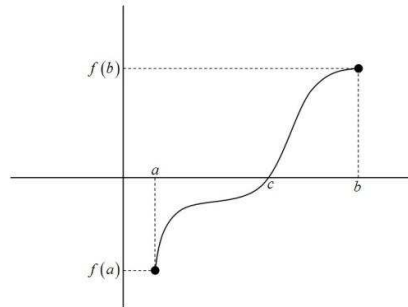


Teorema de Bolzano:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, es decir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si tenemos una función $f(x)$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distintos signos, al ser continua tiene que cortar al eje x al menos en un punto

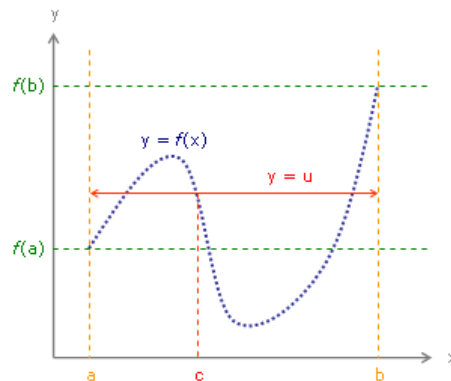


Teorema de Darboux, o del valor intermedio:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces la función $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, al menos una vez, en el intervalo (a, b) .

Demostración:

Queremos probar que para todo u entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = u$.



Trataremos el caso $f(a) < f(b)$, seguiríamos el mismo razonamiento para $f(a) > f(b)$.

Sea u un número cualquiera comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, $f(a) < u < f(b)$. Consideremos la función $g(x) = f(x) - u$, que es continua en $[a, b]$ por serlo $f(x)$ y que verifica $g(a) = f(a) - u < 0$ y $g(b) = f(b) - u > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = u$, como queríamos demostrar.

Teorema de Weierstrass:

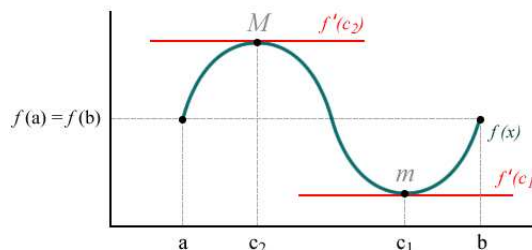
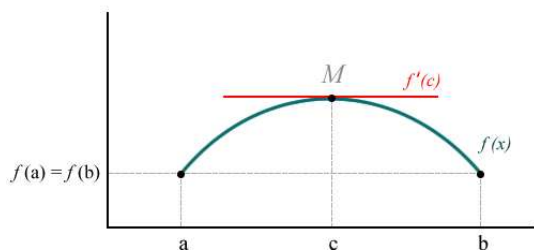
Toda función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos en puntos c y c' , respectivamente, de dicho intervalo.

Teorema de Rolle:

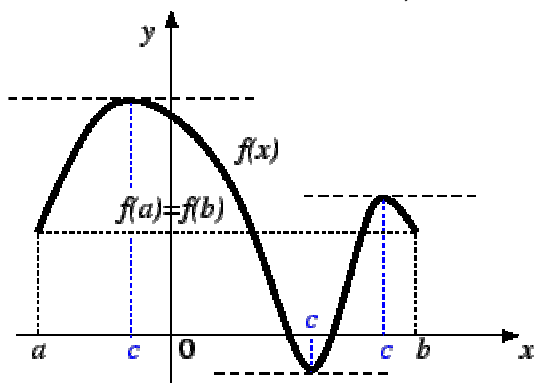
Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) , si $f(a) = f(b)$, existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = 0$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Intuitivamente el teorema nos afirma que si tenemos una función continua y derivable en un intervalo y además toma los mismos valores en los extremos de dicho intervalo, al menos existe un punto interior al intervalo en el que la recta tangente a la gráfica de la función sería horizontal.



La garantía sobre la existencia de ese punto no asegura que sea único, pueden existir varios puntos que verifiquen las tesis del teorema o incluso infinitos, en el caso de una función constante en el intervalo.



Demostración:

Por ser la función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, según el teorema del máximo de Weierstrass, alcanza su máximo y su mínimo absolutos en puntos de dicho intervalo. Supongamos que el máximo o el mínimo se encuentra en un punto c interior al intervalo, es decir, $c \in (a, b)$, entonces, $f'(c) = 0$ y hemos terminado. Supongamos ahora que el máximo y el mínimo no están en puntos del intervalo (a, b) , entonces están en los extremos, uno en $x = a$ y el otro en $x = b$. Como

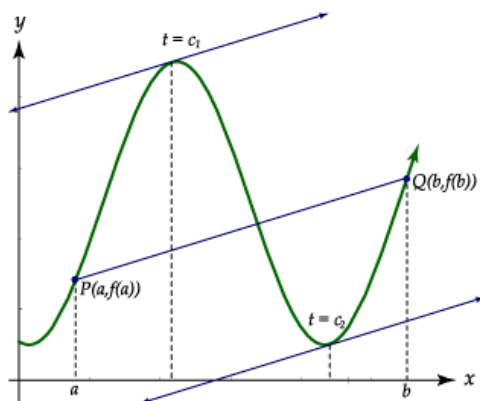
$f(a) = f(b)$, el valor máximo y el valor mínimo son iguales y la función es constante en el intervalo, con lo que $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Teorema del valor medio o de Lagrange (Teorema del valor medio del cálculo diferencial):

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Intuitivamente, el teorema nos garantiza que si tenemos una función continua y derivable en un intervalo, existe, al menos, un punto interior al intervalo en el que la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$.



La recta que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$ tiene pendiente $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y su ecuación es $y - y_0 = m(x - x_0)$, es decir, si tomamos como punto (x_0, y_0) al punto $P(a, f(a))$, tenemos $f(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, o también $f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = 0$.

Para demostrar este teorema nos basaremos en el teorema de Rolle por lo que necesitamos una función que cumpla las hipótesis de dicho teorema.

Demostración:

Consideramos la función $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. La función $h(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , por ser suma de funciones continuas y derivables.

Además $h(a) = h(b) = 0$, puesto que $h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$ y

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}(b-a) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0.$$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $h(x)$, existirá un punto $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$.

Como $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, tenemos que $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, luego:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema de Cauchy:

Si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) ,
existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Regla de L'Hopital

Esta regla permite obtener fácilmente ciertos límites y dice:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También se puede aplicar para cuando $x \rightarrow \infty$ y la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

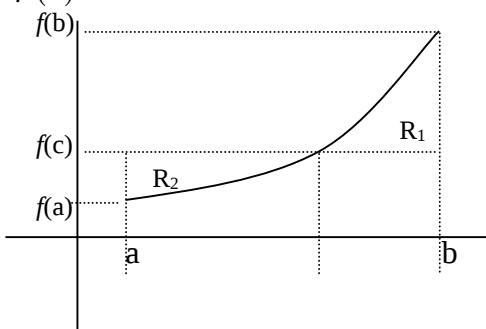
Si f es una función continua en $[a, b]$, existe al menos un punto c del intervalo $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Interpretación geométrica

El área limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual al área del rectángulo de base $(b - a)$ y altura $f(c)$, siendo c un determinado punto de $[a, b]$.

$f(c)$ recibe el nombre de altura media o valor medio de $f(x)$ en $[a, b]$.



En este ejemplo, llegaría con tomar c de manera que las áreas residuales R_1 y R_2 fueran iguales.

Demostración

Por ser f continua en $[a, b]$, alcanza su máximo M y su mínimo m , es decir, $x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$

$$\text{Entonces } \int_a^b m \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M \quad \text{luego} \quad m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

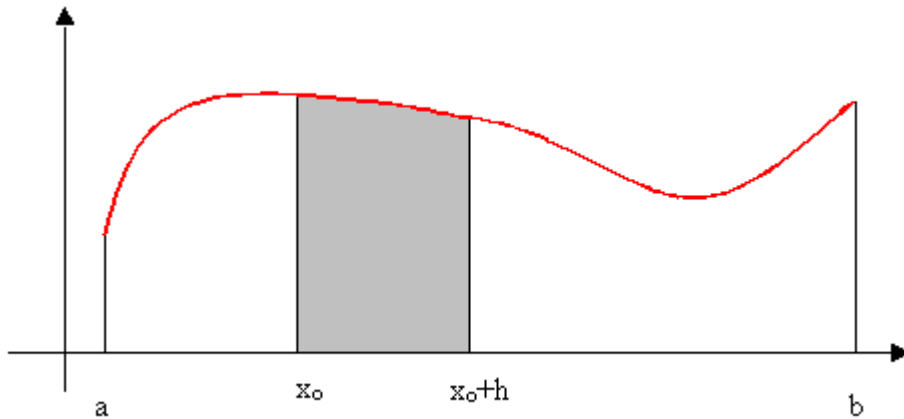
Si dividimos por $b - a$: $m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$. Luego por el teorema de Darboux existe algún número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$

$$\text{Por lo tanto } \int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c) \quad \text{para algún número } c \in [a, b]$$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

“Sea f continua en $[a, b]$, entonces la función de área $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a, b) y además,
 $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ ”

Demostración.



$$G(x_0 + h) - G(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

por el teorema del valor medio para integrales en el intervalo $[x_0, x_0+h]$, tenemos que

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_h) \cdot h$$

para algún valor x_h entre x_0 y x_0+h y en consecuencia

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = f(x_h) \cdot h$$

Para calcular la derivada de G en x_0 , calculamos el siguiente límite:

$$G'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(x_0)$$

pero cuando h se aproxima a cero el punto x_h se aproxima a x_0 y en consecuencia

$$G'(x_0) = f(x_0)$$

que es lo que deseábamos demostrar.

Regla de Barrow

“Si f es continua en $[a, b]$ y G es una primitiva de f , entonces: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ ”

Demostración

$F(x) = \int_a^x f$ es la función área bajo la curva

$F'(x) = f(x)$ por el teorema fundamental del cálculo integral.

$G'(x) = f(x)$, por hipótesis ya que $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Dos funciones que tienen la misma derivada difieren, a lo sumo, en una constante, por tanto $F(x) = G(x) + k$.

En la igualdad anterior, hacemos $x = a$. Como $F(a) = \int_a^a f = 0$, queda: $G(a) + k = 0$, es decir, $k = -G(a)$. Por lo tanto, $F(x) = G(x) - G(a)$.

Luego $F(b) = \int_a^b f = G(b) - G(a)$ como queríamos demostrar.