1. INTRODUCCIÓN: ORÍGENES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL.

En el mundo que vivimos pocas son las ramas del saber en las que las Matemáticas no han mostrado su influencia, en particular los conceptos de máximo y mínimo han contribuido a resolver bastantes problemas en otras ciencias.

Desde tiempos muy remotos se han estudiado problemas de optimización (maximizar y minimizar), como por ejemplo en la obra denominada "Elementos", escrita por el matemático griego Euclides, se hacía referencia a la menor y mayor recta que pude ser trazada a una circunferencia desde un punto exterior, o la forma de hallar el paralelogramo de área máxima, estando fijo su perímetro.

Durante el desarrollo del Cálculo Infinitesimal y el Cálculo de Probabilidades (siglos XVII y XVIII), por matemáticos como Leibnitz, Newton o Bernouilli, también se estudiaron problemas de optimización, utilizando funciones matemáticas.

Sin embargo, es a partir de la Revolución Industrial, cuando surgen nuevos problemas de optimización, que conlleva también la aparición de nuevas técnicas. En 1939 Leonid Vitalevich Kantarovitch publicó en el libro "Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción" en el que por primera vez se plantean problemas de programación lineal. Posteriormente, aparecerían otros problemas de optimización, como el problema del transporte o el problema del régimen alimenticio óptimo.

Paralelamente a la aparición y desarrollo de problemas de optimización, se han desarrollado técnicas de computación que han hecho posible la resolución y simplificación de algunos de estos problemas.

Una de las primeras aplicaciones de la programación lineal fue el puente aéreo de Berlín. (A mediados de 1948, la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres en poder de los aliados, que se plantearon dos posibilidades: romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la segunda decisión utilizando un modelo de programación lineal, organizando de forma efectiva el abastecimiento aéreo y terrestre: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones).

En 1947, George Bernard Dantzing formula, en términos matemáticos precisos, el método simplex, el enunciado al que se debe reducir todo problema de programación lineal. Pero los fundamentos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro John Von Neumann que publicó en los años 40, la teoría de juegos.

2. INECUACIONES LINEALES

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de alguna de las siguientes formas:

$$ax + by + c \geq 0 \qquad ax + by + c \leq 0 \qquad ax + by + c > 0 \qquad ax + by + c < 0$$

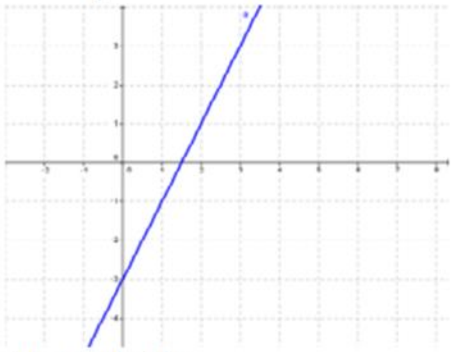
Geométricamente representa el conjunto de puntos de uno de los dos semiplanos en los que la recta $ax + by + c = 0$.

Ejemplo:

Representa la región solución de la inecuación $2x - y > 3$.

Planteamos la recta $2x - y = 3$. Dando dos valores cualesquiera a una de las dos incógnitas y despejamos la otra tenemos las coordenadas de dos puntos de la recta, y la representamos:

$$2x - y > 3 \rightarrow 2x - y = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow -y = 3 \rightarrow y = -3 \\ y = 1 \rightarrow 2x - 1 = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 : (0,-3) \\ P_2 : (1,1) \end{cases}$$

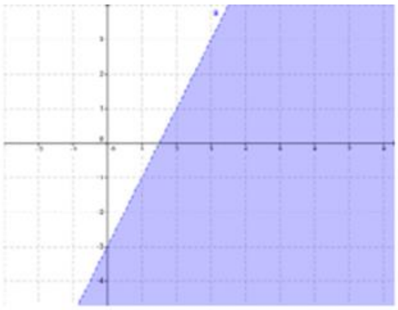


Determinamos ahora el semiplano solución:

Método 1: Tomamos un punto que no esté sobre la recta, por ejemplo $(0,\ 0)$, que está a la izquierda de la recta. Sustituimos sus coordenadas en la inecuación:

$$2 \cdot 0 - 0 = 0 < 3$$

Vemos que **no** cumple la inecuación pues debería ser mayor que 3, por lo que este punto no pertenece al conjunto solución. Es decir, la solución de la inecuación es el otro semiplano, en el que no está el punto elegido (el de la derecha).



3. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de dos o más inecuaciones lineales.

Resolver el sistema es hallar las soluciones comunes a esas inecuaciones si es que existen (puede no tener solución).

Geométricamente la solución del sistema es la región del plano formada por el conjunto de puntos que cumplen todas las inecuaciones que puede ser una región acotada o no y se llama región factible.

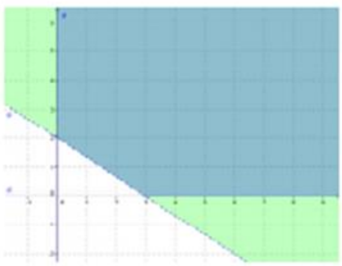
Veámoslo con ejemplos:

a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y < 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 3y > 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < -1 \end{cases}$

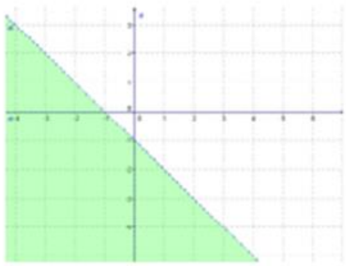
- En cada uno de los casos representamos las rectas asociadas a cada inecuación.
- Buscamos para cada una de las inecuaciones su semiplano de soluciones y, por último, la región común a todos los semiplanos.

En las representaciones gráficas siguientes puede verse la región factible o región de soluciones de los sistemas (en verde la solución de la inecuación lineal, en azul la región factible):

a) Solución acotada



b) Solución no acotada



c) No posee solución.

4. ¿QUÉ ES LA PROGRAMACIÓN LINEAL?

Como vimos anteriormente la programación lineal surgió inicialmente para dar respuesta a cuestiones de carácter logístico y militar, sin embargo, será en la industria y en la economía donde posteriormente tendrá sus aplicaciones más importantes.

En muchas situaciones de la vida real (industria, economía, etc.) se nos plantea la necesidad de elegir, entre varias posibilidades, la más ventajosa:

- Obtener el máximo beneficio posible.
- Conseguir que los costes de producción sean máximos.
- Establecer la mejor ruta de transporte desde los puntos de producción a los puntos de venta, etc.

Este tipo de problemas de optimización es lo que estudia la programación lineal. En concreto el problema tipo de programación lineal es el siguiente:

Encontrar los valores de dos variables x e y (normalmente no negativos) que hagan máxima o mínima una función lineal de ellas: $z = f(x, y) = ax + by$, teniendo en cuenta que los valores posibles de las variables están limitadas por una serie de condiciones o restricciones que se expresan mediante desigualdades.

Función objetivo: $f(x, y) = a\cdot x + b\cdot y \rightarrow$ **Máximo o mínimo**

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} a_1x + b_1y \neq c_1 \\ a_2x + b_2y \neq c_2 \\ \cdots \\ a_kx + b_ky \neq c_k \end{cases}$$

Cuando tenemos que estudiar un problema de programación lineal, se deben de tener en cuenta las siguientes definiciones:

- **Función objetivo**: es la función que se pretende maximizar o minimizar $z = f(x, y) = ax + by$
- **Conjunto de restricciones**: son las condiciones que deben cumplir las variables.
- **Solución factible**: cada par de valores de las variables que cumplen el conjunto e restricciones.
- **Región factible**: el conjunto de todas las soluciones factibles forma la región factible.
- **Soluciones óptimas**: son aquellas, de entre las factibles, que hacen máxima o mínima (según interese) la función objetivo.

También tendremos en cuenta que:

- Un problema de programación lineal puede tener ninguna, una o infinitas soluciones óptimas.
- Si existe solución se encontrará siempre en un dos vértices da región factible. Si el problema tiene infinitas soluciones óptimas, estas son siempre los puntos correspondientes a un lado de la región factible.
- Si la región es la acotada el problema tendrá por lo menos una solución, si no lo es puede no tener solución.

5. MÉTODO ANALÍTICO PARA EL CÁLCULO DE LAS SOLUCIONES

Este método se basa en el siguiente teorema, llamado teorema fundamental de programación lineal para dos variables, cuyo enunciado es el siguiente:

Una función objetivo de dos variables que posea máximo y mínimo únicos en una región factible acotada, toma los dichos valores necesariamente en los vértices de la región. Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo (máximo o mínimo) en dos vértices, entonces la función tiene infinitas soluciones ubicadas en el segmento que determinan los dos vértices mencionados. Si la región factible no está acotada, la función objetivo toma el valor óptimo (máximo o mínimo) se existen, en los vértices de la región; pero puede suceder que no alcance alguno de los dichos valores óptimos.

Del teorema anterior se deduce que para determinar los valores óptimos hay que:

● Dibujar el recinto limitado por las restricciones del problema.

● Calcular las coordenadas de los vértices.

● Sustituir las coordenadas de los vértices en la función objetivo y ver los valores donde se hace máxima y mínima.

6. MÉTODO GRÁFICO PARA EL CÁLCULO DE LAS SOLUCIONES

Para encontrar el valor óptimo, por el método gráfico, de una función objetivo, sometida a unas restricciones, se realizarán los siguientes pasos:

- Se dibuja el recinto limitado por las restricciones dadas mediante el sistema.
- Se iguala a cero la función objetivo $ax + by = 0$ y representamos la recta que pasa por el origen (0,0).
- Se traslada la recta anterior paralelamente su dirección, de modo que las rectas resultantes barran la región factible.
- Se toma nota de los puntos en los que las mencionadas rectas conectan o abandona la región factible; el valor o valores de la función objetivo en los mencionados puntos nos proporcionan el valor o valores óptimos buscados

A partir del siguiente ejemplo se muestran los pasos a seguir para resolver un problema de programación lineal:

Una empresa aeronáutica construye dos tipos de aviones A y B. Para ello dispone de 1800 millones de euros, siendo el coste de cada avión 30 y 20 millones de euros, respectivamente. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de aviones producidos no sea mayor de 80.
Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de un avión del tipo A es de 4 millones de euros y en el tipo B, 3 millones de euros. ¿Cuántos aviones debe construir de cada clase para que el beneficio sea máximo?

Debemos LEER con cuidado el problema y traducirlo adecuadamente al lenguaje algebraico, tal y como se dijo en el capítulo anterior.

La programación lineal pretende optimizar una función, en este caso es hacer máximo el beneficio, que depende de dos variables (las escribimos):

$$\text{Sean} \begin{cases} x = \text{número de aviones de tipo } A \\ y = \text{número de aviones de tipo } B \end{cases}$$

Para plantear la función a optimizar (la función objetivo), y las restricciones organizamos la información del problema:

	Nº aviones	**Coste**	**Beneficio**
Tipo A	x	**30**	**4**
Tipo B	y	**20**	**3**
Restricciones	No sea mayor de 80 $x + y \leq 80$	Dispone de 1800 € $30x + 20y \leq 1800$	**Función Objetivo** $z = 4x + 3y$

Falta un detalle a tener en cuenta, los valores deben ser positivos (no se puede tener un número negativo de aviones), es decir: $x \geq 0$ e $y \geq 0$, por tanto:

Función objetivo: $f(x, y) = 4x + 3y \rightarrow$ Máximo (en millones de euros)

Restricciones: $\begin{cases} r_1 : x + y \leq 80 \\ r_2 : 30x + 20y \leq 1800 \\ r_3 : x \geq 0 \\ r_4 : y \geq 0 \end{cases}$

Siguiendo el procedimiento explicado en la sección (2) obtenemos la *región factible*:

Teniendo en cuenta el teorema anterior, se trata de encontrar los *vértices* de la región factible.

Para ello se resuelven todos los sistemas que se pueden formar con las **ecuaciones** de las restricciones, que nos van dando los distintos puntos de corte de las rectas:

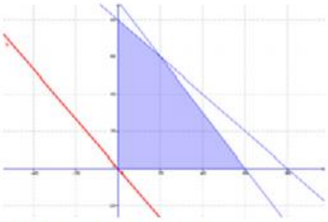
La solucion optima corresponde al vertice para el que la funcion objetivo toma el valor maximo.
En este caso es el vértice $A:(20, 60)$:

Solución: Hay que construir 20 aviones del tipo A, 60 del tipo B y el beneficio es de 260 millones de euros.

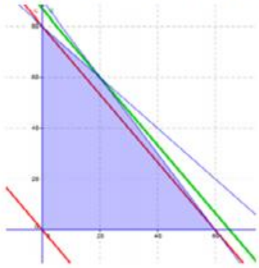
Apoyándonos en el método de las gráficas, se simplifica más puesto que solo se resuelve el sistema correspondiente al punto que tiene las dos rectas implicadas:

- Si se pretende buscar un máximo, el punto (o puntos) más a la derecha.
- Si se pretende buscar un mínimo, el punto (o puntos) más a la izquierda.

En el ejemplo la función objetivo es $z = 4x + 3y$. Las curvas de nivel son de la forma $4x + 3y = k$. Las representamos sobre la región factible empezando por la más fácil, la que pasa por el origen:



y trazamos paralelas a ella que pasen por cada vértice hasta encontrar la más *extrema*:



La solución óptima es la recta de color verde, que pasa por el vértice $A{:}(20,60)$ y hace que:

$$z = 4x + 3y \Rightarrow z = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 60 = 260$$

Hay que construir 20 aviones del tipo A, 60 del tipo B y el beneficio es de 260 millones de euros.