

MATRICES Y DETERMINANTES

- 1) (Junio – 2001) Determina A^4 sabiendo que $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2) (Junio – 2001) Determina los términos de la tercera columna de la matriz B, sabiendo que el producto A.B es una matriz escalar de determinante $2\sqrt{2}$, siendo A la matriz de filas (1,0,2), (0,1,0) y (1,0,4)

Nota: Una matriz escalar es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son iguales.

- 3) (Septiembre – 1996, LOXSE)

a) Definición de rango de una matriz. Propiedades.

b) Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- 4) (Junio – 1997, LOXSE) Resolver la ecuación matricial, $PX + 3I = Q$, siendo I la matriz identidad de orden 2

y P y Q son las matrices: $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- 5) (Junio – 1999, LOXSE)

a) Dada una matriz P, ¿existe una matriz Q, tal que el producto P.Q o bien el producto Q.P sea una matriz de una sola fila?

b) Calcular la matriz $M = P^2 - 3P - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- 6) (Septiembre – 1999, LOXSE)

a) Sean P y Q dos matrices cuadradas n x n. ¿Bajo qué condición se verifica la igualdad:

$$(P + Q) \cdot (P - Q) = P^2 - Q^2 ?$$

b) Comprobar si se verifica la igualdad anterior para las matrices: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 7) (Septiembre – 2000, LOXSE) Resolver la ecuación matricial $AX - X^t = B$, siendo X^t la traspuesta

de X y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

8) (Junio – 2001, LOXSE)

a) Propiedades del producto de matrices. (Sólo enunciarlas).

b) Sean $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = M + I$, donde I denota la matriz identidad de orden n , calcula N^2 y

M^3 . ¿Son M o N inversibles? Razonar la respuesta.

9) (Junio – 2001, LOXSE)

a) Propiedades de los determinantes (Sólo enunciarlas).

b) Sean F_1, F_2, F_3, F_4 las filas de una matriz cuadrada P de orden 4×4 , tal que su determinante vale 3. Calcula razonadamente el valor del determinante de la inversa de P , el valor del determinante de la matriz αP , donde α denota un número real no nulo, y el valor del determinante de la matriz tal que sus filas son $2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4$.

10) (Septiembre – 2001, LOXSE) Calcula los valores del parámetro α para los que la matriz M no tiene

inversa. Calcula la matriz inversa de M para $\alpha=2$, si es posible: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$

11) (Septiembre – 2001, LOXSE) Calcular la matriz X tal que $AX = A + B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12) (Junio – 2002, LOXSE)

a) Definición de producto de matrices.

b) Dadas tres matrices A, B y C se sabe que $A.B.C$ es una matriz de orden 2×3 y que $B.C$ es una matriz de orden 4×3 , ¿cuál es el orden de A ? Justifíquelo.

13) (Septiembre – 2002, LOXSE) Halle, si existe, una matriz X que verifique la ecuación:

$$B^2 X - B.X + X = B, \text{ siendo } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

14) (Junio – 2003, LOXSE) Se consideran dos matrices A y B que verifican $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Calcule la matriz } A^2 - B^2.$$

15) (Junio – 2003, LOXSE) Calcule, por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y

justificando los pasos, el determinante: $\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$

16) (Septiembre – 2003, LOXSE)

- a) Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo: $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α y β , (I denota la matriz identidad).
- b) Utilice este hecho para calcular la inversa de A .

17) (Junio – 2004, LOXSE) Demuestre que toda matriz cuadrada 3 – dimensional se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

18) (Septiembre – 2004, LOXSE)

- a) Exprese la condición que tienen que cumplir dos matrices M y N para que pueda realizarse su suma. Y, si lo que pretendemos es multiplicarlas, ¿qué condición deben cumplir las matrices?

- b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, halle una matriz X tal que $A.X + B = 0$.

19) (Junio – 2005, LOXSE) Halle todas las matrices $A = (a_{ij})$, cuadradas de orden 3, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ y $A + A^t = 4I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y A^t la matriz traspuesta de A , de las que además se sabe que su determinante vale 10.

20) (Septiembre – 2005, LOXSE) Resuelva la ecuación matricial: $A.X + C = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

21) (Junio – 2006, LOXSE) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula los valores del parámetro m para los que A tiene inversa
- b) Para $m = 0$, calcula A^3 y A^{25} .
- c) Para $m = 0$, calcula la matriz X que verifica $X.A = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

22) (Septiembre – 2006, LOXSE)

- a) Sean A , B y C tres matrices tales que el producto $A.B.C$ es una matriz 3×2 y el producto $A.C^t$ es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C . Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A , B y C .
- b) Dada $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices X que conmutan con M , es decir, verifican $X.M = M.X$
- c) Calcula la matriz Y que verifica $M.Y + M^{-1}.Y = I$, siendo M la matriz dada en b, M^{-1} la matriz inversa de M e I la matriz unidad de orden 2.

23) (Junio – 2007, LOXSE)

- a) Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con $\det(M) = -2$. Calcular el valor del determinante de la matriz que tiene por filas

$$F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3,$$

- b) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifican: $\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$ siendo C^t la matriz traspuesta de C .

24) (Septiembre – 2007) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, según los valores de m , el rango de A .
b) Para $m = -1$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A + A = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

25) (Junio – 2008) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula los valores de m para los que A tiene inversa.
b) Para $m = 1$, calcula la matriz X que verifica: $X \cdot A + X - 2A = 0$

26) (Septiembre – 2008)

a) Estudia, según los valores de m , el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$

- b) Para el valor $m = 1$, resuelve la ecuación matricial $M \cdot X = 3 \cdot A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y A^t la matriz traspuesta de A . Para este valor de m , ¿cuánto valdrá el determinante de la matriz $2 \cdot M^{21}$?

27) (Junio – 2009)

- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula los rangos de $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$, siendo A^t la matriz

traspuesta de A . Para el valor $a = 1$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot A^t \cdot X = B$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- b) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 con $\det(M) = -1$ y que además verifica $M^3 + M + I = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 3. Calcula los determinantes de las matrices: $M + I$ y $3M + 3I$.

28) (Septiembre – 2009)

- a) Estudia, según los valores de m , el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{pmatrix}$
- b) Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

29) (Junio – 2010) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Si I es la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que $A + \lambda I$ no tiene inversa. Calcula, si existe, la matriz inversa de $A - 2I$
- b) Calcula la matriz X tal que $XA + A^t = 2X$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

30) (Septiembre – 2010)

- a) Pon un ejemplo de matriz simétrica y otro de matriz antisimétrica de orden 3.
- b) Sea M una matriz simétrica de orden 3, con $\det(M) = -1$. Calcula, razonando la respuesta, el determinante de $M + M^t$, siendo M^t la matriz traspuesta de M .
- c) Calcula una matriz X simétrica y de rango 1 que verifique: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

31) (Junio – 2011)

- a) Sean C_1, C_2, C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con $\det(M) = 4$. Calcula, enunciando las propiedades de determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3$

- b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos los valores de a y b para los que $A^{-1} = A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

32) (Septiembre – 2011)

- a) Si A es una matriz tal que $A^3 + I = 0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula de orden 3, ¿cuál es el rango de A ? Calcula el determinante de A^{30} . Calcula A en el caso de que sea una matriz diagonal verificando la igualdad anterior.
- b) Dada la matriz $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula una matriz X tal que $BXB - B = B^{-1}$

33) (Junio – 2012) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de m , el rango de la matriz A .

b) Resuelve, si es posible, el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para el valor $m = 1$

34) (Septiembre – 2012)

a) Calcula, según los valores de a , el rango de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$

Para $a = 1$, calcula el determinante de la matriz $2A^t \cdot A^{-1}$

b) Sea $B = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpla que $B^{-1} = B^t$

35) (Junio – 2013) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sean B^t la matriz traspuesta de B e I la

matriz identidad de orden 3.

a) Estudia, según los valores del parámetro λ , el rango de $AB^t + \lambda I$

b) Calcula la matriz X que verifica: $AB^t X - X = 2B$

36) (Septiembre – 2013)

a) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial $(M - 2I)^2 X = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2

b) Determina todas las matrices B de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2 = 4B$. Si alguna es inversible, calcula su inversa.

c) ¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica la respuesta.

37) (Septiembre – 2013) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

- a) Calcula, según los valores de m , el rango de A .
- b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m ? Para $m = 0$, calcula A^{60}
- c) Si $m = 2$ y A es la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que el sistema tiene solución única? Justifica la respuesta.

38) (Junio – 2014)

a) Estudia, según los valores de m , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

- b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m ?

- c) Determina una matriz simétrica X de orden 2 tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y el determinante de la matriz $3X$ sea -9

39) (Septiembre – 2014)

- a) Define menor complementario y adjunto de un elemento en una matriz cuadrada.

b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina los valores de λ para los que

$A + \lambda I$ no tiene inversa.

- c) Calcula la matriz X que verifica $A \cdot X - A = 2X$ siendo A la matriz del apartado b).

40) (Junio – 2015)

- a) Calcula los posibles valores de a, b, c para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique la relación

$(A - 2I)^2 = 0$ siendo I la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

- b) ¿Cuál es la solución de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas, si la matriz de coeficientes es una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificando la relación $(A - 2I)^2 = 0$?

- c) Para $a = b = c = 2$, calcula la matriz X que verifica $A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

41) (Septiembre – 2015)

a) Define menor complementario y adjunto de un elemento en una matriz cuadrada.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- i) Calcula el rango, según los valores de λ , de $A - \lambda I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.
ii) Calcula la matriz X que verifica $X \cdot A - 2A = 3X$.

42) (Junio – 2016)

a) Calcula todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ de rango 2 tales que su inversa sea $A - 2I$, es decir,

$$A^{-1} = A - 2I, \text{ siendo } I \text{ la matriz unidad de orden 2.}$$

b) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$

i) Calcula, según los valores de m , el rango de M

ii) Para el valor $m = -1$, calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

43) (Septiembre – 2016) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores de a , el rango de A . Calcula, si existe, la inversa de A para $a = 0$.

b) Para $a = 0$, calcula la matriz B que verifica $ABA^{-1} - A = 2I$

c) Para $a = 1$, calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

44) (Junio – 2017) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, según los valores de λ , el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^t X = 6X$

45) (Septiembre – 2017) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina, según los valores de k , el rango de las matrices AB y BA .

b) Para el valor $k = 0$, determina las matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

46) (Junio – 2018)

a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4}M$.

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las traspuestas de B y C , respectivam.

47) (Septiembre – 2018) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t ?

b) Estudia, según los valores de λ , el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

48) (Junio – 2019) Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A - X = AX$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$

49) (Julio – 2019) Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

50) (Julio – 2020) Sean A y B las dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Calcular $A^2 - B^2$. Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$
- b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A + B)^t = 2I + XB$

51) (Septiembre 2020) Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$ se pide:

- a) Despejar X suponiendo que A (y por lo tanto A^2) es invertible, y decir cuales serían las dimensiones de X y de B si A tuviera una dimensión 4x4 y B tuviera 3 columnas.
- b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$