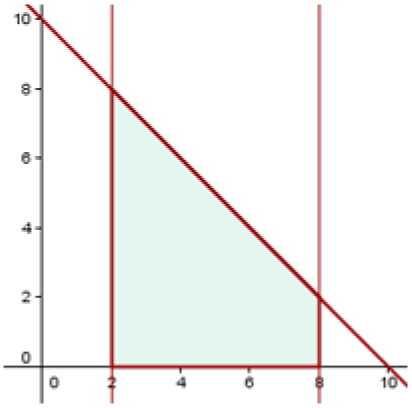
Soluciones ejercicios aplicaciones de la integral. Áreas

1

Hallar el área limitada por la recta x + y = 10, el eje OX y las ordenadas de x = 2 y x = 8.



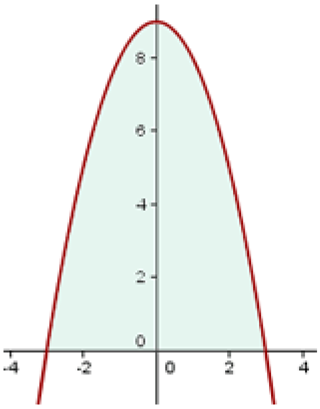
$$A = \int_2^8 (10 - x)\, dx = \left[10x - \frac{x^2}{2} \right]_2^8 = 30\ u^2$$

2

Calcular el área del recinto limitado por la curva y = 9 − x^2 y el eje OX.

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

$0 = 9 - x^2 \qquad x = 3 \qquad x = -3$



Como la parábola es simétrica respecto al eje OY, el área será igual al doble del área comprendida entre x = 0 y x = 3.

$$A = \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = 2\int_0^3 \left(9 - x^2\right) dx = 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\right] = 36u^2$$

3

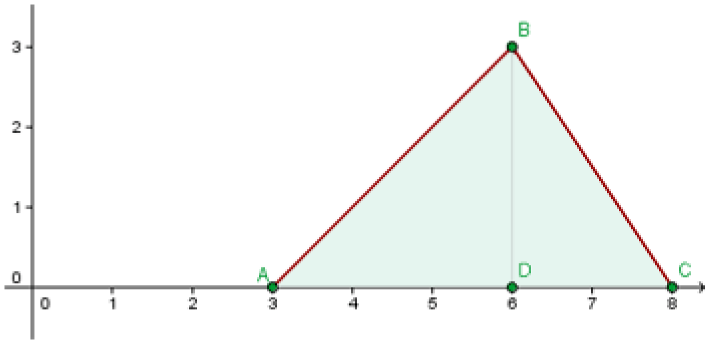
Calcular el área del triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0).

Ecuación de la recta que pasa por AB:

$$\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=x-3$$

Ecuación de la recta que pasa por BC:

$$\frac{x-8}{6-8}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=-\frac{3}{2}(x-8)$$



$$A=\int_3^6 (x-3)\,dx+\int_6^8\left[-\frac{3}{2}(x-8)\right]dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^6+\left[-\frac{3}{4}x^2+12x\right]_6^8=$$

$$=\left(18-18-\frac{9}{2}+9\right)+(-48+96+27-72)=\frac{15}{2}u^2$$

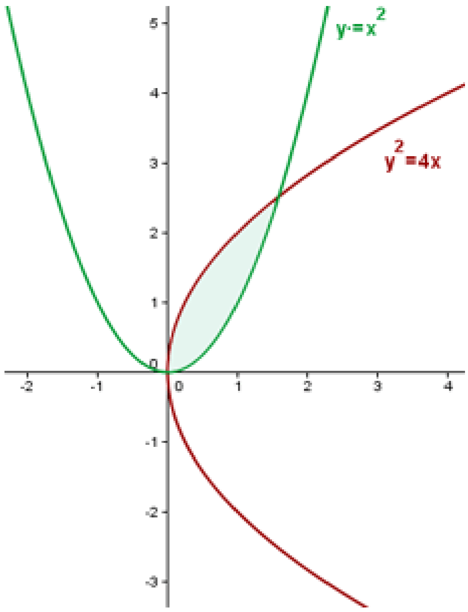
4

Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x^2 \end{cases} \qquad (x^2)^2=4x \qquad x^4-4x=0 \qquad x(x^3-4)=0$$

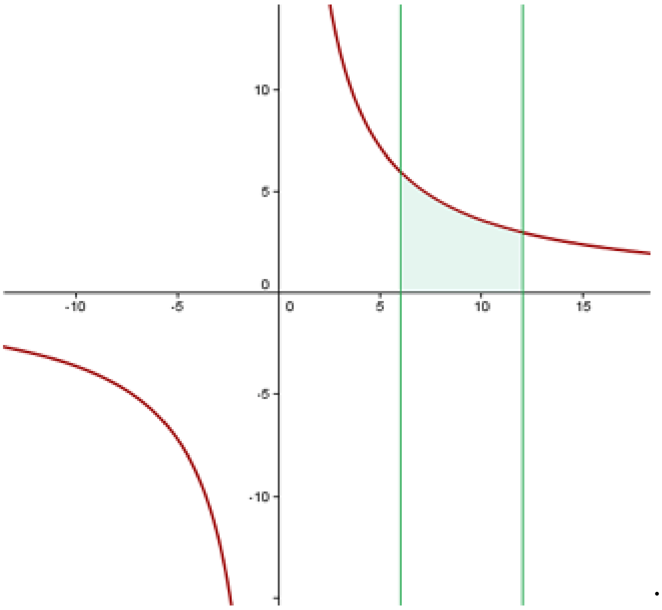
$$x=0 \qquad x=\sqrt[3]{4}$$

$$A=\int_0^{\sqrt[3]{4}}\left(2\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{4}}=\frac{4}{3}u^2$$



5

Calcular el área limitada por la curva xy = 36, el eje OX y las rectas: x = 6, x = 12.

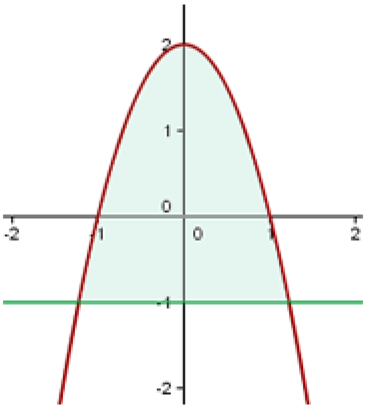


$$A = \int_6^{12} \frac{36}{x}\, dx = \left[36 \ln x\right]_6^{12} = 36 \ln 2 u^2$$

6

Calcular el área limitada por la curva y = 2(1 − x^2) y la recta y = −1.

$$\begin{cases} y = 2\left(1 - x^2\right) \\ y = -1 \end{cases} \qquad 2\left(1 - x^2\right) = -1 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$



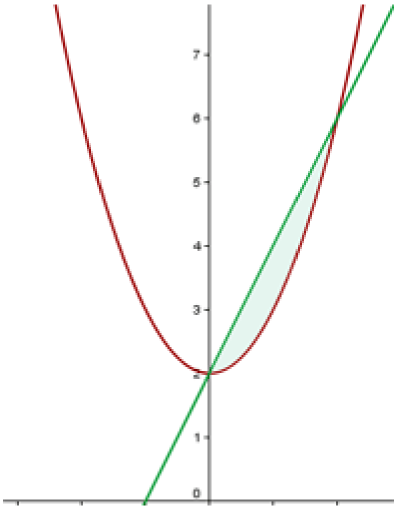
$$A = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(2 - 2x^2 + 1\right) dx = 2\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(3 - 2x^2\right)\, dx = 2\left[3x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\left(3\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 2\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}u^2$$

7

Calcular el área del recinto limitado por la parábola y = x^2 + 2 y la recta que pasa por los puntos (−1, 0) y (1, 4).

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y}{4} \qquad 4(x+1)=2y \qquad y=2x+2$$

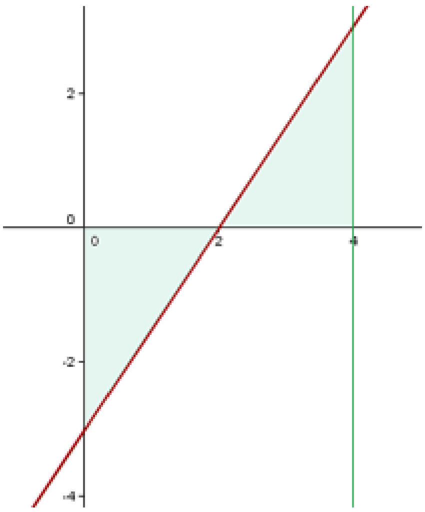


$$\begin{cases} y=x^2+2 \\ y=2x+2 \end{cases} \qquad x_1=0 \qquad x_2=2$$

$$\int_0^2 \left(2x+2-x^2-2\right)dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}u^2$$

8

Hallar el área limitada por la recta $y=\frac{3x-6}{2}$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a x = 0 y x = 4.



$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{3x-6}{2} \right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x \right]_0^2 = \frac{1}{2}(6-12) = -3$$

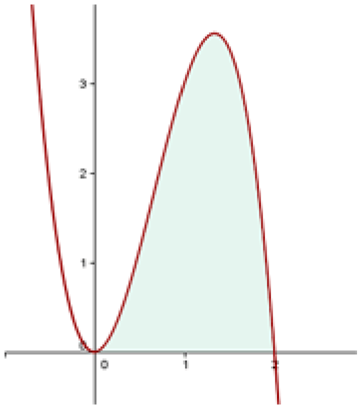
$$A_2 = \int_2^4 \left(\frac{3x-6}{2} \right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x \right]_2^4 = \frac{1}{2}\left[(24-24) - (6-12) \right] = 3$$

$$A = |A_1| + A_2 = |-3| + 3 = 6u^2$$

9

Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

$$6x^2 - 3x^3 = 0 \qquad 3x^2(2-x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$



$$A = \int_0^2 \left(6x^2 - 3x^3\right) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{4}x^4 \right]_0^2 = 16 - 12 = 4u^2$$