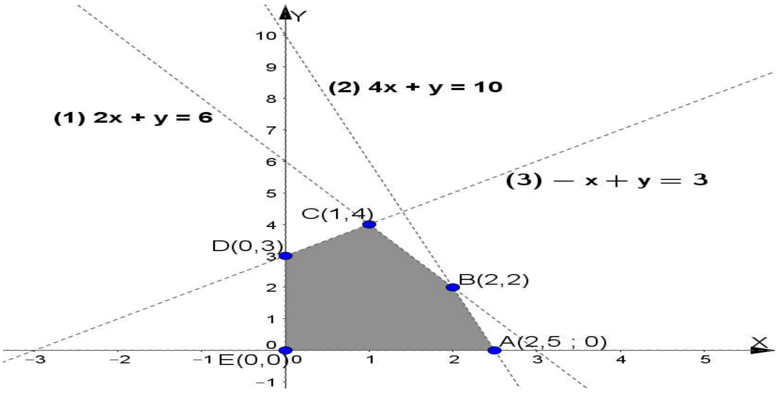
1.- INECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS CON DOS INCÓGNITAS. PROGRAMACIÓN LINEAL

Ejercicio de clase 1:

a) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:
$2x + y \le 6$; $4x + y \le 10$; $-x + y \le 3$; $x \ge 0$; $y \ge 0$ y determine sus vértices.

Solución



b) Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza (Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución

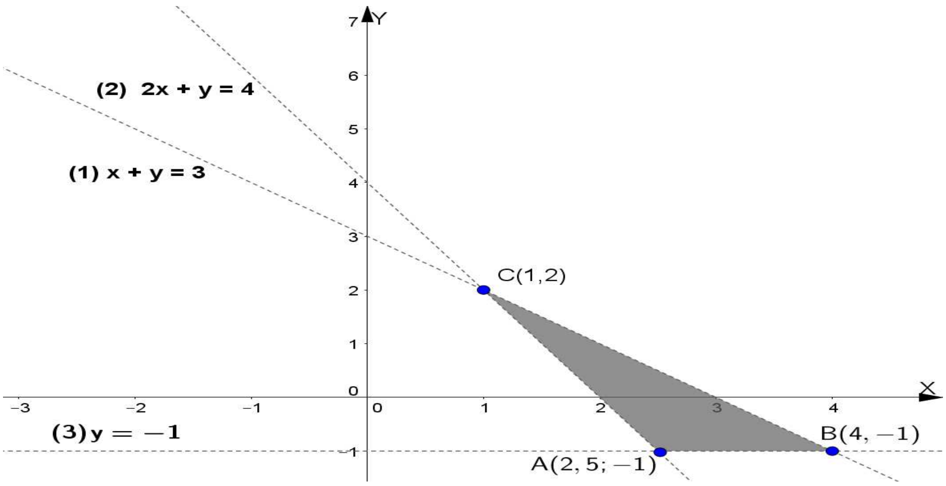
$f(A) = 4 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 0 - 3 = 7$ $\quad f(B) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 = 9$ $\quad f(C) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 3 = 9$ $\quad f(D) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 3 = 3$

$f(E) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$ $\Rightarrow$ El máximo es 9 y se alcanza en B y en C. Por tanto, el máximo se alcanza en el segmento BC

Ejercicio de clase 2 :

a) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x + y \le 3$; $2x + y \ge 4$; $y \ge -1$

Solución



b) Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

Solución

Comprobamos si cumple todas las inecuaciones : $2 + 1 \le 3$ (sí la cumple)

$2 \cdot 2 + 1 \ge 4$ (sí la cumple) $\qquad 1 \ge -1$ (sí la cumple). Luego, (2,1) pertenece al recinto

c) Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x, y) = 5x + 4y$ en ese recinto, indicando en que puntos se alcanzan.

Solución

$A(2{,}5\,;\,-1) \rightarrow f(A) = 5 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot (-1) = 8{,}5$ $\quad B(4\,,-1) \rightarrow f(B) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 16$ $\quad C(1,2) \rightarrow f(C) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$

Luego, el mínimo es 8,5 y se alcanza en $A(2{,}5\,;\,-1)$, $(x = 2{,}5,\ y = -1)$ y el máximo es 16 y se alcanza en $B(4\,,-1)$ $(x = 4,\ y = -1)$

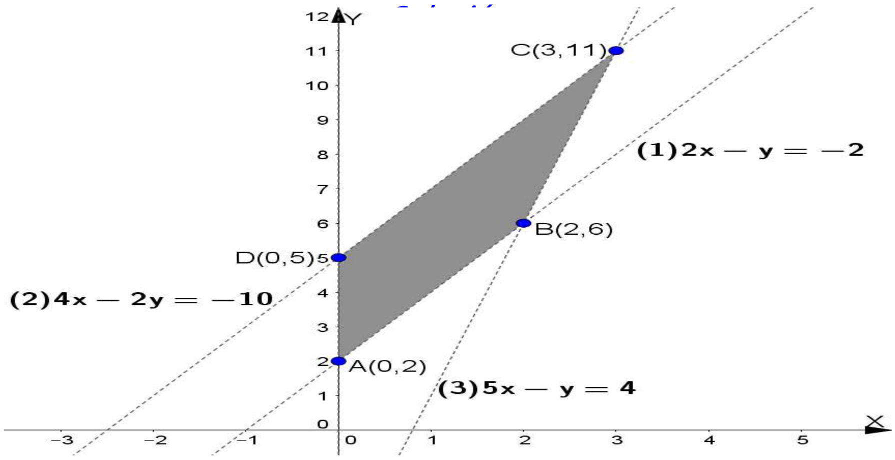
d) Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.
(Propuesto PAU Andalucía 2017)

Solución : Sí, porque 9 está comprendido entre el valor mínimo de F, que es 8,5 y el máximo, que es 16

Ejercicio de clase 3 :

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$2x - y \le -2 \;;\; 4x - 2y \ge -10 \;;\; 5x - y \le 4 \;;\; x \ge 0$$



b) Calcule los valores extremos y mínimo de la función objetivo F(x, y) = 6x − 3y, en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

(Propuesto PAU Andalucía 2016)

Solución

$f(A) = 6\,.\,0 - 3\,.\,2 = -6$ $\quad f(B) = 6\,.\,2 - 3\,.\,6 = -6$ $\quad f(C) = 6\,.\,3 - 3\,.\,11 = -15$ $\quad f(D) = 6\,.\,0 - 3\,.\,5 = -15$

El máximo es − 6 y se alcanza en el segmento AB; el mínimo es − 15 y se alcanza en el segmento CD

Ejercicio de clase 4 :

Sea R la región factible definida por las siguientes inecuaciones $x \ge 3y$, $x \le 5$, $y \ge 1$

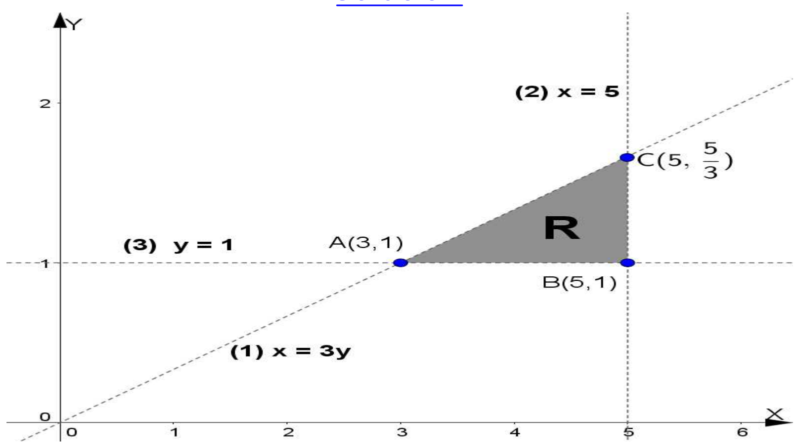
a) Razone si el punto (4.5 , 1.55) pertenece a R.

Solución : Para que pertenezca a R debe cumplir todas las inecuaciones : $4{,}5 \ge 3\,.\,1{,}55$ (no la cumple).

Luego, (4,5 ; 1,55) NO pertenece a R

b) Dada la función objetivo F(x, y) = 2x – 3y calcule sus valores extremos en R.

Solución



$f(A) = 2\,.\,3 - 3\,.\,1 = 3$ $\quad f(B) = 2\,.\,5 - 3\,.\,1 = 7$ $\quad f(C) = 2\,.\,5 - 3\,.\,\dfrac{5}{3} = 5$

Luego, el mínimo es 3 y se alcanza en A(3,1), (x = 3, y = 1) y el máximo es 7 y se alcanza en B(5,1) (x = 5, y = 1)

c) Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3.5. ¿Y 7.5?

(Propuesto PAU Andalucía 2013)

Solución : Para 3,5 sí, porque $\overbrace{3}^{\text{mínimo de F}} < 3{,}5 < \overbrace{7}^{\text{máximo de F}}$

Pero para 7,5 no, pues 7,5 no está comprendido entre 3 y 7

Ejercicio de clase 5 :

En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son A(2, –1) B(–1, 2) C(1, 4) D(5, 0). La función objetivo es la función f(x, y) = 2x + 3y + k cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo. (Propuesto PAU Andalucía 2013)

Solución

$f(A)=2\,.\,2+3\,.\,(-1)+k=\underbrace{1+k}_{\text{valor mínimo}}$ $\quad f(B)=2\,.\,(-1)+3\,.\,2+k=4+k$ $\quad f(C)=2\,.\,1+3\,.\,4+k=\underbrace{14+k}_{\text{valor máximo}}$

$f(D)=2\,.\,5+3\,.\,0+k=10+k$. Luego, el mínimo se alcanza en A y el máximo en C $\Rightarrow$ Como el valor máximo es $14+k=19\Rightarrow \underline{k=5}$.

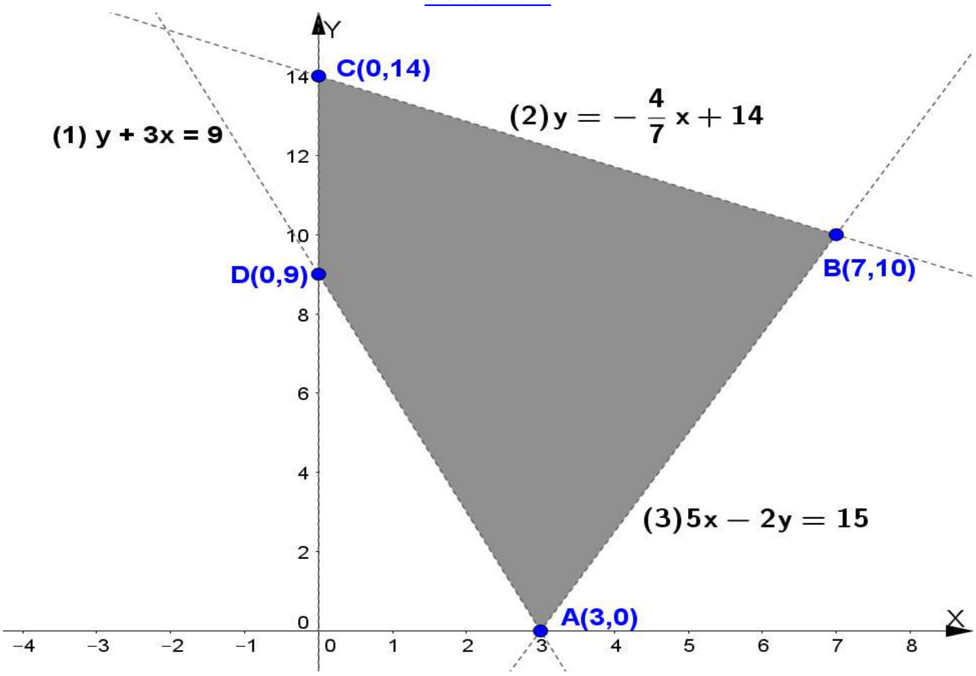
Ejercicio de clase 6 :

Se desea maximizar la función F(x, y)= 14x + 8y en el recinto dado por:

$$y+3x\geq 9 \quad , \quad y\leq -\frac{4}{7}x+14 \quad , \quad 5x-2y\leq 15 \quad , \quad x\geq 0$$

a) Represente la región factible del problema.

Solución



b) ¿Cuál es el valor máximo de F y la solución óptima del problema?

Solución

$F(A)=14\,.\,3+8\,.\,0=42$ $\quad F(B)=14\,.\,7+8\,.\,10=178$ $\quad F(C)=14\,.\,0+8\,.\,14=112$

$F(D)=14\,.\,0+8\,.\,9=72$. El máximo es 178, luego la solución óptima del problema es $x=7,\ y=10$

c) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.

(Propuesto PAU Andalucía 2013)

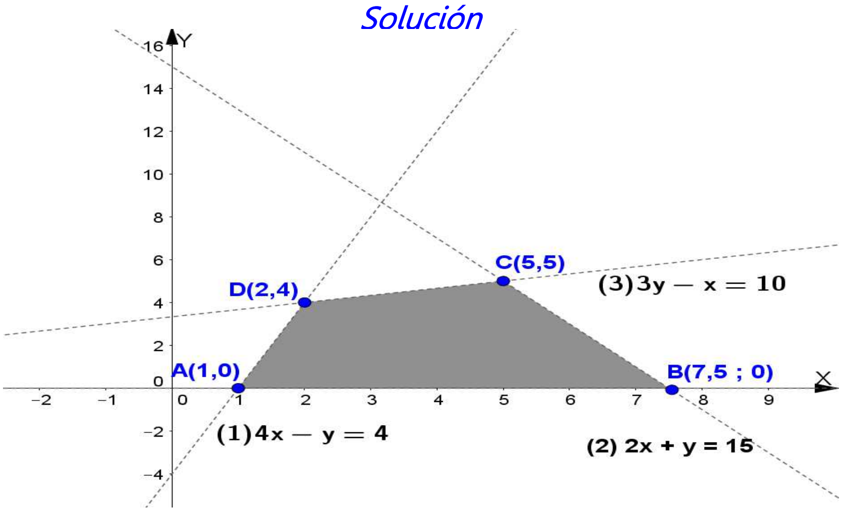
Solución : Por ejemplo, el punto C(0,14)

Ejercicio de clase 7 :

Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos: $4x - y \geq 4$, $2x + y \leq 15$, $3y - x \leq 10$, $y \geq 0$

a) Represente el recinto y calcule sus vértices.

Solución



b) Calcule los puntos del recinto donde la función F(x, y) = 4x – 7y alcanza el máximo y el mínimo.

Solución

$F(A) = 4\,.\,1 - 7\,.\,0 = 4$ $F(B) = 4\,.\,7{,}5 - 7\,.\,0 = 30$ $F(C) = 4\,.\,5 - 7\,.\,5 = -15$ $F(D) = 4\,.\,2 - 7\,.\,4 = -20$

Luego, el mínimo es -20 y se alcanza en D, $(x = 2,\ y = 4)$ y el máximo es 30 y se alcanza en B $(x = 7{,}5\ ,\ y = 0)$

c) ¿Entre qué valores varía la función F(x, y) = 4x – 7y en el recinto?

(Propuesto PAU Andalucía 2010)

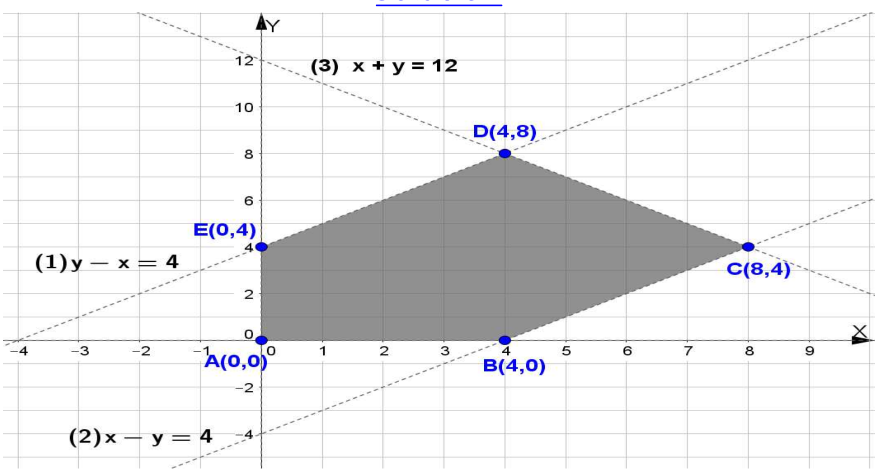
Solución : Variará entre el valor mínimo de F, que es -20 y el máximo, que es 30

Ejercicio de clase 8 :

Se considera el recinto definido por las inecuaciones $y - x \leq 4$, $x - y \leq 4$, $x + y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

a) Represente el recinto y calcule sus vértices.

Solución



b) Dada la función objetivo $F(x, y) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y$, determine los valores máximo y mínimo de F y los puntos del recinto donde se alcanzan. (Propuesto en PAU Andalucía 2006)

Solución

$F(A) = \frac{2}{3}\,.\,0 - \frac{4}{5}\,.\,0 = 0$ $F(B) = \frac{2}{3}\,.\,4 - \frac{4}{5}\,.\,0 = \frac{8}{3} \cong 2{,}7$ $F(C) = \frac{2}{3}\,.\,8 - \frac{4}{5}\,.\,4 = \frac{32}{15} \cong 2{,}1$ $F(D) = \frac{2}{3}\,.\,4 - \frac{4}{5}\,.\,8 = \frac{-56}{15} \cong -3{,}7$

$F(E) = \frac{2}{3}\,.\,0 - \frac{4}{5}\,.\,4 = \frac{-16}{5} = -3{,}2$. Luego, el mínimo es $\frac{-56}{15}$ y se alcanza en D y el máximo es $\frac{8}{3}$ y se alcanza en B

Ejercicio de clase 9 :

Los vértices de un polígono convexo son (1, 1), (3, 1/2), (8/3, 5/2), (7/3, 3) y (0, 5/3). Calcule el máximo de la función objetivo F(x, y) = 3x – 2y + 4 en la región delimitada por dicho polígono.

(Propuesto PAU Andalucía 2004)

Solución

$$F(1,1) = 3\,.\,1 - 2\,.\,1 + 4 = 5 \qquad F\left(3,\frac{1}{2}\right) = 3\,.\,3 - 2\,.\,\frac{1}{2} + 4 = 12 \qquad F\left(\frac{8}{3},\frac{5}{2}\right) = 3\,.\,\frac{8}{3} - 2\,.\,\frac{5}{2} + 4 = 7$$

$$F\left(\frac{7}{3},3\right) = 3\,.\,\frac{7}{3} - 2\,.\,3 + 4 = 5 \qquad F\left(0,\frac{5}{3}\right) = 3\,.\,0 - 2\,.\,\frac{5}{3} + 4 = \frac{2}{3} \cong 0{,}7.$$

Luego, el máximo es 12 y se alcanza para $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$

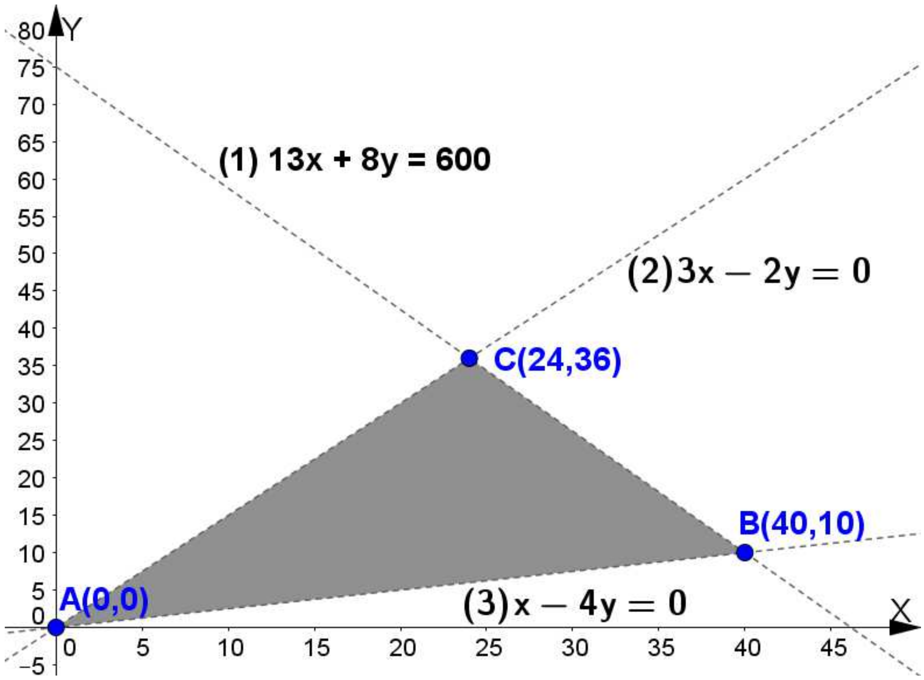
Ejercicio de clase 10 :

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$$13x + 8y \le 600 \quad , \quad 3(x-2) \ge 2(y-3) \quad , \quad x - 4y \le 0$$

a) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

Solución



b) Calcule el valor máximo en dicho recinto de la función F(x, y) = 65x + 40y, indicando dónde se alcanza. (Propuesto PAU Andalucía 2011)

Solución

$$F(A) = 65\,.\,0 + 40\,.\,0 = 0 \qquad F(B) = 65\,.\,40 + 40\,.\,10 = 3000 \qquad F(C) = 65\,.\,24 + 40\,.\,36 = 3000$$

Luego, el máximo es 3000 y se alcanza en el segmento BC

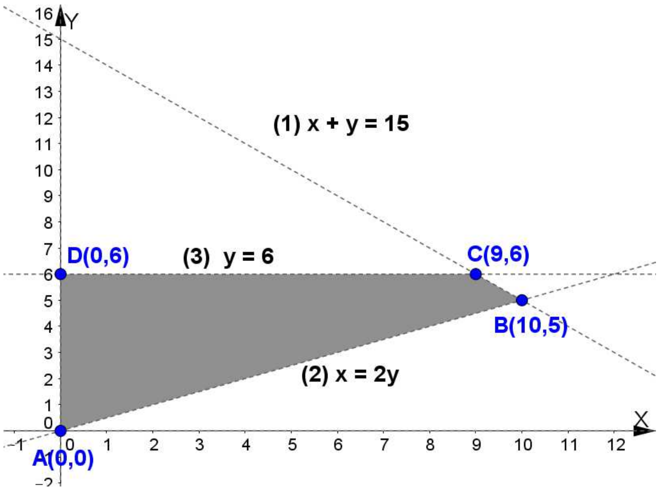
Ejercicio de clase 11:

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes: $x + y \leq 15$, $x \leq 2y$, $0 \leq y \leq 6$, $x \geq 0$

a) Represente gráficamente dicho recinto.

b) Calcule sus vértices.

Solución



c) Determine el máximo valor de la función $F(x, y) = 8x + 5y$ en el recinto anterior y dónde se alcanza. (Propuesto PAU Andalucía 2010)

Solución

$F(A) = 8 \,.\, 0 + 5 \,.\, 0 = 0$ $F(B) = 8 \,.\, 10 + 5 \,.\, 5 = 105$ $F(C) = 8 \,.\, 9 + 5 \,.\, 6 = 102$

$F(D) = 8 \,.\, 0 + 5 \,.\, 6 = 30$. Luego, el máximo es 105 y se alcanza en B ($x = 10$, $y = 5$)

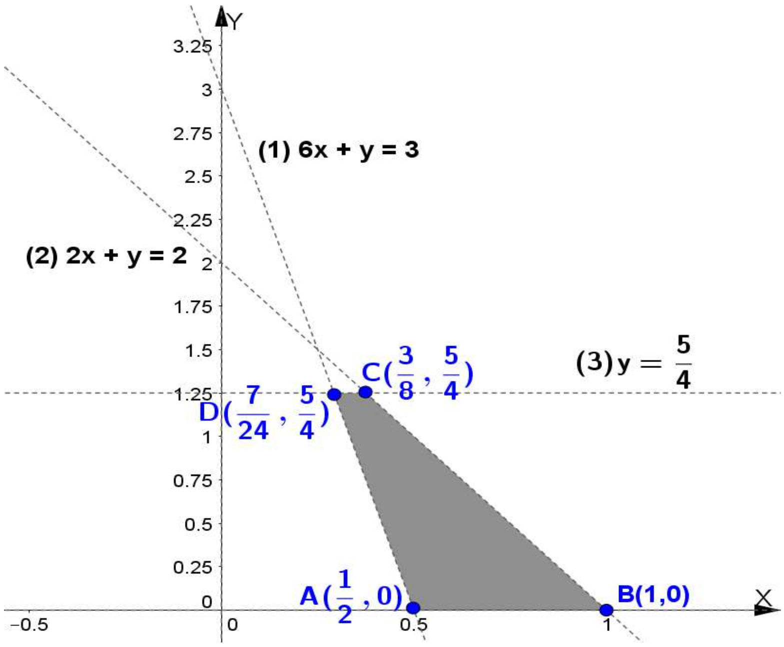
Ejercicio de clase 12:

Obtenga los valores máximo y mínimo, indicando los puntos donde se alcanzan, de la función objetivo $F(x, y) = x - y$ en la región definida por las restricciones

$6x + y \geq 3$; $2x + y \leq 2$; $y \leq 5/4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

(Propuesto PAU Andalucía 2009)

Solución



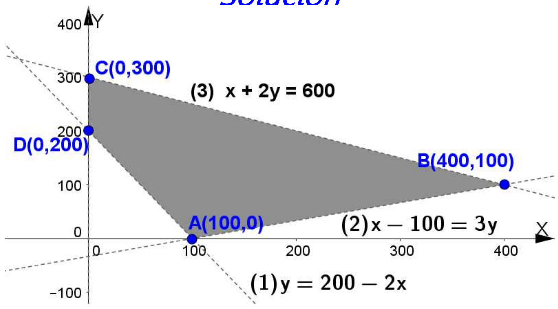
$F(A) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ $F(B) = 1 - 0 = 1$ $F(C) = \frac{3}{8} - \frac{5}{4} = \frac{-7}{8} \cong -0{,}88$ $F(D) = \frac{7}{24} - \frac{5}{4} = \frac{-23}{24} \cong -0{,}96$

Luego, el mínimo es $\frac{-23}{24}$ y se alcanza en D y el máximo es 1 y se alcanza en B

Ejercicio de clase 13 :

Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices: $y \geq 200 - 2x$, $x - 100 \leq 3y$, $x + 2y \leq 600$, $x \geq 0$ (Propuesto PAU Andalucía 2011)

Solución



2.- PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA VIDA REAL

Ejercicio de clase 14 : Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 € ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio? (Propuesto PAU Andalucía 2017)

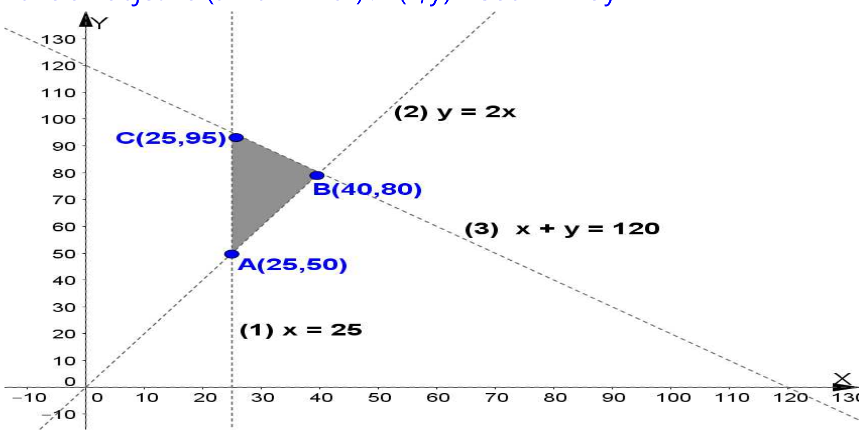
Solución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	número	beneficio (€)
empresas	x	386x
particulares	y	229y
total	x + y	386x + 229y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{debe haber al menos 25 empresas} \to x \geq 25 \\ \text{el nº de particulares debe ser al menos el doble que de empresas} \to y \geq 2x \\ \text{el máximo total es 120 clientes} \to x + y \leq 120 \\ \text{el nº de empresas es no negativo} \to x \geq 0 \\ \text{el nº de particulares es no negativo} \to y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a maximizar)}: F(x,y) = 386x + 229y$$



$F(A) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 50 = 21100$ $F(B) = 386 \cdot 40 + 229 \cdot 80 = 33760$ $F(C) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 95 = 31405$

Luego, el máximo es 33760 y se alcanza en B $(x = 40, y = 80)$.

Solución: 40 empresas y 80 particulares con un beneficio de 33760 €

Ejercicio de clase 15 : Una empresa fabrica dos tipos de productos A y B, y vende todo lo que produce obteniendo un beneficio unitario de 500 € y 600 € respectivamente. Cada producto pasa por dos procesos de fabricación, P1 y P2.
Una unidad del producto A necesita 3 horas en el proceso P1, mientras que una del producto B necesita 5 horas en ese proceso. La mano de obra contratada permite disponer, como máximo, de 150 horas semanales en P1 de 120 horas en P2. Además, son necesarias 3 horas en P2 para fabricar una unidad de cada uno de los productos.

a) Plantee el problema de maximización de la función del beneficio semanal de la empresa, dibuje la región factible y obtenga sus vértices.

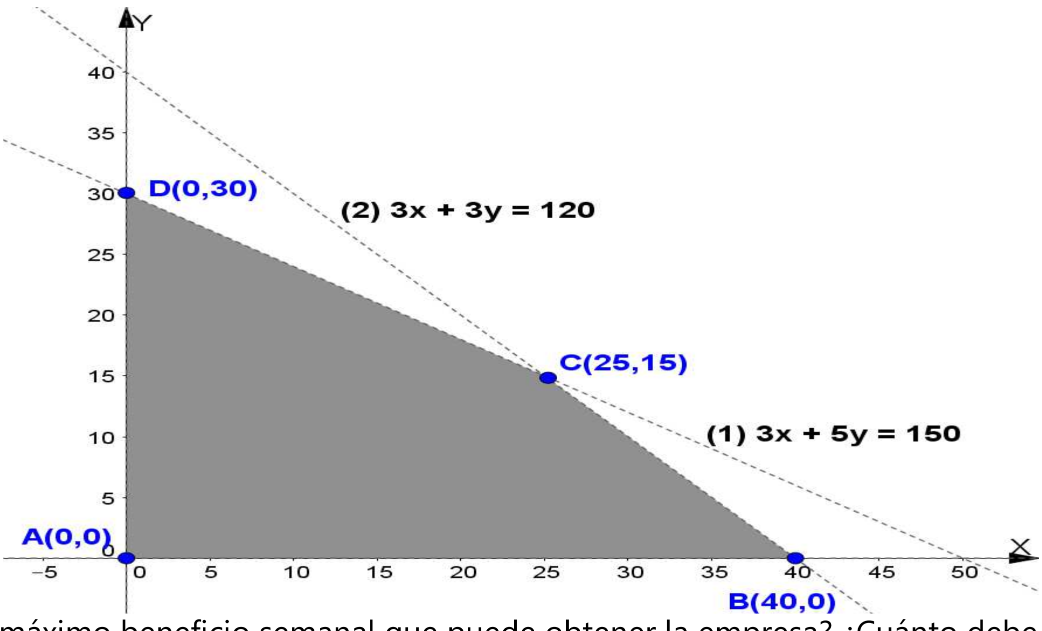
Solución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de unidades	nº de horas en P1	nº de horas en P2	beneficio semanal (€)
producto A	x	3x	3x	500x
producto B	y	5y	3y	600y
total		3x + 5y	3x + 3y	500x + 600y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{se dispone, como máximo, de 150 h en P1} \rightarrow 3x+5y \leq 150 \\ \text{se dispone, como máximo, de 120 h en P2} \rightarrow 3x+3y \leq 120 \\ \text{el nº de unidades es positivo} \rightarrow x>0 \ , \ \ y>0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a maximizar)}: \ F(x,y)=500x+600y$$



b) ¿Cuál es el máximo beneficio semanal que puede obtener la empresa? ¿Cuánto debe fabricar de cada producto para obtener ese beneficio? (Propuesto PAU Andalucía 2016)

Solución

$F(A)=500\,.\,0+600\,.\,0=0$ $\quad F(B)=500\,.\,40+600\,.\,0=20000$ $\quad F(C)=500\,.\,25+600\,.\,15=21500$

$F(D)=500\,.\,0+600\,.\,30=18000$. Luego, el máximo es 21500 y se alcanza en C $(x=25,\ y=15)$.

Solución: Debe fabricar 25 unidades del tipo A y 15 del B con un beneficio de 21500 €

Ejercicio de clase 16 : Una empresa fabrica dos tipos de agua de colonia, A y B.

La colonia A contiene un 5% de extracto de rosas y un 10% de alcohol, mientras que la B se fabrica con un 10% de extracto de rosas y un 15% de alcohol.
El precio de venta de la colonia A es de 24 €/litro y el de la B es de 40 €/litro.
Se dispone de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol.
¿Cuántos litros de cada colonia convendría fabricar para que el importe de la venta de la producción sea máximo? (Propuesto PAU Andalucía 2016)

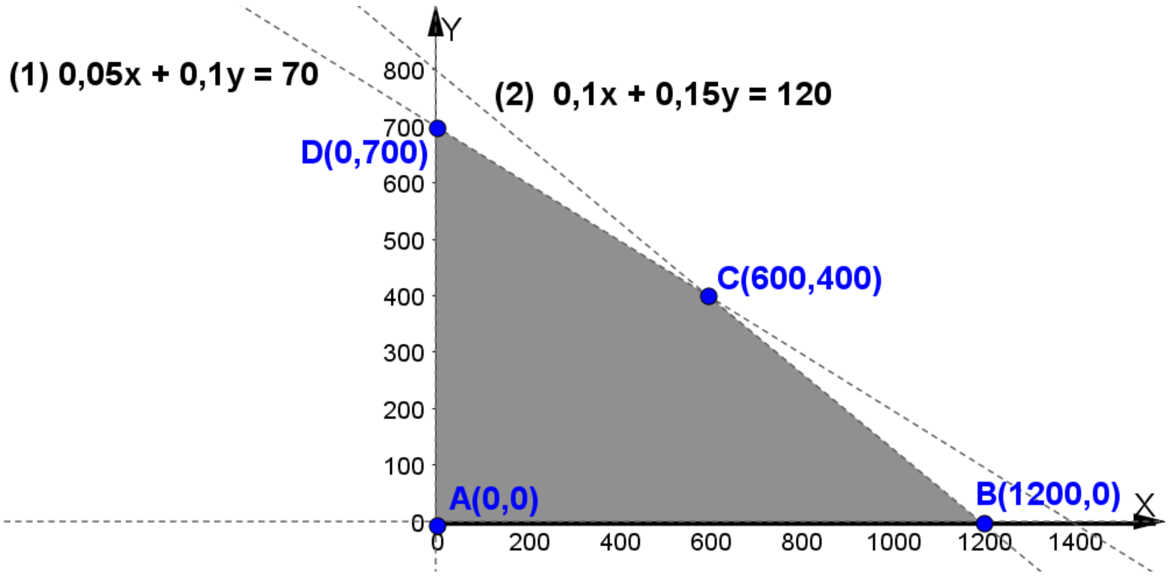
Solución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de litros	nº de litros de extracto de rosas	nº de litros de alcohol	importe venta (€)
colonia A	x	0,05x	0,1x	24x
colonia B	y	0,1y	0,15y	40y
total		0,05x + 0,1y	0,1x + 0,15y	24x + 40y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{se dispone de 70 l de extracto de rosas} \to 0{,}05x + 0{,}1y \le 70 \\ \text{se dispone de 120 l de alcohol} \to 0{,}1x + 0{,}15y \le 120 \\ \text{el nº de litros es no negativo} \to x \ge 0 \;,\; y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a maximizar)}: F(x,y) = 24x + 40y$$



$F(A) = 24 \,.\, 0 + 40 \,.\, 0 = 0 \qquad F(B) = 24 \,.\, 1200 + 40 \,.\, 0 = 28800 \qquad F(C) = 24 \,.\, 600 + 40 \,.\, 400 = 30400$

$F(D) = 24 \,.\, 0 + 40 \,.\, 700 = 28000$. Luego, el máximo es 30400 y se alcanza en C $(x = 600,\ y = 400)$.

Solución: Debe fabricar 600 litros del tipo A y 400 litros del B

Ejercicio de clase 17 : Se desea invertir 100 000 € en dos productos financieros A y B que tienen una rentabilidad del 2% y del 2.5% respectivamente.
Se sabe que el producto B exige una inversión mínima de 10 000 € y, por cuestiones de riesgo, no se desea que la inversión en B supere el triple de lo invertido en A.
¿Cuánto se debe invertir en cada producto para que el beneficio sea máximo y cuál sería dicho beneficio? (Propuesto PAU Andalucía 2015)

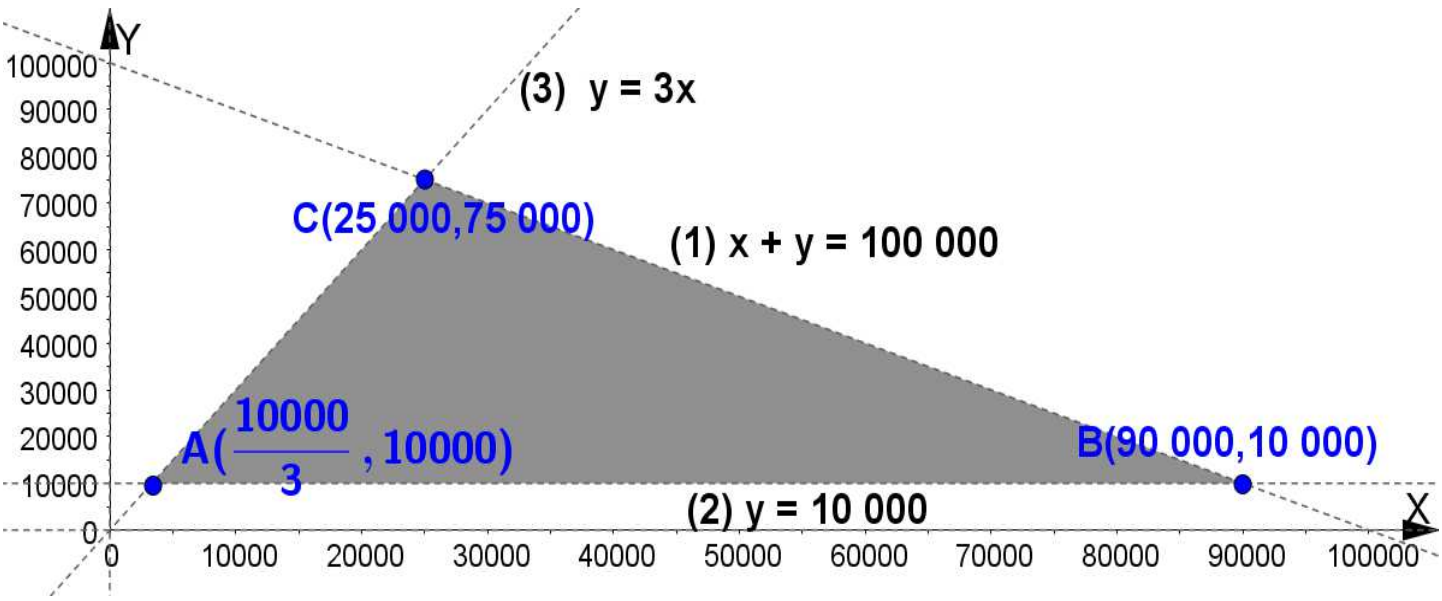
Solución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	cantidad invertida (en €)	beneficio o rentabilidad (en €)
producto A	x	0,02x
producto B	y	0,025y
total	x + y	0,02x + 0,025y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{se invierte, como máximo } 100\,000 \text{ €} \rightarrow x + y \leq 100\,000 \\ \text{en B se invierte como mínimo } 10\,000 \text{ €} \rightarrow y \geq 10\,000 \\ \text{la inversión en B es menor o igual que el triple de la inversión en A} \rightarrow y \leq 3x \\ \text{el dinero invertido es no negativo} \rightarrow x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a maximizar)}: F(x,y) = 0{,}02x + 0{,}025y$$



$F(A) = 0{,}02 \,.\, \dfrac{10\,000}{3} + 0{,}025 \,.\, 10\,000 \cong 316{,}67$ $\quad F(B) = 0{,}02 \,.\, 90\,000 + 0{,}025 \,.\, 10\,000 = 2\,050$

$F(C) = 0{,}02 \,.\, 25\,000 + 0{,}025 \,.\, 75\,000 = 2\,375$. Luego, el máximo es 2 375 y se alcanza en C ($x = 25\,000,\ y = 75\,000$).

Solución: Debe invertir 25 000 € en A y 75 000 € en B obteniendo un beneficio máximo de 2 375 €

Ejercicio de clase 18 : Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?" (Propuesto PAU Andalucía 2014)

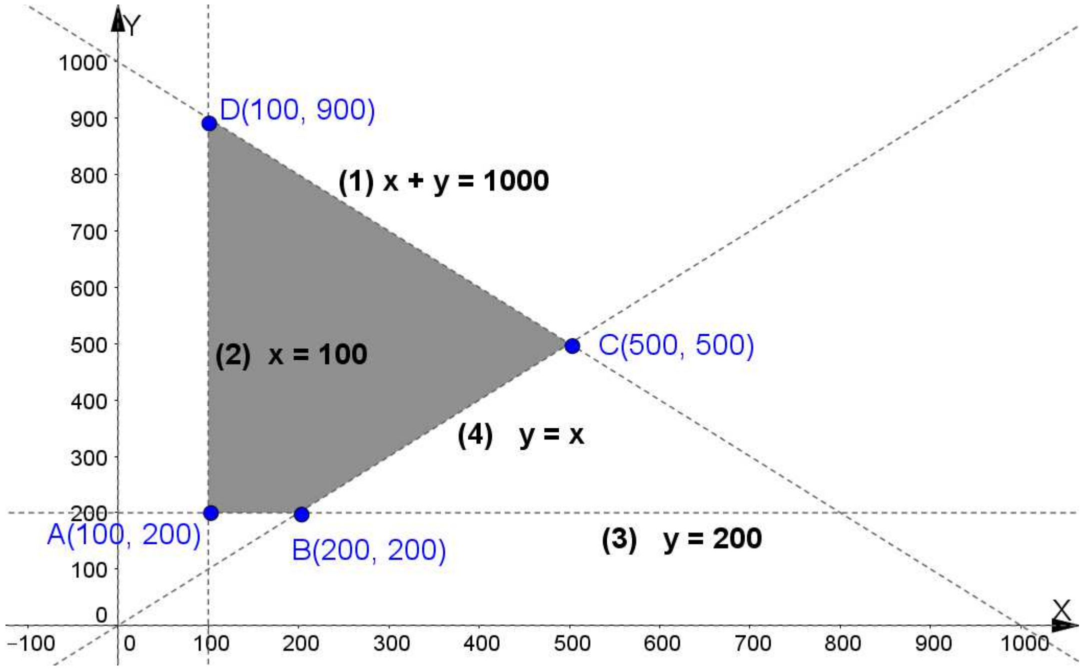
Solución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de envases	coste de almacenaje (en €)
envases pequeños	x	0,1x
envases grandes	y	0,2y
total	x + y	0,1x + 0,2y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{el total de envases es, como máximo, } 1000 \rightarrow x+y \le 1000 \\ \text{debe haber, como mínimo, } 100 \text{ envases pequeños} \rightarrow x \ge 100 \\ \text{debe haber, como mínimo, } 200 \text{ envases grandes} \rightarrow y \ge 200 \\ \text{el nº de envases grandes es mayor o igual al de pequeños} \rightarrow y \ge x \\ \text{el nº de envases es no negativo} \rightarrow x \ge 0 \;,\quad y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a minimizar)}: \; F(x,y) = 0{,}1x + 0{,}2y$$



$F(A) = 0{,}1 \,.\, 100 + 0{,}2 \,.\, 200 = 50$ $F(B) = 0{,}1 \,.\, 200 + 0{,}2 \,.\, 200 = 60$ $F(C) = 0{,}1 \,.\, 500 + 0{,}2 \,.\, 500 = 150$

$F(C) = 0{,}1 \,.\, 100 + 0{,}2 \,.\, 900 = 190$. Luego, el mínimo es 50 y se alcanza en A ($x = 100$, $y = 200$).

Solución: 100 envases pequeños y 200 grandes con un coste de 50 €

Ejercicio de clase 19 : Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos más el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco?"

(Propuesto PAU Andalucía 2013)

Solución

Representamos datos del problema: nº de coches: x nº de motos: y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{el nº de motos es mayor o igual a } \frac{1}{4} \text{ del de coches} \rightarrow y \geq \frac{x}{4} \\ \text{el nº de motos es menor o igual que el doble de coches} \rightarrow y \leq 2x \\ \text{el nº de motos más y doble de coches es menor o igual que } 100 \rightarrow y + 2x \leq 100 \\ \text{el nº de vehículos es no negativo} \rightarrow x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a maximizar)}: F(x,y) = x + y$$

Ejercicio de clase 20 : En una carpintería se construyen dos tipos de estanterías: grandes y pequeñas, y se tienen para ello 60 m^2 de tableros de madera. Las grandes necesitan 4 m^2 de tablero y las pequeñas 3 m^2.

El carpintero debe hacer como mínimo 3 estanterías grandes, y el número de pequeñas que haga debe ser, al menos, el doble del número de las grandes.

Si la ganancia por cada estantería grande es de 60 euros y por cada una de las pequeñas es de 40 euros, ¿cuántas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

(Propuesto PAU Andalucía 2012)

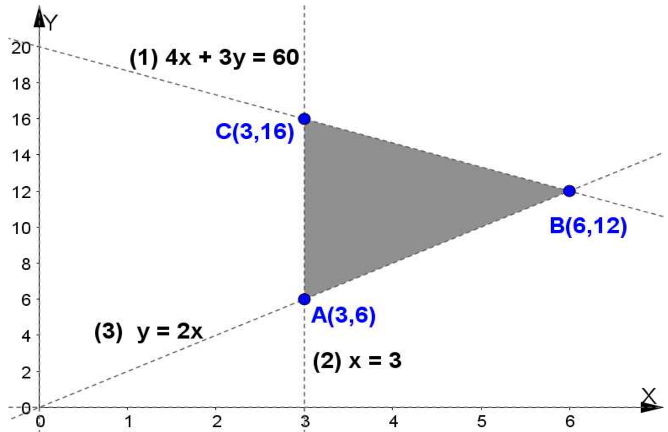
Solución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	número	m2 de madera	ganancia (en €)
estanterías grandes	x	4x	60x
estanterías pequeñas	y	3y	40y
total		4x + 3y	60x + 40y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{hay 60 m}^2 \text{ de madera} \rightarrow 4x + 3y \leq 60 \\ \text{como mínimo, se van a hacer 3 estanterías grandes} \rightarrow x \geq 3 \\ \text{el nº de estanterías pequeñas es mayor o igual que el doble de las grandes} \rightarrow y \geq 2x \\ \text{el nº de estanterías es no negativo} \rightarrow x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a maximizar)}: F(x,y) = 60x + 40y$$



$F(A) = 60 \,.\, 3 + 40 \,.\, 6 = 420$ $F(B) = 60 \,.\, 6 + 40 \,.\, 12 = 840$ $F(C) = 60 \,.\, 3 + 40 \,.\, 16 = 820$

Luego, el máximo es 840 y se alcanza en B $(x = 6,\ y = 12)$.

Solución: 6 estanterías grandes y 12 pequeñas

Ejercicio de clase 21 : Plantee, sin resolver, el siguiente problema de programación lineal:

"Una empresa fabrica camisas de dos tipos, A y B. El beneficio que obtiene es de 8 euros por cada camisa que fabrica del tipo A, y de 6 euros por cada una del tipo B. La empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las del tipo B han de suponer, al menos, el 60% del total. ¿Cuántas camisas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?"

(Propuesto PAU Andalucía 2009)

Solución

Nº de camisas de tipo A: x   Nº de camisas de tipo B: y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{el nº de camisas es, como máximo, } 100\,000 \to x+y \le 100\,000 \\ \text{el nº de camisas de tipo B es mayor o igual que el 60\% del total} \to y \ge 0,6(x+y) \\ \text{el nº de camisas es no negativo} \to x \ge 0 \ , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{función objetivo (a maximizar)}: F(x,y) = 8x + 6y$$

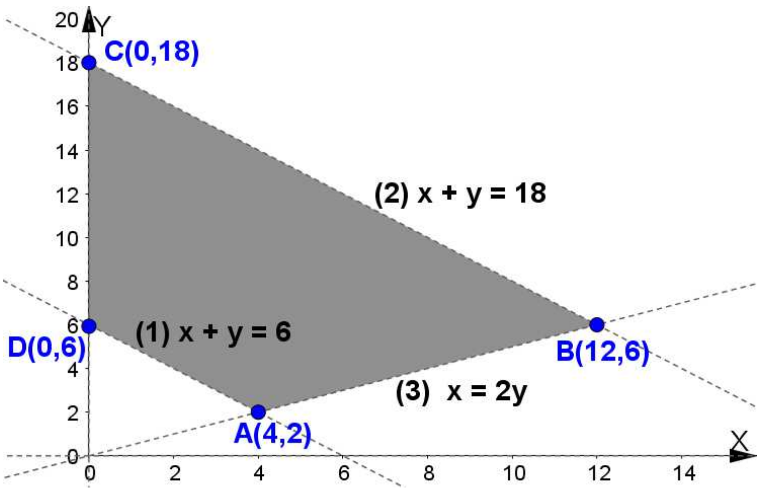
Ejercicio de clase 22 : La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (x) no debe exceder del doble del número de mujeres (y).

a) Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.

Solución

Nº de hombres: x   Nº de mujeres: y

$$\text{restricciones}: \begin{cases} \text{el total de personas está comprendido entre 6 y 18} \to 6 \le x+y \le 18 \to \begin{cases} 6 \le x+y \\ x+y \le 18 \end{cases} \\ \text{el nº de hombres es menor o igual que el doble de mujeres} \to x \le 2y \\ \text{el nº de personas es no negativo} \to x \ge 0 \ , \quad y \ge 0 \end{cases}$$



b) ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

(Propuesto PAU Andalucía 2007)

Solución

función objetivo (a maximizar) : nº de hombres : $F(x,y) = x$

$F(A) = 4 \qquad F(B) = 12 \qquad F(C) = 0 \qquad F(D) = 0$

Luego, el máximo es 12 y se alcanza en B $(x = 12,\ y = 6)$. Solución : 12 hombres

---

Ejercicio de clase 23 : El estadio del Mediterráneo, construido para la celebración de los "Juegos Mediterráneos Almería 2005", tiene una capacidad de 20 000 espectadores.
Para la asistencia a estos juegos se han establecido las siguientes normas:
El número de adultos no debe superar al doble del número de niños; el número de adultos menos el número de niños no será superior a 5 000.
Si el precio de la entrada de niño es de 10 euros y la de adulto 15 euros, ¿cuál es la composición de espectadores que proporciona mayores ingresos? ¿A cuánto ascenderán esos ingresos?

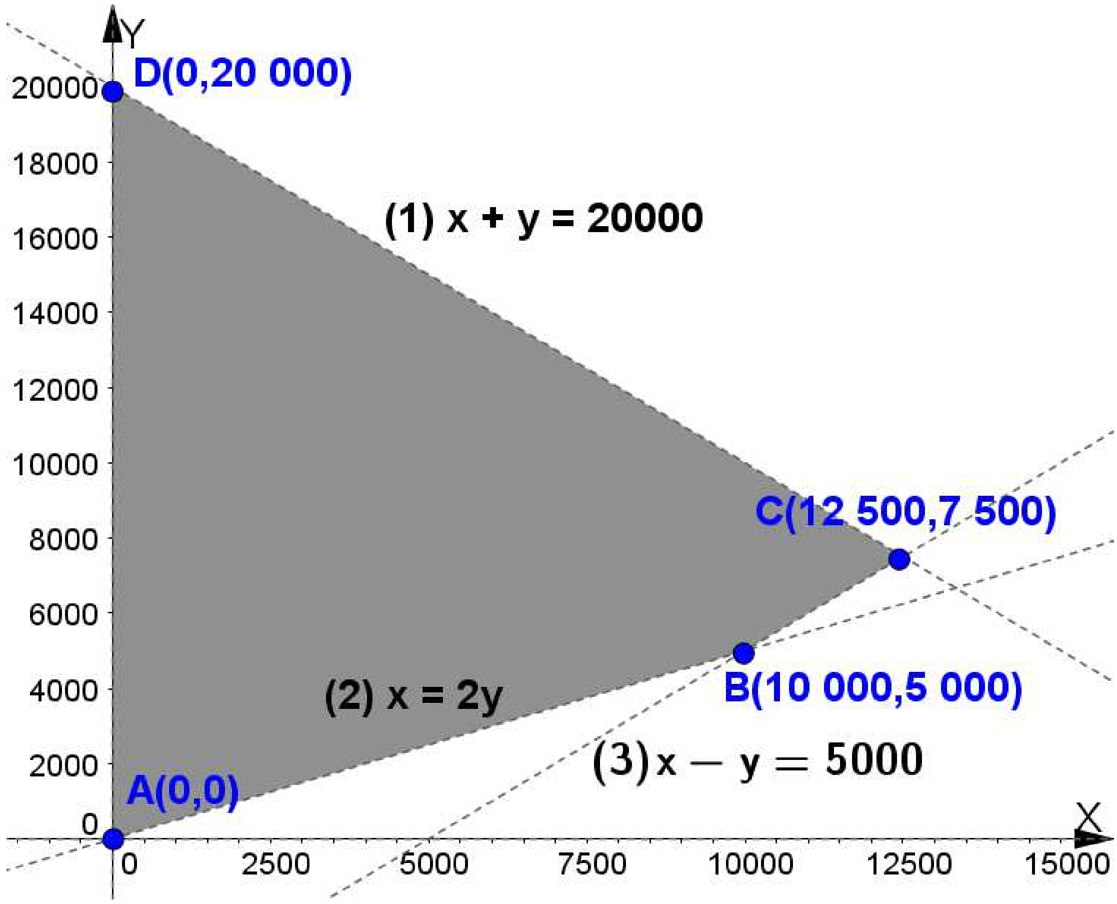
(Propuesto PAU Andalucía 2005)

Solución

Nº de adultos: x Nº de niños: y

$$\text{restricciones}:\begin{cases}\text{la capacidad del estadio es } 20\,000 \rightarrow x+y\le 20\,000\\ \text{el nº de adultos es menor o igual que el doble del de niños} \rightarrow x\le 2y\\ \text{el nº de adultos menos el número de niños es menor o igual a } 5\,000 \rightarrow x-y\le 5\,000\\ \text{el nº de personas es no negativo} \rightarrow x\ge 0\ ,\ \ y\ge 0\end{cases}$$

función objetivo (a maximizar): ingresos: $F(x,y)=15x+10y$



$F(A)=15\,.\,0+10\,.\,0=0$ $F(B)=15\,.\,10000+10\,.\,5000=200000$

$F(C)=15\,.\,12500+10\,.\,7500=262500$ $F(D)=15\,.\,0+10\,.\,20000=200000$

Luego, el máximo es 262500 y se alcanza en C ($x=12500$, $y=7500$).

Solución: 12500 adultos y 7500 niños con unos ingresos de 262500 €