UD 04.- Vectores en el espacio parte 2

domingo, 10 de enero de 2021 11:15

4. Operaciones con coordenadas

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u}+\vec{v} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ $\vec{u}-\vec{v} = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$

$k\vec{u} = (kx_1, ky_1, kz_1)$

El producto escalar de dos vectores se define como sigue:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})}$$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son distintos de cero:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}}$$

Si consideramos $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormal entonces:

$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$ $\vec{j}\cdot\vec{j} = 1$ $\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$

$= x_1\vec{i}\,x_2\vec{i} + x_1\vec{i}\,y_2\vec{j} + x_1\vec{i}\,z_2\vec{k} + y_1\vec{j}\,x_2\vec{i} + y_1\vec{j}\,y_2\vec{j} + y_1\vec{j}\,z_2\vec{k} +$
$+ z_1\vec{k}\,x_2\vec{i} + z_1\vec{k}\,y_2\vec{j} + z_1\vec{k}\,z_2\vec{k} = x_1x_2\vec{i}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k} =$

$$= \boxed{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Módulo de un vector

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

D/ $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}}) = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

Ángulo que forman los vectores

$\vec{u} = (1,0,1)$ $\quad \vec{v}\,(2,-1,3)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2+0+3 = 5$

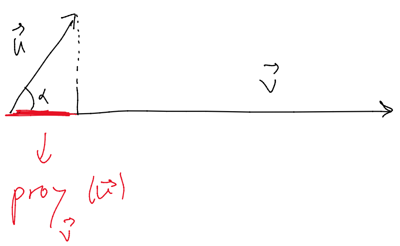
$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$ $\qquad |\vec{v}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$5 = \sqrt{2}\sqrt{14}\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \Rightarrow$ $\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{5}{\sqrt{2}\sqrt{14}}}$

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$$

Proyección de un vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$



$$\cos\alpha = \frac{|Proy_{\vec{v}}(\vec{u})|}{|\vec{u}|}$$

$$|proy_{\vec{v}}(\vec{u})| = |\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = |\vec{u}|\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} =$$

$$= \boxed{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = |proy_{\vec{v}}(\vec{u})|}$$

$$\text{Vector proyección} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \boxed{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}}$$

Ejemplo

$\vec{u} = (1,1,1)$ $\qquad \vec{v} = (1,0,1)$

$\vec{u} = (1,1,1) \qquad \vec{v} = (1,0,1)$

$$|\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1+0+1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Vector proyección $= \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \dfrac{2}{2} \cdot \vec{v} =$

$= 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} = (1,1,1)$