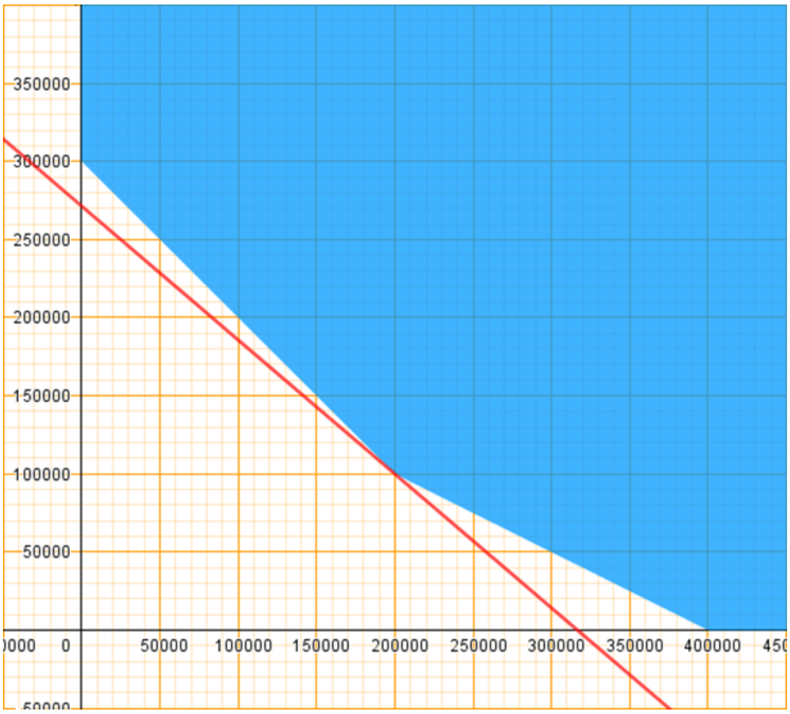


9. **Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de petróleo crudo: ligero y pesado. Cada barril de crudo ligero cuesta 35 dólares y con él la refinería produce 0,3 barriles de gasolina (G); 0,2 barriles de combustible de calefacción (C) y 0,3 barriles de combustible para turbinas (T). Cada barril de crudo pesado cuesta 30 dólares y produce 0,3 barriles G; 0,4 barriles de C y 0,2 barriles de T. La refinería ha contratado el suministro de 900000 barriles de G, 800000 barriles de C y 500000 de T. Halla las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades con un coste mínimo.**

x= cantidad de crudo ligero
y= cantidad de crudo pesado
Función objetivo: F(x,y)=30x+35y hay que minimizar

Restricciones: $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}3y \geq 900000 \\ 0{,}2x + 0{,}4y \geq 800000 \\ 0{,}4x + 0{,}2y \geq 500000 \\ \qquad\qquad x \geq 0 \\ \qquad\qquad y \geq 0 \end{cases}$

Dibujamos la región factible:



Mínimo coste en (20000,100000).

10. Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos. Los paquetes del tipo A contiene tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína, y los del tipo B contienen dos con cafeína y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 euros por cada paquete que venda de tipo A y 5 euros por cada paquete que venda del tipo B. Calcular de forma razonada cuántos paquetes ha de vender de cada tipo para obtener el máximo beneficio, y calcular dicho beneficio.

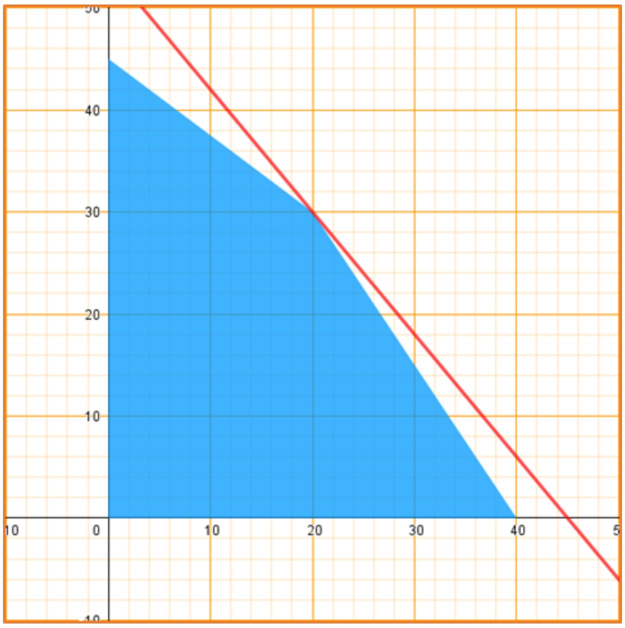
SOL:

x = paquetes tipo A
y = paquetes tipo B
x e y números naturales
Función objetivo: F(x,y)=6x+5y hay que maximizar

Restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Región factible:



Vértices:

A(0,0)

B(0,45)

C(20,30)

D(40,0)

Máximo beneficio en (20,30). Es decir, hay que vender 20 paquetes del tipo A y 30 paquetes del tipo B para obtener el máximo beneficio y este será de 270 €.