TEMA 8. Probabilidad

1. Experimentos aleatorios. Espacio muestral.

Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Es una ***experiencia determinista***.

Si lanzamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una ***experiencia aleatoria***.

Un **experimento aleatorio** es aquel que no podemos predecir el resultado, es decir, que depende de la suerte o del azar.
Cuando conocemos el resultado del experimento antes de realizarlo, decimos que se trata de un **experimento determinista**.

El **espacio muestral** de un experimento aleatorio está formado por todos los posibles resultados que podemos obtener al realizar el experimento, se denota ***E***.

Suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral.

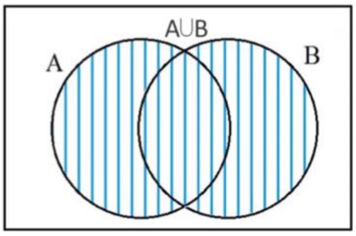
Decimos que **un suceso se ha verificado**, si al realizar el experimento aleatorio correspondiente, el resultado es uno de los que contempla dicho suceso.
Por ejemplo, si al lanzar un dado sale 5, se ha verificado, entre otros, los sucesos {5}, {1,3,5}, {Sacar impar}, {Sacar más de 3}, E. Y no se ha verificado {Sacar par}

Demos nombre a algunos tipos de sucesos:

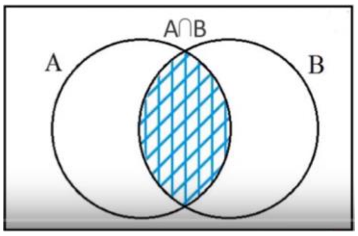
- Un ***suceso elemental*** *es aquel que solo contempla un posible resultado.*
- ***Suceso seguro o total, E****: un suceso que ocurre siempre. El espacio muestral también se designa como suceso seguro.*
- ***Suceso imposible o vacío, Ø :*** *un suceso que no ocurre nunca.*
- ***Un suceso compuesto*** *es el formado por dos o más sucesos elementales.*

2. Sucesos. Operaciones con sucesos.

Llamamos **unión** de dos sucesos A y B, y lo designamos $A \cup B$ (lo leemos como "A unión B") al suceso formado por todos los elementos de A y todos los de B.
El suceso $A \cup B$ ocurre cuando lo hacen A **o** B **o** ambos.



Llamamos **intersección** de dos sucesos A y B, y lo designamos $A \cap B$ (lo leemos como "A intersección B") al suceso formado por los elementos que pertenecen ***simultáneamente*** a A y a B.
El suceso $A \cap B$ ocurre cuando lo hacen **A y B a la vez**.



Dos sucesos A y B son **incompatibles** cuando $A \bigcap B = \varnothing$. Si $A \bigcap B \neq \varnothing$ se dicen **compatibles**.

<u>Ejemplo:</u>

En el experimento aleatorio "*lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos*", dados los sucesos **A = {1, 2, 3, 6}** y **B = {3, 4, 5, 6, 7}** la unión y la intersección son:

$$A \cup B = \{1,2,3,6\} \cup \{3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$A \cap B = \{1,2,3,6\} \cap \{3,4,5,6,7\} = \{3,6\}$$

Los sucesos A y B son compatibles, ya que tienen sucesos elementales en común. $A \cap B \neq \varnothing$.

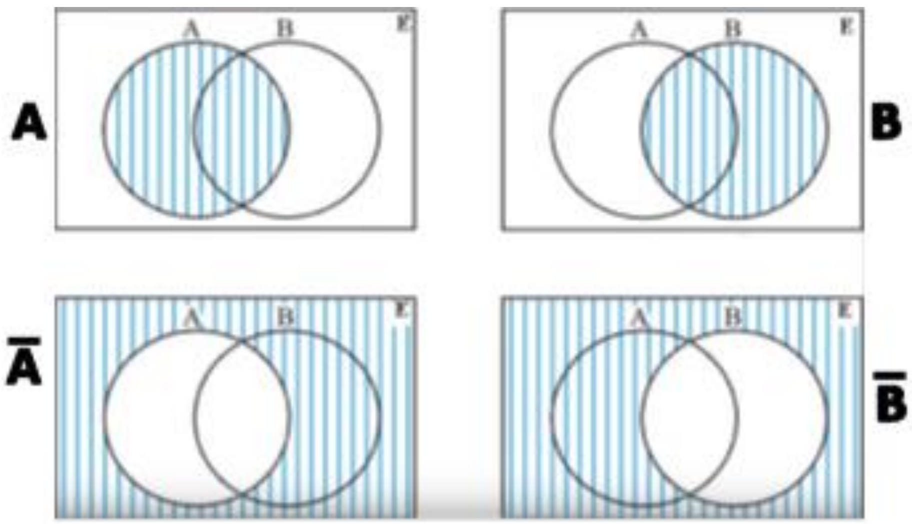
Dados los sucesos **C = "Sacar suma par" = {2, 4, 6, 8, 10, 12}** y **D = "Sacar suma impar" = {3, 5, 7, 9, 11}** la unión y la intersección son:

$$C \cup D = \text{"Sacar suma par o impar"} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$
$$C \cap D = \text{"Sacar suma par e impar"} = \varnothing$$

Los sucesos C y D son incompatibles, pues no tienen sucesos elementales en común. $A \cap B = \varnothing$.

El suceso **contrario o complementario** de un suceso *A* se escribe $\overline{A}$ o A^c. Entre ambos (*A* y A^C) se reparten los elementos del espacio muestral. Es decir, siempre ocurre uno u otro, pero nunca los dos simultáneamente.

El **contrario del contrario** coincide con el suceso de partida: $\overline{\overline{A}} = A$



Ejemplo:

En el experimento aleatorio "*lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos*", dados los sucesos **C = "Sacar suma par" = {2, 4, 6, 8, 10, 12}** y **D = "Sacar suma impar" = {3, 5, 7, 9, 11}** se cumple que $D^C = C$ y $C^C = D$. Es decir, el suceso contrario de "*Sacar suma par*" es " *Sacar suma impar*" y viceversa.

Leyes de Morgan

El **contrario de la unión** es la intersección de los contrarios (1ª ley de Morgan).

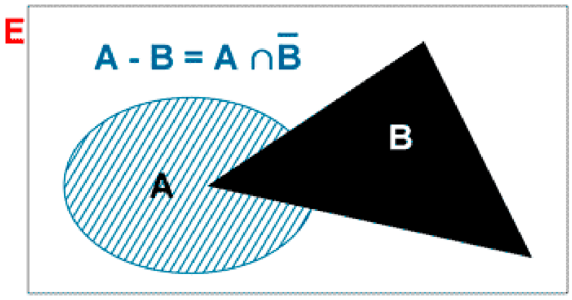
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

El **contrario de la intersección** es la unión de los contrarios (2ª ley de Morgan)..

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

La **diferencia de sucesos**, *A – B*, está formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir, la intersección del suceso A con el contrario del suceso B.

$$A - B = A \cap \overline{B}$$



Ejemplos:

1. Sea E el espacio muestral del experimento consistente en "*lanzar dos dados y sumar las puntuaciones obtenidas en sus caras superiores*".
   Sean los sucesos A = {ser par} y B = {ser mayor que 7}.

3. Definición de Probabilidad. Propiedades.

3.1. Definición de Laplace

Si el espacio muestral de un experimento aleatorio está formado por ***n*** sucesos elementales $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n\}$ y todos ellos tienen la misma probabilidad de que ocurran en la realización del experimento (son **equiprobables**), entonces:

$$\text{Probabilidad de que se verifique un suceso A}=P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al suceso A}}{\text{Número de casos posibles}}$$

3.2. Propiedades

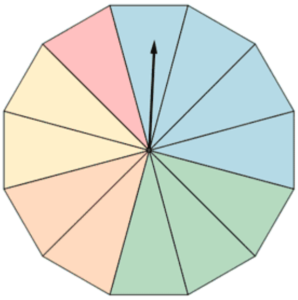
1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(E) = 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

¡¡ IMPORTANTÍSIMO !!

$$0 \le P(A) \le 1$$

Ejemplos:

1. Al girar una ruleta como la de la figura, ¿cuál es la probabilidad de cada color?



1 parte es roja, 4 azules, 3 verdes, 2 naranjas y 2 amarillas.

Al encontrarnos en una situación de equiprobabilidad, aplicamos la Regla de Laplace para poder calcular la probabilidad de cada color, teniendo en cuenta que la ruleta se encuentra dividida en 12 partes. Los sucesos elementales presentan la misma probabilidad.

$$P(A)=\frac{\text{Número de casos favorables al suceso A}}{\text{Número de casos posibles}}$$

$$P(rojo)=\frac{1}{12} \qquad P(azul)=\frac{4}{12} \qquad P(verde)=\frac{3}{12} \qquad P(naranja)=P(amarillo)=\frac{2}{12}$$

2. Si extraemos una bola al azar de una urna que contiene 3 bolas verdes, 5 bolas blancas y 2 bolas azules, calcula la probabilidad de los sucesos:
A = {obtener una bola verde}, B = {obtener una bola blanca} y C = {obtener una bola azul}.

Como en total hay 10 bolas, los casos posibles son 10 y los casos favorables para el suceso A son 3, 5 para B y 2 para C.

Por lo tanto:

$$P(A)=\frac{3}{10} \qquad P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \qquad P(C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

3. Si lanzamos un dado al aire, calcula la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos:
a) Sacar un 3.
b) Sacar un número par.
c) Sacar un número primo.
d) Sacar un número menos que 5.

Definimos en primer lugar el espacio muestral del experimento.

E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Aplicando la regla de Laplace, calculamos ahora las probabilidades de cada uno de los sucesos.

a) $P(A)=\frac{1}{6}$ b) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ c) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ d) $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

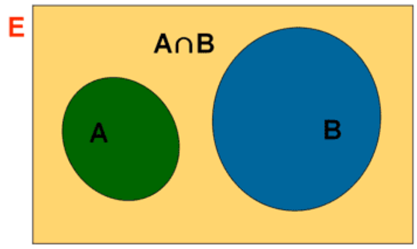
4. Regla de la suma

Sucesos incompatibles

Si dos **sucesos** A y B de un experimento son **incompatibles**, la probabilidad de su unión es igual a la suma de la probabilidad de cada suceso:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos incompatibles



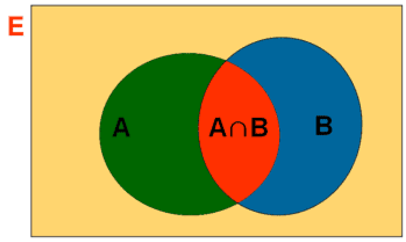
P(A ∪ B) = P(A) + P(B)

Sucesos compatibles

Si dos **sucesos** A y B son **compatibles**, la probabilidad de su unión es igual a la suma de la probabilidad de cada suceso menos la probabilidad del suceso intersección de A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sucesos compatibles



P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

5. Regla del producto. Probabilidad en experimentos compuestos.

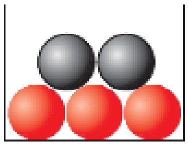
Un **Experimento aleatorio simple** es aquel en el que sólo se realiza una acción.
Por ejemplo: *“sacar una carta”, ”lanzar un dado”, “elegir una bola de una urna”,” apuntar el número de matrícula de un coche que pasa por la calle”, etc..*

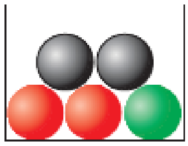
Un **experimento compuesto** está formado por dos o más experimentos aleatorios simples realizados de manera consecutiva.

La probabilidad de un suceso elemental en un experimento compuesto puede obtenerse **multiplicando** las probabilidades indicadas en las **ramas** del diagrama de árbol que llevan a realizarse el suceso.

Ejemplo:

1. **Sacamos una bola de cada urna. Calcula:**





a) La probabilidad de que ambas sean rojas.
b) La probabilidad de que ambas sean negras.

a) P(Roja y roja) = $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

b) P(Negra y negra) = $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

6. Probabilidad condicionada

Sean *A* y *B* dos sucesos tal que *P(A)* ≠ 0, se llama ***probabilidad de B condicionada al suceso A, P(B/A)***, a la probabilidad de que ocurra *B* sabiendo que ha sucedido *A* , es decir, probabilidad de *B* tomando como espacio muestral *A*.

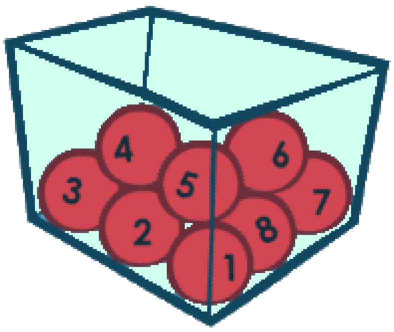
$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

De esta igualdad se deduce:

$$P(B\cap A)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Nos pueden surgir dos tipos de situaciones donde usar la probabilidad condicionada.

- En experimentos simples la probabilidad condicionada reduce el espacio muestral. Por ejemplo:
  - En el experimento "sacar una bola de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8", consideramos los sucesos A = "sacar par" y B = "sacar 4 o más".



a) Calcula la probabilidad de A.
b) Calcula la probabilidad de A, sabiendo que ha pasado B.

Solución:

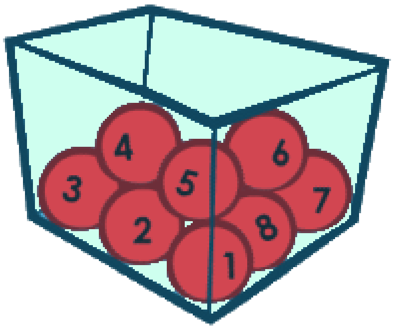
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
A = "sacar par" = {2, 4, 6, 8}   B = "sacar 4 o más" = {4, 5, 6, 7, 8}
Utilizando la regla de Laplace:

$$P(A)=\frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos favorables (2, 4, 6, 8)}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0,5=50\%$$

Como sabemos que ha sucedido B el espacio muestral ya no son los 8 resultados posibles, sino los 5 que contempla el suceso B. También cambia el número de casos favorables.

$$P\left(A/B\right)=\frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos favorables (4, 6, 8)}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos posibles (4, 5, 6, 7, 8)}}=\frac{3}{5}=0,6=60\%$$

- En experimentos compuestos lo que sucede en una extracción puede condicionar la probabilidad de la siguiente extracción.
  Por ejemplo:
  - En el experimento "sacar dos bolas de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8", consideramos los sucesos A = "sacar una 1ª bola par" y B = "sacar una 2ª bola par". Calcular P(A) y P(B/A).



Solución:

Para calcular la probabilidad de A el experimento es sacar una bola de la urna, por lo que aplicamos la regla de Laplace:

$$\text{P(A)} = \frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0,5=50\%$$

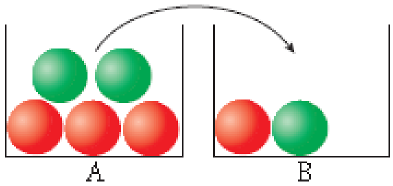
Sin embargo para calcular la probabilidad de B condicionado a que ha sucedido A, debemos de considerar el experimento compuesto "sacar una 1ª bola, dejarla fuera y después sacar una 2ª"

P(B/A) =

$$=\frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos favorables (he sacado una par, solo quedan 3 pares)}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos posibles (solo 7 bolas)}}=\frac{3}{7}=0,428=42,8\%$$

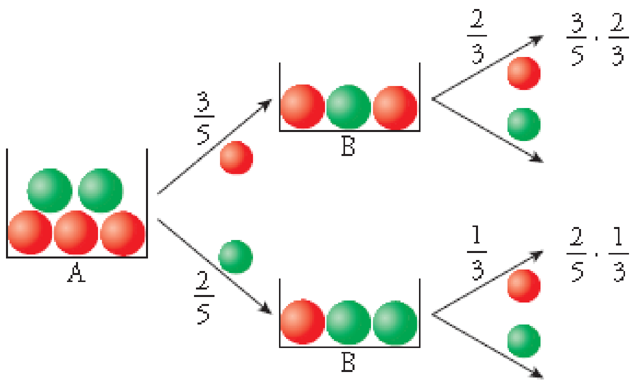
Ejemplos:

1. **Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:**



a) ***P*(1ª roja y 2ª roja)**
b) ***P*[1ª roja y 2ª verde)**

Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama de árbol.



a) *P(*1ª roja y 2ª roja) = *P(*1ª roja) · P(2ª roja / 1ª roja) = $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$

b) P(1ª roja y 2ª verde) = P(1ª roja) · P(2ª verde / 1ª roja) = $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

2. **En una clase de 25 alumnos, 14 son aficionados al fútbol, 9 al baloncesto y 5 a ambos deportes. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:**
   a) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que es aficionado al baloncesto.
   b) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que no es aficionado al baloncesto.
   c) No practique ningún deporte.

Probabilidad de sucesos independientes y dependientes

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son **independientes** entre sí cuando el hecho de que se verifique uno de ellos no influye en la probabilidad de que se verifique el otro.

P(B/A) = P(B) ó P(A/B) = P(A)

Una forma de comprobar si dos sucesos A y B son independientes es:

A y B son independientes $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Sucesos dependientes

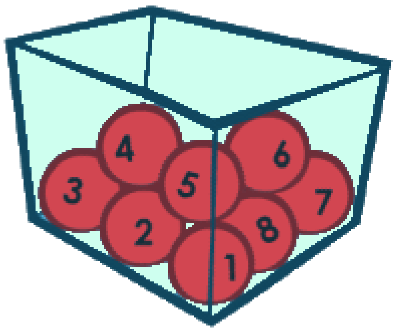
Dos **sucesos** son **dependientes** entre sí cuando el hecho de que se verifique uno de ellos influye en la probabilidad de que se verifique el otro.

Se cumple:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/\mathrm{A}) \qquad tambi\ n \qquad P(A\cap B)=P(B)\cdot P(B/\mathrm{A})$$

Ejemplos:

1. **En el experimento "sacar una bola de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8", consideramos los sucesos A = "sacar par" y B = "sacar 4 o más". ¿Son A y B independientes?**



Por lógica se intuye que no lo son, pues si uno de ellos se da por realizado la probabilidad del otro cambia.
Apliquemos la teoría:

$$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad P(B)=\frac{5}{8}$$

$$P(A\cap B)=P(\text{Sacar par mayor o igual que 4})=\frac{\text{nº casos favorables (4,6,8)}}{\text{nº casos posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)}}=\frac{3}{8}$$

Evidentemente:

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=\dfrac{3}{8}=0,375 \\ P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{16}=0,3125 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

Los sucesos son dependientes

2. **Tenemos una urna con 3 bolas rojas, 2 bolas verdes y 2 bolas azules. Vamos a extraer 2 bolas al azar. Calcula la probabilidad de sacar dos bolas rojas**.

3. **En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15. Se extrae una, se anota su número y se deja encima de la mesa. Se extrae otra y se hace lo mismo.**

   a) Determina el número de elementos del espacio muestral de este experimento.

   b) Calcula la probabilidad de extraer dos bolas con numeración impar.

4. De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halle la probabilidad de que:

a) Ambos acierten. **b) Uno acierte y el otro no.**
c) Ninguno de los dos acierte. **d) Alguno acierte.**

5. Sean A y B dos sucesos de un experimento dado, tales que P (A) = 0,6; P (B) = 0,3 y P (A ∩ B) = 0,2.

Calcula P (A / B) y P (B / A).

7. Teorema de la probabilidad total. Diagrama de árbol.

Llamamos **sistema completo de sucesos** a una familia de sucesos $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ que cumplen:

1. Son incompatibles dos a dos, $\boldsymbol{A_i \cap A_j = \emptyset}$
2. La unión de todos ellos es el suceso seguro: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$

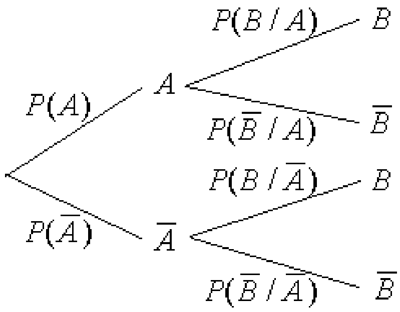
Teorema de la probabilidad total

Sea $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea ***B*** un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $\boldsymbol{P(B/A_i)}$, entonces la probabilidad del suceso ***B*** viene dada por la expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Para facilitar el uso de este teorema, se construyen diagramas de árbol que nos permiten ver más claros los distintos resultados posibles de un experimento compuesto.

Cada rama nueva del diagrama es la realización de un nuevo experimento simple que lleva a completar el experimento compuesto.



En los diagramas de árbol, la probabilidad de que ocurra el segundo suceso, puede depender de cómo haya sido el primero. Cuando utilicemos este método, no es necesario, que utilicemos la nomenclatura matemática, pero no olvidéis que es el caso más sencillo y común de probabilidad condicionada.

Es muy fácil, aunque no lo parezca, fijaos en los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

1. **Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:**
   a) Los cuatro huevos en un buen estado.
   b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

   Llamemos H = {Extraer huevo en buen estado}, así H_1, H_2, H_3 y H_4 será sacarlo en primer lugar, segundo, tercero o cuarto.

   a) $$P(Sacar\ cuatro\ huevos\ buenos) = P(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) =$$
   $$= P(H_1) \cdot P(H_2 / H_1) \cdot P(H_3 / H_1 \cap H_2) \cdot P(H_4 / H_1 \cap H_2 \cap H_3) =$$
   $$= \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{5040}{11880} = \frac{14}{33}$$

   b) El huevo roto lo podemos sacar en cualquiera de las 4 extracciones, así:

$$P(\text{Sacar tres huevos buenos y uno malo}) =$$
$$= P(\overline{H_1} \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) + P(H_1 \cap \overline{H_2} \cap H_3 \cap H_4) +$$
$$+ P(H_1 \cap H_2 \cap \overline{H_3} \cap H_4) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \overline{H_4}) =$$
$$= \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} =$$
$$= 4 \cdot \frac{1440}{11880} = \frac{5760}{11880} = \frac{16}{33}$$

2. **Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2 rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.**
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?

3. **Una multinacional elabora sus piezas en 3 factorías. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada factoría viene dado en la siguiente tabla:**

	F_1	F_2	F_3
Producción	40%	35%	25%
Defectuosas	2%	3%	1%

Halla la probabilidad de que una pieza escogida al azar sea defectuosa.

4. **Tenemos tres urnas distintas: U_1 con 5 bolas rojas y 3 azules, U_2 con 3 bolas rojas y 2 azules y U_3 con 2 bolas rojas y 4 azules. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?**

5. **Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.**

6. **Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F_1, F_2, F_3 y F_4. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?**

8. Tablas de contingencia.

En los problemas de probabilidad y en especial en los de probabilidad condicionada, a veces resulta interesante y práctico organizar la información en una tabla de contingencia.

Siempre que utilicemos este método, tenemos que asignarle un significado a los sucesos A y B, así como sus contrarios e indicar las probabilidades del suceso correspondiente a cada celda.

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Ejemplo:

1. **En 4º de secundaria hay 22 chicos y 18 chicas. Llevan gafas 8 chicos y 6 chicas. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que sea chico y no lleve gafas.**

   En primer lugar recogemos los datos de un problema en una tabla de doble entrada.

	Chico	**Chica**	Total
Con gafas	8	6	
Sin gafas			
Total	22	18	

En segundo lugar completamos la tabla.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	8	6	***14***
Sin gafas	***14***	***12***	***26***
Total	22	18	***40***

En último lugar, se extraen los datos necesarios de la tabla para calcular la probabilidad pedida.

$$P(\text{Chico sin gafas}) = \frac{\text{Numero de chicos sin gafas}}{\text{Número total de alumnos}} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

2. **Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas.**
    a) **¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?**
    b) **Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?**

3. **(EBAU 2012 Andalucía).** En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por internet, mientras que 24 mujeres no emplean esa vía.
Elegido un congresista al azar, calcule la probabilidad de que:
    a) No contrate sus viajes por internet.
    b) Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.
    c) Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

9. Teorema de Bayes

En el año 1763, dos años después de la muerte de *Thomas Bayes* (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados (*Probabilidades a posteriori*). El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de **teorema de Bayes**.

Si tenemos n sucesos, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, tales que:

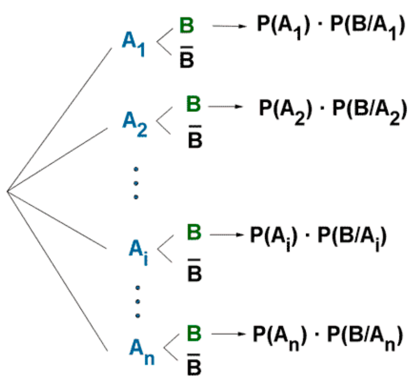
- Son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$
- Su unión es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$

Sea un suceso B cualquiera asociado al experimento aleatorio del que se conocen las probabilidades condicionales *P(B/A*$_i$*)*, se cumple :

$$P\left(A_i / B\right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \ldots. + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$

Las probabilidades ***P (A$_i$)*** : **probabilidades a priori**.
Las probabilidades ***P (A$_i$/B)*** : **probabilidades a posteriori**.

TEOREMA DE BAYES



$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \ldots + P(A_1) \cdot P(B/A_n)}$$

Ejemplos:

1. Una multinacional elabora sus piezas en 3 factorías. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada factoría viene expresado en la siguiente tabla:

	F_1	F_2	F_3
Producción	40%	35%	25%
Defectuosas	2%	3%	1%

Se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la factoría 3?

Consideramos los sucesos:

F_1 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 1}
F_2 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 2}
F_3 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 3}
D = {Elegir pieza defectuosa}

$$P\left(Elegir\ pieza\ defectuosa\right)=P(F_1)\cdot P(D/F_1)+P(F_2)\cdot P(D/F_2)+P(F_3)\cdot P(D/F_3)=$$

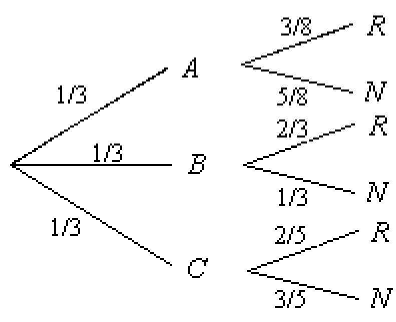
$$=\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{1}{100}=0,01875$$

$$P\left(F_3/D\right)=\frac{P\left(F_3\cap D\right)}{P\left(D\right)}=\frac{P\left(F_3\right)\cdot P\left(D/F_3\right)}{0,01875}=\frac{0,0025}{0,01875}=0,119$$

La probabilidad de que al encontrar una pieza defectuosa esta provenga de la factoría 3 es del 11,9 %.

2. Tenemos tres urnas: *A* con 3 bolas rojas y 5 negras, *B* con 2 bolas rojas y 1 negra y *C* con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

Llamamos *R*= "sacar bola roja" y *N*= "sacar bola negra". En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos *R* o *N* para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es *P(A/R)*. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A/\ \ )=\frac{P(A\cap\ \ )}{P(\ \ )}=\frac{P(A)\cdot P(\ \ /A)}{P(A)\cdot P(\ \ /A)+P(B)\cdot P(\ \ /B)+P(C)\cdot P(\ \ /C)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{45}{173}=0,26=26\,\%$$

Ejercicios:

1. El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y no economistas solamente el 20% ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?
   Sol: 15/37

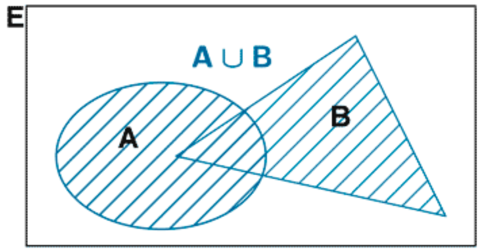
2. Supongamos que el 5% de la población padece la enfermedad de apendicitis (2% en estado agudo A y 3% en estado crónico C) y el 95% no la padece. Uno de los síntomas es dolor de estómago. Las probabilidades de tener dolor de estómago padeciendo el estado A, el estado C o no teniendo la enfermedad son del 90%, el 70% y el 10% respectivamente. Hallar la probabilidad de que una persona con dolor de estómago sufra realmente el estado A de apendicitis.
   Sol: 9/67

3. Una fábrica elabora rotuladores azules y rojos en la misma proporción. Por defectos en el proceso de fabricación, algunos rotuladores salen con la tinta de otro color. Sabemos que el porcentaje de rotuladores azules que llevan tinta azul es 82% y que el porcentaje de rotuladores rojos que llevan tinta roja es 92%.
   a. Calcular la probabilidad de que un rotulador tomado al azar tenga la tinta del color que le corresponde.
   b. Si sabemos que un rotulador tomado al azar es defectuoso, calcular la probabilidad de que escriba en color rojo.
   Sol: 0,87; 0,69

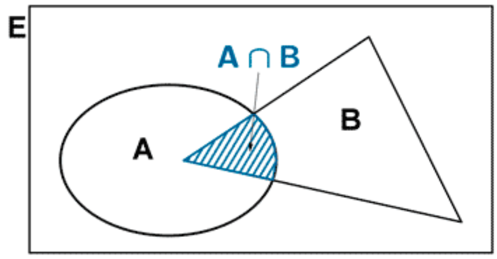
10. Formulario de probabilidad

Operaciones con sucesos

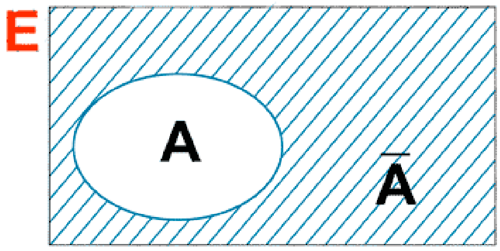
Unión



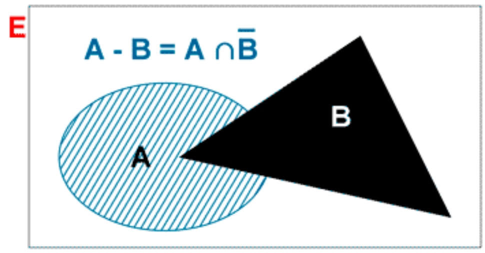
Intersección



Contrario



Diferencia de sucesos



Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Regla de Laplace:

Para calcular probabilidades en experimentos con sucesos elementales **equiprobables:**

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables a A}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Probabilidad:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(E) = 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- si A y B son dos sucesos, se cumple:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- si A y B son dos sucesos, se cumple:

  $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad condicionada

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P(A)};\quad P(A)\neq 0$$

Sucesos dependientes e independientes

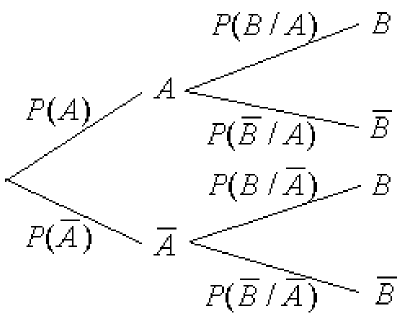
A y B son ***independientes*** cuando el que suceda uno de ellos no influye en que suceda el otro.
A y B son independientes si $P\left(A\cap B\right)=P(A)\cdot P\left(B\right)$

A y **B** son ***incompatibles*** cuando no tienen nada en común ($A\cap B=\varnothing$). No pueden suceder de forma simultánea.

Método 1 para resolver ejercicios de probabilidad. Tablas de contingencia.

	A	$\overline{A}$	
B	$P\left(A\cap B\right)$	$P\left(\overline{A}\cap B\right)$	$P\left(B\right)$
$\overline{B}$	$P\left(A\cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{B}\right)$
	$P\left(A\right)$	$P\left(\overline{A}\right)$	1

Método 2 para resolver ejercicios de probabilidad. Diagrama de árbol



Sistema completo de sucesos

Es una familia de sucesos A_1, A_2, ... , A_n de sucesos que cumplen:

- Son incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \varnothing$
- La unión de todos ellos es el suceso seguro: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = E$

Teorema de la probabilidad total

En un sistema completo de sucesos se cumple que:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+....+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

Teorema de Bayes (probabilidad a posteriori)

En un sistema completo de sucesos se cumple que:

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P\left(A_i\cap B\right)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+....+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$