Cálculo de determinantes por Sarrus

1. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

a) $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 33 & 55 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

*(Soluc: **a)** 30; **b)** -66; **c)** 0; **d)** 0; **e)** 0; **f)** 0; **g)** 2; **h)** -50; **i)** 0; **j)** 0; **k)** 0; **l)** 0)*

2. Calcular los siguientes determinantes de orden 3 aplicando la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$

*(Soluc: **a)** -15; **b)** -36; **c)** -11; **d)** 0; **e)** -168; **f)** 385; **g)** -114; **h)** 3; **i)** 14; **j)** 1000 ; **k)** -10; **l)** $2a^2b^4c^2$)*

3. Hallar el valor del determinante de: **a)** La matriz nula de orden 3 **b)** La identidad de orden 3 **c)** Cualquier matriz diagonal de orden 3 *(Soluc: **a)** 0; **b)** 1; **c)** el producto de los elementos de la diagonal)*

4. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

*(Soluc: **a)** x=±1;*

5. ***(S)*** Resolver la ecuación det(A−x$\mathbb{1}$)=0, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

, $\mathbb{1}$ la matriz unidad de dimensión 3 y $x \in \Re$ la incógnita. *(Soluc: x=0, x=1, x=4)*

Matriz inversa:

6. Hallar las matrices inversas de las siguientes matrices, y **comprobar** el resultado:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 12 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **j)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **k)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

(Sol: ***a)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$; ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***c)*** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; ***d)*** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; ***e)*** $\nexists$; ***f)*** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***g)*** $\nexists$;

h) $\begin{pmatrix} 1/2 & -2 & -1/2 \\ -7/8 & 17/4 & 11/8 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$; ***i)*** *no se puede*; ***j)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$; ***k)*** $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 11/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$; ***l)*** $\begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -2 \\ 7 & 7/2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$*)*

7. Hallar para qué valores del parámetro $a \in \Re$ tiene inversa la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar, si es posible, la inversa para $a = -2$, y comprobar. *(Sol: para $a \neq 5$ hay inversa;* $\begin{pmatrix} -20/343 & 5/49 & 34/343 \\ 29/343 & 5/49 & -15/343 \\ 4/49 & -1/7 & 3/49 \end{pmatrix}$*)*

8. Averiguar para qué valores del parámetro **t**, la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A para t=2, si es posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

(Sol: para t=1 o t=3 no tiene inversa; $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$*)*

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro **m** existe A^{-1} *(Soluc: $\exists A^{-1} \forall m$)*

10. Comprobar que existe la inversa de la siguiente matriz cualquiera que sea el valor de **a** y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$$

Ecuaciones matriciales:

11. ***(S)*** Hallar la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

12. ***(S)*** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; hallar una matriz X tal que A·X+B=A

13. ***(S)*** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

14. ***(S)*** Resolver la ecuación matricial X·A=B+C, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Resolver la ecuación matricial AX+B=C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Resolver la ecuación matricial AB=XC siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{3x2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

17. Resolver la ecuación matricial A·X·A=B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz inversa de A−I, siendo I la matriz unidad de orden 3

b) Resolver la ecuación matricial XA−2B=X

19. Resolver la ecuación matricial CX+AB=C siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&3&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

20. Resolver la ecuación matricial AX−BCX=A siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

21. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial ABX−CX=2C

22. Resolver la ecuación matricial $A^2X-B=A^2$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(Ayuda: calcular primero A^2 y renombrarla como C)

23. ***(S)*** Resolver la ecuación $\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29&40\\34&47\end{pmatrix}$