Distribución Binomial

1. Un dado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6, se lanza cinco veces. Halla la probabilidad de que el número 3 salga:

a) Exactamente dos veces. b) Una vez a lo sumo. c) Más de una vez.

Solución:

El número de treses puede medirse a partir de la binomial $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$.

a) $P\left(X=2\right)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=10\cdot\frac{125}{7776}\approx 0{,}16075$.

b) $P\left(X\leq 1\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=$

$=1\cdot\frac{3125}{7776}+5\cdot\frac{625}{7776}=\frac{6250}{7776}\approx 0{,}80375$.

c) $P\left(X>1\right)=1-P\left(X\leq 1\right)=1-\frac{6250}{7776}=1-0{,}80375=0{,}19625$.

2. En un Centro Escolar el 25% de los alumnos son de origen extranjero. Si se eligen 6 estudiantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de 4 o más sean de origen extranjero?

Solución:

El número de alumnos de origen extranjero puede estudiarse como una binomial *B*(6, 0,25).

$P\left(X\geq 4\right)=P\left(X=4\right)+P\left(X=5\right)+P\left(X=6\right)=\binom{6}{4}0{,}25^4\cdot 0{,}75^2+\binom{6}{5}0{,}25^5\cdot 0{,}75+\binom{6}{6}0{,}25^6$

$=15\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75^2+6\cdot 0{,}25^5\cdot 0{,}75+0{,}24^6=0{,}03296+0{,}00439+0{,}00024=0{,}03759$.

3. Se lanza una moneda correcta 10 veces y se mide el número de caras y cruces obtenidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 4 caras?

Solución:

a) Es un experimento binomial: $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)\to\ p=q=\frac{1}{2}$.

Si *X* cuenta el número de caras,

P(4 caras) = $P\left(X=4\right)=\binom{10}{4}\frac{1}{2^{10}}=\frac{210}{2^{10}}=\frac{105}{512}$.

4. En una moneda trucada la probabilidad de obtener cara es 0,4. Si se lanza 5 veces, calcula la probabilidad de obtener al menos 3 caras.

Solución:

Se trata de una distribución de probabilidad binomial: *B*(5, 0,4) → *p* = 0,4; *q* = 0,6.

$P\left(X\geq 3\right)=P\left(X=3\right)+\mathrm{P}\left(X=4\right)+P\left(X=5\right)=\binom{5}{3}0{,}4^3\cdot 0{,}6^2+\binom{5}{4}0{,}4^4\cdot 0{,}6+\binom{5}{5}0{,}4^5=$

$=10\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^2+5\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6+0{,}4^5=0{,}2304+0{,}0768+0{,}01024=0{,}31744$.

5. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:

a) No acierte ninguna respuesta correcta. b) Acierte 6 o más preguntas.

Solución:

Si se contesta al azar, la probabilidad de acertar $p = \frac{1}{3}$; la de fallar, $q = \frac{2}{3}$.

Se trata de una distribución de probabilidad binomial, $B\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$.

a) $P(X=0) = \binom{8}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561} = 0,039$.

b) $P(X \geq 6) = P(X=6) + \mathrm{P}(X=7) + P(X=8) =$

$= \binom{8}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + \binom{8}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 28\cdot\frac{4}{6561} + 8\cdot\frac{2}{6561} + \frac{1}{6561} = \frac{129}{6561} = 0,0197$

6. Una compañía de seguros estima que la probabilidad de que un asegurado de motocicleta tenga algún tipo de accidente es 0,15. De 10 asegurados, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 accidentados?

Solución:

El número de accidentados sigue una variable binomial *B*(10, 0,15).

Se pide calcular $P(X \geq 2)$; pero es más sencillo calcular la probabilidad del suceso contrario:

$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1)$.

Luego:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{10}{0}\cdot 0,15^0\cdot 0,85^{10} - \binom{10}{1}\cdot 0,15^1\cdot 0,85^9 =$$

= 1 – 0,1968744 043 – 0,3474254194 = 0,4557.

7. En un Centro Comercial el 35% de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de todos hayan ido en coche?

Solución:

El número de de los usuarios que utilizan el coche para hacer la compra se puede estudiar como una variable binomial *B*(7, 0,35).

a) $P(X=3) = \binom{7}{3} 0,35^3\cdot 0,65^4 = 35\cdot 0,00765... \approx 0,2679$.

b) $P(X=7) = \binom{7}{7} 0,35^3 \approx 0,00064$.

Aproximación de la binomial mediante una normal

8. Mediante la aproximación normal de la binomial $B(50, 0{,}12)$ calcula:

a) $P(X = 6)$ b) $P(X = 12)$ c) $P(6 < X \le 12)$

Solución:
La binomial $B(50, 0{,}12)$ se puede aproximar por la normal de media y desviación típica:

$\mu = 50 \cdot 0{,}12 = 6$ y $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88} \approx 2{,}3 \to X' = N(6,\ 2{,}3)$.

Con esto:

a) $P(X = 6) = P(5{,}5 < X' < 6{,}5) = P\left(\frac{5{,}5-6}{2{,}3} < Z < \frac{6{,}5-6}{2{,}3}\right) \approx P(-0{,}22 < Z < 0{,}22) =$

$= P(Z < 0{,}22) - P(Z < -0{,}22) = 0{,}5871 - (1 - 0{,}5871) = 0{,}1742$.

b) $P(X = 12) = P(11{,}5 < X' < 12{,}5) = P\left(\frac{11{,}5-6}{2{,}3} < Z < \frac{12{,}5-6}{2{,}3}\right) = P(2{,}39 < Z < 2{,}83) =$

$= P(Z < 2{,}83) - P(Z < 2{,}39) = 0{,}9977 - 0{,}9916 = 0{,}0061.$

c) $P(6 < X \le 12) = P(5{,}5 < X' < 12{,}5) = P\left(\frac{5{,}5-6}{2{,}3} < Z < \frac{12{,}5-6}{2{,}3}\right) = P(-0{,}28 < Z < 2{,}83) =$

$= 0{,}9916 - (1 - 0{,}5871) = 0{,}5787.$

9. El 42 % de los habitantes de un pueblo pasa cada día por la calle mayor. Elegidos 60 habitantes al azar, ¿qué probabilidad hay de que más de 30 de ellos pasen ese día por la calle mayor?

Solución:
La variable X que computa el número de habitantes que pasa por la calle mayor es una variable $B(60, 0{,}42)$, que se aproxima por la normal X': $N(60 \cdot 0{,}42, \sqrt{60 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}58}) = N(25{,}2,\ 3{,}82)$.

Haciendo la corrección de continuidad y tipificando, se tiene:

$P(X > 30) = P(X' > 30{,}5) = P\left(Z > \frac{30{,}5-25{,}2}{3{,}82}\right) = P(Z > 1{,}39) = 1 - P(Z < 1{,}39) =$

$= 1 - 0{,}9177 = 0{,}0823.$

10. (Propuesto en ABAU 2018, Galicia)
En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo.

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.
b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

Solución:
a) El experimento puede estudiarse como una binomial: $B(5,\ 0{,}1)$.

0,1 es la probabilidad de que salga la bola numerada con el 7: $p = 0{,}1 \to q = 0{,}9$.

Si X mide el número de veces que sale la bola 7 en 5 extracciones, se tendrá:

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^4 =$

$= 0{,}9^5 - 5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^4 = 1 - 0{,}59049 - 0{,}32805 = 1 - 0{,}91854 = 0{,}08146.$

b) Si se hacen 100 extracciones, la $B(100, 0{,}1)$ puede estudiarse como una normal de media $\mu = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$: $N(10, 3)$.

Esta normal se tipifica haciendo el cambio: $Z = \frac{X-10}{3}$.

Con esto:

$P(X < 9) = P(X' \le 8{,}5) = P\left(Z < \frac{8{,}5-10}{3}\right) = P(Z < -0{,}5) = 1 - P(Z < 0{,}5) =$

$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085.$

(Se ha realizado la corrección de continuidad).

11. (Propuesto en EvAU 2019, Madrid)
La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:
a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.
Solución:
a) El experimento puede estudiarse como una binomial con n = 10 y p = 0,1: B(10, 0,1).
Sea X la variable aleatoria que mide el número de peces que siguen vivos después de 5 años.
Con esto:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9 =$$

$$= 1 - 0,3486\ldots - 0,3874\ldots \approx 0,264.$$

b) Hay que estudiar la binomial B(200, 0,1).
Puede aproximarse por la normal $N\left(200 \cdot 0,1,\ \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9}\right) \to N(20,\ 4,24)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 20}{4,24}$.

También debe hacerse la corrección de continuidad.
Por tanto:

$$P(X \geq 10) = P(X' > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 20}{4,24}\right) \approx P(Z > -2,48) = P(Z < 2,48) = 0,9934.$$