

5. TEOREMA DE ROUCHÉ

Sea A la matriz de un sistema y A^* la matriz ampliada. El sistema tiene solución si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c \end{pmatrix}$$

6. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

- Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = n = n^\circ \text{ de incógnitas}$

SCD

- Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < n = n^\circ \text{ incógnitas}$

SCI

- Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$

SI

7. REGLA DE Cramer

La regla de Cramer se aplica para resolver sistemas que cumplen con las siguientes condiciones:

1) El n° de ecuaciones y de incógnitas sea el mismo.

2) El determinante de la matriz del sistema es distinto de cero.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

A_i es la matriz que resulta de cambiar la columna i por la columna de términos independientes.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-2 + 0 - 3) - (1 + 0 + 3) = -5 - 4 = \textcircled{-9}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-9}{-9} = \textcircled{1} \quad |A_1| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 0 - 6) - (2 - 0 + 3) = -4 - 5 = \textcircled{-9}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{9}{-9} = \textcircled{-1}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 2 + 2) - (-1 - 4 - 2) = 2 + 7 = 9$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-9} = \textcircled{1}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4 + 0 + 3) - (2 + 0 + 6) = -1 - 8 = \textcircled{-9}$$