

# RANGO DE UNA MATRIZ

## Ejercicios

1. Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$
3. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$ , discute el rango de A según los valores de k.
4. Sea  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ . Estudia el rango de M según los valores de m.
5. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ , calcula el rango de A dependiendo de los valores de  $\alpha$ .
6. Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$ . Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.
7. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$ , determina, si existen, los valores de k para que  $\text{rango}(A) = 1$ .
8. Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , calcula el rango de  $A \cdot B^t + \lambda I$  según los valores de  $\lambda$  ( $B^t$  es la matriz traspuesta de B, I es la matriz identidad de orden 3).
9. Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ . Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

## SOLUCIONES

1. Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

Por lo tanto,  $\text{rg}(A) = 3$

2. Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

**Solución:**

Como A es una matriz cuadrada, de orden 3, tendrá rango a lo sumo 3. Como es una matriz cuadrada conviene empezar calculando el determinante de A.

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante es nulo, buscamos si hay algún menor de orden 2 no nulo. Vemos que

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

es un menor de orden 2 no nulo. Por tanto  $\text{rg}(A) = 2$ .

3. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$ , discute el rango de A según los valores de k.

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^3 + 3k^2 + k = 0 \Rightarrow k = 0; k = -1; k = -\frac{1}{2}$$

Calculamos el rango de la matriz para cada caso.

$$\text{Para } k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } k = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } k = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

4. Sea  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ . Estudia el rango de M según los valores de m.

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz M:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \Rightarrow m = 0; m = -1$$

De donde tenemos que:

	Rango(M)
$m = 0$	2
$m = -1$	2
$m \neq 0$ y $-1$	3

5. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ , calcula el rango de A dependiendo de los valores de  $\alpha$ .

**Solución:**

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1; \alpha = -2$$

Calculamos el rango de  $A$  para los distintos valores:

	$R(A)$
$\alpha = 1$	1
$\alpha = -2$	2
$\alpha \neq 1 \text{ y } -2$	3

6. Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$ . Halla el valor, o valores, de  $m$  para los que la matriz  $A$  tiene rango 2.

**Solución:**

Calculamos el determinante de  $A$  y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = -m^3 + 2m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0; m = 1$$

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y como el } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Si } m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y como el } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

7. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$ , determina, si existen, los valores de  $k$  para que  $\text{rango}(A) = 1$ .

**Solución:**

Calculamos el determinante de  $A$  y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 ; k = -1$$

Luego, el rango de  $A$  es 1 si  $k = 1$  ó  $k = -1$

8. Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , calcula el rango de  $A \cdot B^t + \lambda I$  según los valores de  $\lambda$  ( $B^t$  es la matriz traspuesta de  $B$ ,  $I$  es la matriz identidad de orden 3).

**Solución:**

Calculamos la matriz  $A \cdot B^t + \lambda I$

$$A \cdot B^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 1) + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A \cdot B^t + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Si  $\lambda \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$ .

Si  $\lambda = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1$ .

9. Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ . Encuentra el valor, o los valores, de  $m$  para los que  $A$  y  $B$  tienen el mismo rango.

**Solución:**

Calculamos el determinante de cada matriz y lo igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

	R(A)
$m = -4$	1
$m \neq -4$	2

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -4$$

	R(B)
$m = 0$	2
$m = -4$	2
$m \neq 0 \text{ y } -4$	3

Luego, para  $m = 0$  el rango de A es igual al rango de B y vale 2.