

CAPÍTULO 2: DETERMINANTES.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DETERMINANTE

1. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$
2. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

3. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.
4. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.
5. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.
6. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.
7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.
8. Comprueba en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.
9. Demuestra esta propiedad para determinantes de orden tres.
10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el del determinante de partida.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3=C_3+C_1+2C_2} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres: a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, pero no se verifique que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$.
13. Dadas dos matrices A y B , cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no:
 - a) $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + B^2$ f) $|A+B|^2 = |A|^2 + |B|^2$
 - b) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$ g) $|A+B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2 \cdot |A| \cdot |B|$
 - c) $(A-B)^2 = (A-B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ h) $|A-B|^2 = |A|^2 - |B|^2$
 - d) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$ i) $|A-B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2 \cdot |A| \cdot |B|$
 - e) $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ j) $|A+B| \cdot |A-B| = |A|^2 - |B|^2$

3. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante:
- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

15. Halla el valor de a que verifica:
- $$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina: a) $|A|$ y $|B|$; b) $[\text{Adj}(A)]^t$ y $[\text{Adj}(B)]^t$; c) $A \cdot [\text{Adj}(A)]^t$ y $B \cdot [\text{Adj}(B)]^t$. ¿Qué observas?
17. a) Calcula la matriz adjunta de: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. b) Halla $|C|$, $[\text{Adj}(C)]^t$ y efectúa el producto $C \cdot [\text{Adj}(C)]^t$.
c) ¿Qué observas?

4. MATRIZ INVERSA:

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A \cdot A^{-1} = I$ y $B \cdot B^{-1} = I$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b)} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{c)} & \begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & b \end{pmatrix} \quad \text{d)} & \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{e)} & \begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{g)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{h)} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i)} & \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{j)} & \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$$

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ son múltiplos de 15.

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = \frac{1}{5}$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

6.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$ calcula, sin desarrollar, el valor de $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

7.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} =$$

8.- ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale -5 y que el determinante de la matriz $3 \cdot A^t$ vale -1215 ?

9.- Justifica, sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.- Dadas las matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

11.- Obtén, en función de a , b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

12.- Demuestra que:
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$$

13.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

14.- Sea una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$. Comprueba si es verdadero o falso

$ -3A = 9$	$\frac{ A \cdot A^t }{3} = 3^{-3}$	$A^3 \notin \mathcal{M}_{3 \times 3}$	$4 A - 7 A^t = 1$	$2A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$
$ 4A - A^t = -3^2$	$ A^{-1} = -3^{-1}$	$\frac{ 3A - A^t }{ 3A^t + A } = (-2)^{-3}$	$\frac{1}{9} A^{-1} - 6 A^t ^2 = 1$	$ 3^{-2}A^t = -\frac{1}{3^7}$

Si son falsas, indica la respuesta correcta.

15.- Sean las matrices A y $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Con estos datos calcula de forma razonada: $|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$; $|A| \cdot |B|^{-1}$; $|3B^{-1} \cdot A|$; $|3A \cdot B^t|$; $|(B^{-1} \cdot A^{-1})^t|$

16.- Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A , cuyo determinante vale -2 . Se pide calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz $-\frac{3A}{2}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A .

c) El determinante de la matriz $\frac{A^2}{6}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3$.

17.- Para los determinantes $A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix}$ $A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) Halla los menores complementarios de los elementos α_{11} , α_{23} , α_{32} y α_{12} , cuando existan.

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

18.- a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A .

b) La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A .

19.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la 3ª fila y de la 2ª columna.

20.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se pide calcular el valor de los

siguientes determinantes: $|A \cdot B|$; $|C|$; $|A^t \cdot B^t|$; $|C \cdot B \cdot A|$; $|C|^2$

21. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3x$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & x & -3 \\ x & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = 5x - 3$

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

23.- Resuelve la siguiente ecuación $|A - x \cdot I| = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

24.- Halla los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

25.- Aplicando propiedades, calcular el valor del determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2.
b) Desarrollando por los elementos de una línea.

26. - Comprobar el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 137; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27$$

27.- Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

28.- Calcula los determinantes siguientes: a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

29. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

30. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

31. - Halla las matrices inversas de las matrices: a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$

32. - Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es cierto que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?

b) Calcula, si es posible, la inversa de $A \cdot B$.

33. - Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

34. - Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$, averigua para qué valores de λ existe A^{-1} , y calcúlala para $\lambda = -3$.

35. - Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

36. - Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.

b) Descompón la matriz M en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica.

c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean todos no nulos y que el valor de uno de ellos sea nulo.

d) Comprueba si: $|M| = |P| + |Q|$ y $|M| = |P| \cdot |Q|$

e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13}x^2 - |M|x + 4A_{32} = 2$

37. - ¿Para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa? Halla la inversa para $a = 2$.

38. - a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$.

39.- Sea C la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C ?

b) Calcula la inversa de C para $m = 2$.

40.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real, halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa.

b) La inversa de A para $x = 2$.

c) Con $x = 5$, el valor $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1.

41.- Dadas las matrices A, B y $C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $X \cdot A = B$

b) $B \cdot X - 2B = 3X$

c) $A \cdot X \cdot C = 2B^t + A$

42.- Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

43.- a) Halla, si existe, la matriz inversa de M .
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$

44.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué valores de a hacen singular la matriz C ?

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz B para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido?

c) Calcula B para el valor $a = 1$.

45.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

46.- Halla el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

47.- Halla el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

48.- Halla el rango de las matrices en función del parámetro:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

49. - Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

50.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$

- Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$
- Calcula el rango de la matriz A según los valores de x .

51. - Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Discute el rango de A según los valores de m .
- ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$?
- Calcula X para $m = 0$.

52.- Resuelve las ecuaciones:

a) $A \cdot X = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot X = C$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot X = B + 2C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot X + B = 2C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- El valor del determinante de la matriz A es:

- a) 4 b) 0 c) -4 d) 8

2.- El adjunto B_{23} del determinante de la matriz B es:

- a) 0 b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) -4 d) $-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3.- El valor del determinante de la matriz B es:

- a) 4 b) 0 c) 8 d) -8

4.- El rango de B es:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5.- La matriz inversa de A es:

- a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz inversa de la matriz F es:

- a) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.- El rango de la matriz C es:

- a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

8.- La matriz de determinante nulo es:

- a) C b) D c) E d) F

9.- El determinante de la matriz $5CD$ vale:

- a) 5 b) 0 c) 15 d) 1

10.- El rango de la matriz CF es:

- a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Apéndice: Problemas de determinantes en la P.A.U.

(1) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Puede existir una matriz C de forma que se puedan realizar los productos $A \cdot C$ y $C \cdot B$? Si es posible, proporciona un ejemplo. Si no es posible, explica por qué.

b) Calcula $(B - I)^2$.

c) Determina los valores de x que verifican $|A| = -7|I|$

(2) Dados los números reales a, b, c y d , se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Prueba que el polinomio $p(x) = \det(A - x \cdot I_2)$ es $p(x) = x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det(A)$, donde $\text{tr}(A)$ es la traza de la matriz A , es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A .

(3) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla el determinante de la matriz A .

b) Halla el determinante de la matriz $3 \cdot A$.

c) Halla el determinante de la matriz $(3 \cdot A)^3$.

(4) Dadas las matrices cuadradas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A \cdot (A - 2 \cdot I)$.

b) Justifica razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $(A - 2 \cdot I)$.

b.2) No existe la matriz inversa de la matriz $(A - I)$.

c) Determina el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda \cdot (A - 2 \cdot I)$.

(5) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sec \theta & \text{tg } \theta & 0 \\ \text{tg } \theta & \sec \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia para qué valores de θ la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

(6) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M , donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica

que $M^2 = M$. Obtén razonadamente:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k \cdot I$ tiene inversa.

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$.

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2I$.

d) Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M P = P M$.

(7) Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Obtén los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a = 0$.

(8) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ c & b & a-x \end{pmatrix}$

a) Obtén el polinomio $p(x) = \det(A)$.

b) Si $c = 0$, busca las raíces de $p(x)$ dependiendo de a y b .

(9) Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz A .
 b) Resuelve, si es posible, la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

(10) Utilizando las propiedades de los determinantes:

a) Verifica que: $\begin{vmatrix} a-2 & 4 & 3 \\ 1 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & a-4 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot (a-4) \cdot (a+2)$

b) Calcula: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(11) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula su inversa, si existe.
 b) Encuentra la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A .
 c) Resuelve la ecuación

$$x \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(12) Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6 \cdot A - 9 \cdot I$, donde I es la matriz identidad.

a) Expresa A^4 como combinación lineal de I y A .

b) 1) Estudia si la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $B^2 = 6 \cdot B - 9 \cdot I$.

2) Determina si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlala.

(13) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$

- a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$.
 b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x .

(14) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- a) Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$ (I es la matriz identidad)
 b) Calcula todas las matrices diagonales que no poseen inversa y que verifican la relación anterior.
 c) ¿Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $|B + C| = |B| + |C|$? Si no es cierto pon un contraejemplo.

(15) Sea la matriz $\begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$

- a) Calcula el valor de su determinante en función de a .
 b) Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

(16) Aplicando las propiedades de los determinantes (y sin desarrollar, ni aplicar la regla de Sarrus) responde razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cómo varía el determinante de una matriz de orden 3 si se multiplica cada elemento a_{ij} de la matriz por 2^{i-j} ?
 b) La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, ¿tiene inversa?

(17) Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcula razonadamente las raíces de la

ecuación polinómica: $p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$. Enuncia las propiedades utilizadas.

(18) Dada la siguiente matriz de orden n : $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$ se pide:

- Calcular el determinante de la matriz A_2 .
- Calcular el determinante de la matriz A_3 .
- Calcular el determinante de la matriz A_5 .

(19) Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

- Determina el rango de M según los valores del parámetro a .
- Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcula dicha inversa para $a = 2$.

(20) Halla una matriz X tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(21) Calcula los valores de b para los cuales la matriz A tiene inversa. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ b+1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(22) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$

(23) Obtén razonadamente:

- El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y verifica la ecuación $B^2 = B$.
- El determinante de una matriz cuadrada A que tiene tres filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Sabiendo que el determinante de } A \text{ es positivo.}$$

(24) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y se sabe que T es una matriz cuadrada de tres filas y tres columnas cuyo

determinante vale $\sqrt{2}$. Calcula razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2} T$

b) M^4

c) TM^3T^{-1}

(25) Dadas las matrices $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

- Obtén razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6.
- Calcula razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$.
- Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y .

(26) Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

- Obtén razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m .
- Explica por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$.
- Obtén razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1} . Comprueba que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz identidad.

(27) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ calcula razonadamente el valor de los determinantes siguientes escribiendo todos los pasos utilizados.

- $|A + B|$ y $\frac{1}{2}|(A + B)^{-1}|$
- $|(A + B)^{-1}A|$ y $|A^{-1} \cdot (A + B)|$
- $|2ABA^{-1}|$ y $|A^3B^{-1}|$

(28) Dada la matriz $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ a & a & -6 \end{pmatrix}$

- Calcula, en función de a , le determinante de la matriz $A(a)$, escribiendo los cálculos necesarios.
- Determina, razonadamente, los números reales a , para los que el determinante de la matriz inversa $A(a)$ es igual a $\frac{1}{66}$.

(29) Dadas las matrices cuadradas $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Justifica que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa de A , incluyendo en la respuesta todos los pasos.
- Calcula, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados.
- Obtén razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación:
$$x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 = B.$$

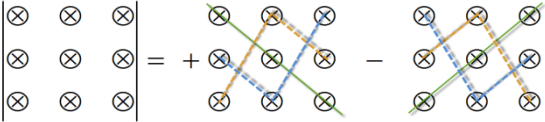
(30) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcula $(A - I)^2 \cdot (A - 5I)$ donde I es la matriz identidad.
- Obtén la matriz traspuesta de la matriz A .
- Razona si existe la matriz inversa de A y, en su caso, calcúlala.

(31) Tenemos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- Justifica que existe la matriz inversa de A , calcúlala y calcula el determinante de A^{-1} .
- Calcula el determinante de la matriz B , $B = A(A + 4 \cdot I)$.
- Determina los números reales x, y, z, t que cumplen:
$$A^{-1} = x \cdot A + y \cdot I, \quad A^2 = z \cdot A + t \cdot I.$$

RESUMEN

Definición de determinante	El determinante de una matriz cuadrada A es el número real que se obtiene mediante $\det(A) = A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$	
Determinante de orden dos	$\det(A) = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7$
Determinante de orden tres. Regla de Sarrus		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 6 + 18 - 45 - 6 - 4 = -21$
Menor complementario	Menor complementario del elemento a_{ij} , α_{ij} , es el determinante de orden $n - 1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j .	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
Adjunto de un elemento	Adjunto del elemento a_{ij} , A_{ij} , es el menor complementario α_{ij} , precedido de $+$ o $-$ según la suma de los subíndices $i + j$ sea par o impar. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ A_{33} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{cases}$
Matriz adjunta	Se llama matriz adjunta de la matriz A a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A , y se representa por $\text{Adj}(A)$.	$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$
Desarrollo por adjuntos	El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.	$ A_3 = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \end{cases}$
Matriz inversa	Si el determinante de A no es nulo: $A^{-1} = \frac{1}{ A } \cdot [\text{Adj}(A)]^t$	
Menor de una matriz	Menor de orden k es el determinante formado por la intersección de k filas y k columnas de la matriz.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$
Rango de una matriz	Rango (o característica) de una matriz es el orden del menor de mayor orden no nulo	El rango de la matriz anterior es dos, porque $M_2 = 3 - 2 = 1 \neq 0$.

CAPÍTULO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Analiza y resuelve, cuando sea posible, los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + y = 6 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y + 6x = 33 \\ 3y + 2x = 11 \end{cases}$

2. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + y = 6 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y + 6x = 33 \\ 3y + 2x = 11 \end{cases}$

3. Para los sistemas anteriores, calcula el determinante de la matriz A que has obtenido y utiliza la expresión:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{para intentar resolverlos.}$$

4. Para los sistemas anteriores, analiza qué relación existe entre el valor del determinante de la matriz A y la clasificación como Sistema Compatible o Sistema Incompatible que hiciste en la primera actividad propuesta.

5. Para los sistemas anteriores, determina el rango de la matriz ampliada que has obtenido y analiza qué relación existe entre dicho rango, el de la matriz A y la clasificación como Sistema Compatible Determinado, Sistema Compatible Indeterminado o Sistema Incompatible.

6. Decide cuáles de los siguientes sistemas puede resolverse con esta metodología matricial:

a) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 3x \\ 2x + y = 3 - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. Dadas las siguientes matrices A , B y A^* , determina los sistemas lineales asociados:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$; c) $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3x + y + 5 \\ 2x - 3y + 15 = 3x + 2y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2y = 4 + x + y \\ 3 - x + 2y = y - x \end{cases}$; c) $\begin{cases} 12 + x - 4y = 3 - 2x + 4y \\ 7 - y + 4x = 7 + y - x \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5 = 3x + 3y \\ 3 = x - y \end{cases}$

9. Razona qué valores debe tener el parámetro m para que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ mx - 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ -x + y = m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx + y = 6 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y + 6x = 33 \\ 3y + mx = 11 \end{cases}$

10. Determina si los sistemas siguientes son equivalentes o no:

a) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + y = -2 \\ x + 3y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 4z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - 9y + 5z = -3 \\ x + 3y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

11. Determina el valor de m para que los sistemas siguientes sean equivalentes:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + my = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = m \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$

12. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+2y+3z=-9 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases} & \text{e)} \\
 \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ -x+3y+3z=2 \\ x-3y+4z=5 \\ -2x-3y-3z=-5 \end{cases} & & & & \\
 \text{f)} \begin{cases} x+y+3z=3 \\ x+3y+2z=0 \\ 2x+3y+z=-1 \\ x-3y-3z=5 \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} x+y+3z=3 \\ x-y+z=1 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x+y+3z=3 \\ 2x+2y+6z=1 \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} w-x+y+z=5 \\ w+x-y-z=3 \end{cases} &
 \end{array}$$

13. Resuelve el sistema anterior y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+6y-z=-9 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{2. – Dados los sistemas: a)} \begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y=3x \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y=3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}
 \end{array}$$

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer.

b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

3. – Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} -2x+y=-3 \\ 6x-3y=9 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -4x-6y=-6 \\ -2x+3y=-3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 9x-6y=6 \\ 6x+4y=3 \end{cases}
 \end{array}$$

4. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible, la Regla de Cramer:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible: a)} \begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-az=2 \\ x+y+az=10 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{6. – Dado el sistema} \begin{cases} (a+2)x+(a-1)y-z=3 \\ ax-y+z=3 \\ x+ay-z=1 \end{cases}
 \end{array}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a .

b) Resuélvelo para el caso $a = -1$.

$$\begin{array}{l}
 \text{7. – Dadas las ecuaciones:} \begin{cases} 6x-9y+2z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases} \text{ se pide:}
 \end{array}$$

a) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser compatible determinado.

8. – Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$ se pide:
- Discute y resuelve, cuando sea posible.
 - Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:
 - una solución
 - muchas soluciones
 - no tenga solución
9. – Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas homogéneos:
- $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y = x + 3z - y \\ x = z - 2y + x \\ z = x - 2y - 2z \end{cases}$
10. – Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Calcula cada uno de los tres productos $A \cdot B$, $E \cdot D$, $D \cdot E$.
 - Si $C - 2AB = -D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m . ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?
11. – Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$
- Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a .
 - ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?
 - Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$
12. – El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 €. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.
13. – Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.
14. – La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?
15. – Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quintuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?
16. – En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:
- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
 - Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
 - Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura
- Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?
17. – Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.
18. – Una persona invirtió 72000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.
19. – Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

20. – Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.
21. – En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.
- Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x , y , z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.
 - ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?
 - Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.
22. – En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1,18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son " m " euros/litro). También recuerda que:
- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C.
 - el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
 - el gasto de litros en A superó al de B en 12,60 euros.
- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de " m ") para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.
 - Estudiar la compatibilidad del sistema en función de " m ". ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?
23. – En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.
- ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?
 - Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2z + 2y = 5 \\ 2y - x + z = 11 \end{cases}$$

1.- Su matriz de coeficientes es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Su matriz ampliada es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$

4.- El sistema es:

a) compatible determinado b) compatible indeterminado c) incompatible d) tiene tres soluciones

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y = -4y \\ 5 + 2y + z = 3x \end{cases}$$

5.- Su forma matricial es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $-3x + 2y + z = 7$

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $-3x + 2y + z = 7$

8.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $x + y + z = 7$

9.- Indica la afirmación que es correcta:

- a) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.
- b) Dos sistemas son equivalentes si coincide alguna de sus soluciones.
- c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.
- d) Todos los sistemas se pueden resolver por el método de Cramer.

Apéndice: Problemas de matrices en las P.A.A.U.

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + z = 11 \end{cases}$$
 a) Obtén su matriz de coeficientes. b) Calcula el determinante de la matriz anterior. c) Sin resolver el sistema, razonar si tendrá solución única.
- (2) En el primer curso de un centro de la Universidad de Oviedo se han matriculado 352 alumnos divididos en tres titulaciones distintas. En la tercera titulación hay la tercera parte de alumnos que en la primera, y la diferencia de alumnos que hay entre la primera titulación y la segunda es inferior en dos alumnos al doble de los alumnos que hay en la tercera.
- Establece un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de alumnos en cada titulación, y obtenga el número de alumnos que hay en cada titulación.
 - Calcula el determinante de la matriz del sistema.
- (3) En un partido de baloncesto femenino, el equipo de la Universidad de Oviedo ganó al de otra universidad española con un marcador 64 a 48. El marcador obtenido por el equipo ganador se consiguió mediante canastas de dos puntos, triples (canastas de tres puntos) y tiros libres (canastas de un punto). El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de triples. Además, el número de canastas de dos puntos fue dos más que el número de tiros libres. A) Plantea el sistema de ecuaciones resultante de lo anterior. B) Escribe la matriz ampliada del sistema obtenido en A). C) ¿Cuántas canastas de cada tipo metió el equipo de la Universidad de Oviedo?
- (4) Cada acción de BBA ha dado una ganancia de 6 euros y cada acción de NKO ha dado una ganancia de m euros. Un inversor había comprado acciones de ambos tipos, lo que le supuso una ganancia total de 800 euros, pero está arrepentido de su inversión, porque si hubiese comprado la mitad de acciones de BBA y el doble de NKO, su ganancia total habría sido de 1150 euros.
- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada tipo. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema, ¿existe algún valor de m para el que el sistema tenga más de una solución?
 - Si la ganancia por cada acción de NKO fue de 5 euros, ¿cuántas acciones de NKO había comprado?
- (5) Una tienda vende bolsas de caramelos a 2 euros cada una y bolsas de gominolas a 4 euros cada una. La recaudación de un determinado día por estos dos conceptos ha ascendido a 200 euros y se sabe que el número de bolsas de caramelos que han vendido ese día es m veces el número de bolsas de gominolas.
- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de bolsas de cada tipo que se han vendido ese día. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de bolsas de caramelos que de gominolas?
 - Suponiendo que se han vendido el triple de bolsas de caramelos que de gominolas, ¿cuántas bolsas de gominolas se han vendido?
- (6) Un tren realiza un viaje directo entre dos capitales. El viaje lo realiza por dos tipos de vías, por la primera circula siempre a 100 Km/h y por la segunda circula siempre a m Km/h. El recorrido total del viaje es de 1240 Km y la duración del mismo es de 11 horas.
- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de horas que circula por cada tipo de vía. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía sea también de 100 Km/h?
 - Suponiendo que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía es 120 Km/h, ¿cuánto tiempo ha estado circulando por el primer tipo de vía?
- (7) Una academia de idiomas da clases de español a un total de m alumnos, entre los de nivel básico y los de nivel avanzado, con los que recauda 3000 euros. Los alumnos de nivel básico pagan m euros al mes, mientras que los de nivel avanzado pagan el doble.
- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de alumnos de cada tipo en las clases de español de la academia. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los alumnos de nivel básico paguen 40 euros al mes?
 - Si los alumnos de nivel básico pagan 50 euros al mes, ¿cuántos alumnos de nivel avanzado hay?
- (8) Juan y Luis son dos amigos que en total tienen 10 hijos. Un tercer amigo, Javier, tiene m hijos más que Juan y m veces los de Luis.
- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de hijos de Juan y Luis. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?
 - Si Javier tiene el doble de hijos que Luis, ¿cuántos hijos tiene Luis?

- (9) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.
- Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.
 - Resolver el problema.
- (10) Considere el sistema
$$\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$$
- Estudie su compatibilidad según los distintos valores del número real a .
 - Resuélvalo, si es posible, en el caso $a = 1$.
- (11) Dado el sistema
$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$
- Estudie su compatibilidad según los valores de a .
 - Resuélvalo cuando $a = 0$.
- (12) La matriz ampliada asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales es: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
- Obtener las ecuaciones del sistema.
 - Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes del sistema.
 - Sin resolver el sistema, deducir razonadamente si admite soluciones y en qué número.
- (13) La matriz de los coeficientes de un sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$ y la de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$
- ¿Para qué valor o valores de a el sistema no tiene solución?
 - Para cierto valor de a un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía a ? ¿Tenía más soluciones el sistema?
 - Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga solución única y, para dicho valor, resuélvelo.
- (14) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.
- Calcular las matrices $(A \cdot B) + C$ y $3D$
 - Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z .
 - Estudiar la compatibilidad del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?
 - Encontrar, si es posible, una solución.
- (15) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde a es desconocido.
- Sea el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es A y de términos independientes B . ¿Puede para algún valor de a no tener solución este sistema? ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única?
 - Si la matriz de coeficientes es A pero la de términos independientes es C , ¿es posible que para algún valor de a el sistema no tenga solución? Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga más de una solución y calcula dos de ellas.
- (16) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}$, $D = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$
- Calcula cada uno de los tres productos $A \cdot B$, $D \cdot E$, $E \cdot B$.
 - Si $AB + C = D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m . ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

(17) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

- a) Si $AB - C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de a .
 b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución? ¿Es siempre única? Encuentra una solución para $a = 1$ con $y \neq 1$

(18) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que $AB = 2C - D$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) donde a es cierto valor desconocido.
 b) Si se supiera que el sistema tiene solución, ¿podríamos descartar algún valor de a ?
 c) Si se supiera que el sistema tiene solución única, ¿podríamos descartar algún valor de a ?
 d) ¿Hay algún valor de a para el que el sistema tenga más de una solución?

(19) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a .
 b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?
 c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$
 (20) Halla todas las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas del que se conoce que $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$ son soluciones y el rango de la matriz de los coeficientes es mayor o igual que uno.

RESUMEN

		Ejemplos
Sistema de ecuaciones lineales	Se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto de relaciones: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$
Sistema homogéneo	Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo cuando el término independiente de todas las ecuaciones es igual a cero.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$
Sistemas equivalentes	Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.	$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = -2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ Verifican $x = 1$; $y = 2$
Expresión matricial de un sistema	Todo sistema puede expresarse como producto de matrices en la forma $A \cdot X = B$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{cases} 6x + y = 15 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} ; A \cdot X = B \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$
Resolución por inversa	$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$	
Teorema de Rouchè-Fröbenius	El teorema de Rouchè-Fröbenius dice: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada".	$\begin{cases} \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \text{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \text{rg}(A) < \text{rg}(A^*) \Rightarrow \text{S.I.} \end{cases}$
Regla de Cramer	La solución de un sistema puede calcularse como: $x_i = \frac{\Delta_i}{ A } \quad \text{Si } A \neq 0$ Siendo Δ_i el determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita i -ésima por la matriz de términos independientes.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $x = \frac{20}{10} = 2 \quad y = \frac{10}{10} = 1$

CAPÍTULO 4: GEOMETRÍA EN EL ESPACIO - VECTORES.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. GEOMETRÍA DEL PLANO

Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen $A(-1, 1, 2)$ y extremo $B(3, 1, -4)$.

Dados los puntos $P = (2, 2, 3)$, $Q = (1, 0, 5)$ y $R = (-2, 3, 4)$ y los vectores $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $\vec{w} = (0, -2, 1)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

- a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ d) $P + \vec{v}$ e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

Dados tres puntos genéricos, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$, demuestra:

- a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$ c) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ y $\vec{w} = (7, 2, -1)$ calcula:

- a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w}$ b) $2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$ c) $3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 3\vec{w}$ d) $3\vec{u} - 2(\vec{v} + \vec{w})$

Dados los puntos $A(0, -2, 6)$ y $B(4, 8, -4)$, determina el punto medio del segmento AB .

Comprueba si los puntos $A(3, 2, 1)$, $B(4, 4, -2)$ y $C(4, -1, 3)$ están alineados.

Determina si son linealmente independientes o no los conjuntos de vectores siguientes:

$A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (4, 2, -7)$.

$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, 4, 0)$.

$C = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, 2, -7)$ y $\vec{x} = (0, 0, 1)$

3. PRODUCTO ESCALAR

Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (0, 1, -3)$ y $\vec{v} = (-3, 4, 6)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Dados los vectores libres:



a) Representa los vectores: $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$ y $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{c}$.

b) Halla un vector $\vec{d}$ tal que $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

2. - Dados $\vec{a} = (2, -1)$ y $\vec{b} = (-3, m)$, halla el valor de m para que sean linealmente dependientes.

3. - Comprueba si son o no linealmente independientes los siguientes vectores:

a) $\vec{x} = (-2, 3)$ e $\vec{y} = (6, -9)$ b) $\vec{x} = (-1, -2, 3)$, $\vec{y} = (-2, 0, 1)$, $\vec{z} = (2, -4, 5)$ y $\vec{t} = (3, 2, -4)$

c) $\vec{x} = (2, 1, 0, -1)$, $\vec{y} = (1, -3, -1, 0)$ y $\vec{z} = (3, -2, -1, 1)$

4. - a) Dados los vectores $\vec{x} = (1, 3, -2)$ e $\vec{y} = (3, m, -6)$, halla el valor de m para que los dos vectores sean linealmente independientes. b) Si $m = -2$, ¿se puede expresar el vector $\vec{z} = (-1, 8, 1)$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$?

5. - Dados los vectores $\vec{u} = (-3, 4, 0)$, $\vec{v} = (1, -2, 2)$ y $\vec{w} = (0, -m, 1)$, calcula el valor de m para que el vector $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

6. - Dados los vectores $\vec{x} = (1, -2, 0)$, $\vec{y} = (3, -1, 2)$ y $\vec{z} = (-m, -1, -2)$, halla el valor de m para que los tres vectores sean linealmente dependientes. En este caso, expresa $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

7. - Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2m, 0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes. b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, y halla dicha combinación. c) Sean coplanarios.

8. - Los vectores $\vec{x} = (1, 0, 0)$, $\vec{y} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{z} = (2, 1, 1)$, ¿forman una base de V^3 ? En caso afirmativo:

a) Halla las componentes del vector $\vec{u} = (3, -2, 5)$ respecto de dicha base. b) Halla las componentes en la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ del vector $\vec{v}$, si sus coordenadas en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son 2, -3 y 2 respectivamente.