

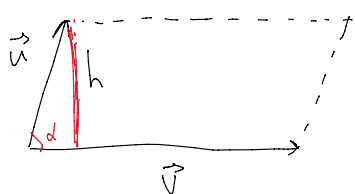
5. Producto vectorial

El producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u} \times \vec{v}$ que cumple lo siguiente:

- 1) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- 2) $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
- 3) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son lin. dependientes $\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

Propiedades

- 1) $|\vec{u} \times \vec{v}|$ es el área del paralelogramo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$



$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{|\vec{u}|} \Rightarrow h = |\vec{u}| \text{sen } \alpha$$

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = |\vec{v}| |\vec{u}| \text{sen } \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$2) \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$3) \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$4) \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$5) (a\vec{u}) \times \vec{v} = a(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (a\vec{v})$$

$$6) \vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$7) \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

6. Producto mixto

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ se calcula como el

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ se calcula como el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v} \times \vec{w}$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$$

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \quad \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

El producto mixto de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es el volumen del paralelepípedo que definen esos vectores y que el volumen del tetraedro que definen los mismos vectores es $\frac{1}{6} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$