

1. DETERMINANTES DE ORDEN 2

El determinante de una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

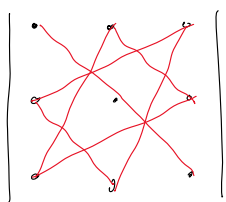
$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo

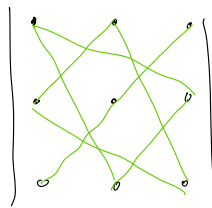
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 3 = 32$$

2. DETERMINANTES DE ORDEN 3

Para calcular un determinante de orden 3 hacemos lo siguiente:



+



-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-2 + 0 + 36) - (4 + 30 + 0) = 34 - 34 = 0$$

PROPIEDADES

1) $|A| = |A^t|$

2) Si A tiene una fila o una columna de ceros el determinante es cero.

3) Si permutamos dos filas o dos columnas contiguas el determinante cambia de signo.

4) Si A tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & e & e \\ e & e & e \end{vmatrix} = (\underbrace{ae^2 + e^2c + be^2}) - (\underbrace{e^2c + ae^2 + be^2}) = 0$$

5) Si multiplicamos una fila o una columna por un n° , el determinante queda multiplicado por ese n° .

Ejemplo

$$\begin{matrix} & & & \\ & & & \\ \cdot 2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+1+0) - (0+0+0) = 2 \right. & & \downarrow \cdot 2 \\ & & & \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2+2+0) - (0+0+0) = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{11}a_{23}a_{32} + ka_{12}a_{21}a_{33}) - (ka_{13}a_{22}a_{31} + ka_{11}a_{23}a_{32} + ka_{12}a_{21}a_{33}) = k \det A$$

6) Si tengo dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$7) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8) Si a una fila o a una columna le sumamos una combinación lineal del resto de filas o columnas, entonces el det. no varía.

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3+aC_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} + \overbrace{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & aC_1 \end{vmatrix}}^{0}$$

9) Si una matriz tiene una fila o una columna que sea combinación lineal del resto, entonces el determinante es cero y recíprocamente.

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & aC_1+bC_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & aC_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & bC_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$10) |AB| = |A| |B|$$

3. MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

El menor complementario del elemento a_{23} se denota por la letra:

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \textcircled{-39}$$

El adjunto del elemento a_{ij} , se denota por A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \alpha_{23} = -1(-39) = \textcircled{39}$$

4. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR ADJUNTOS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{31} + 5 A_{32} - 1 A_{33} = 4 \cdot 8 + 5(-6) - 1(2) = 32 - 30 - 2 = 0$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 8 = 8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 6 = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot 2 = 2$$