

Límite de una función en un punto y continuidad

jueves, 5 de octubre de 2023 0:14

Límite de una función en un pto

Para que exista el límite de una función en un punto, tienen que existir los límites laterales y coincidir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \\ \parallel \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b}$$

Ejemplos

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

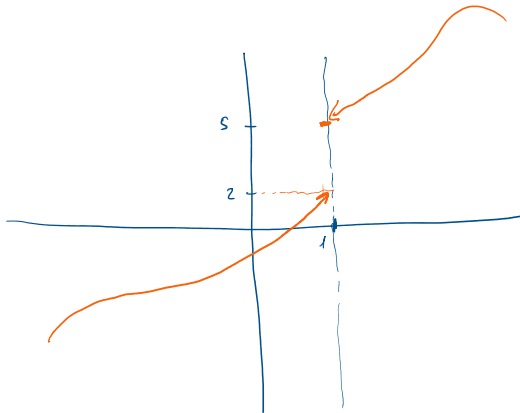
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \\ \neq \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x+2) = 5 \end{cases} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$x+1$ $3x+2$

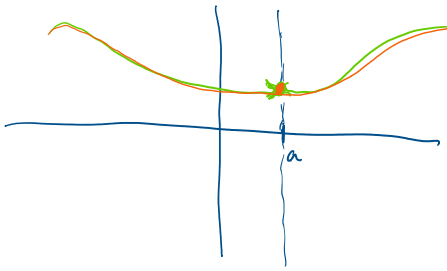
1



Continuidad de una función en un pto

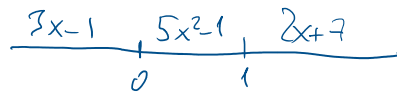
Para que una función $f(x)$ sea continua en $x=a$ tiene que verificar lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$



Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ 5x^2-1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x+7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



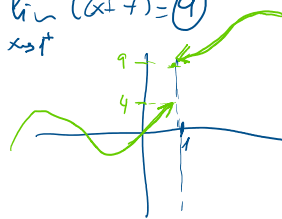
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x-1) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (5x^2-1) = -1 \quad f(0) = -1$$

$f(x)$ es continua en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x^2-1) = 5-1 = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+7) = 9$$

$f(x)$ no es continua en $x=1$



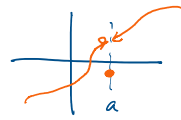
Tipos de discontinuidades

Discontinuidad de salto $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

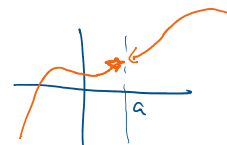
Finito $\rightarrow$ cuando los límites laterales son un n° y son distintos
Infinito $\rightarrow$ cuando un límite lateral da infinito.

Discontinuidad evitable $\rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ pero } \nexists f(a)$$



Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b \Rightarrow a+b=2$$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b \Rightarrow \boxed{a+b=1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (ax+b) = 2a+b \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2 \Rightarrow \boxed{2a+b=2}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2 \end{cases}$$

$$\boxed{a=1}$$

$$1+b=1$$

$$\boxed{b=0}$$