

CAPÍTULO 1: MATRICES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE MATRIZ

- Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido mil lechugas, 2000 kilos de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1000 y 400 respectivamente. Por cada lechuga recibe un céntimo, por cada kilo de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias del año 2014.
- Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no:
 - Un calendario.
 - La clasificación de la Liga de fútbol (o cualquier otro deporte).
 - El disco duro de un ordenador.
 - Un armario donde se guarda una colección de copas.
 - Los lineales de un supermercado.
 - Una pantalla de televisión.
 - El boleto de la Lotería Primitiva, de la Quiniela y del Euromillón.
 - Los buzones de una vivienda.
 - Los pupitres de una clase.
- Propón otros elementos de tu entorno que sea matrices o puedan representarse mediante matrices.

3. OPERACIONES CON MATRICES

- Escribe tres matrices fila.
- Escribe tres matrices columna.
- Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.
- Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.
- Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4.
- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ calcula: a) $A + 3B$ b) $2A + B - 5C$
- Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?
- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $3A^t - B^2$.
- Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
- Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula: a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3 \cdot A + 5 \cdot B - 6 \cdot C$
2. - Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?
3. - Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
4. - Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ calcula $3 \cdot A^t - B^2$.
5. - Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ realiza las siguientes operaciones si es posible: a) $A + B$ b) $3 \cdot A - 4 \cdot B$ c) $A \cdot B$ d) $A \cdot D$ e) $B \cdot C$ f) $C \cdot D$ g) $A^t \cdot C$
6. - ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir $A \cdot B$ y $B \cdot A$?
7. - a) Calcula A^{50} y A^{97} para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 b) Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$.
8. - Calcula A^n , para $n \in \mathbb{N}$, siendo A las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
9. - Se dice que dos matrices A y B conmutan si $A \cdot B = B \cdot A$. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ halla las matrices B que conmuten con A .
10. - Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con las matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
11. - Sean las matrices $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}$, $D = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$. Calcula cada uno de los productos $A \cdot B$, $D \cdot E$, $E \cdot B$, $C \cdot E$.
12. - Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$ dos matrices de orden 2×3 , en las que x, y, z denotan valores numéricos desconocidos.
 a) Determina, razonadamente, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.
 b) ¿Es posible el cálculo de $A \cdot B$? Razona la respuesta.

13.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X , tal que $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Una matriz Y tal que $A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. - Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

16.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de A

b) Comprueba que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

c) Halla una matriz X tal que $A \cdot X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

17.- Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. - Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ obtén, si procede, $(B \cdot A)^{-1}$.

19.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A \cdot B$

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A . ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

20. - Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que $A^t = A^{-1}$ y calcula $(A \cdot A^t)^{2003}$.

21.- Sean las matrices: $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla C^{-1} y D^{-1}

b) Calcula la matriz inversa de $C \cdot D$

c) Comprueba que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$.

22.- Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

23. - Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$

b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

24. - Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación $X \cdot A \cdot B - X \cdot C = 2 \cdot C$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

27. - Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

28. - Obtener las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.

a) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

29. - Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

30. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y

grupos normales. La matriz $A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera

columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,4 & 0,75 \\ 0,8 & 0,75 & 0,6 & 0,25 \end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

31. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

32. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 en la L y 30 en la S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

33. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$. Justifica el resultado.

34. - Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto $A \cdot B$.

Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

35. - Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r \cdot s \neq 1$.

Calcula M^2 , M^3 , M^4 y M^{2k} para $k \in \mathbb{N}$.

36. - Sea el conjunto de matrices definido por: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

a) Comprueba que $A, B \in M$, también $A + B \in M$ y $A \cdot B \in M$

b) Encuentra todas las matrices $C \in M$, tales que $C^2 = C$.

37. - Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A \cdot B$ es una matriz ortogonal.

38. - Considera las matrices A, B y C definidas como:

$$A_{3 \times 3} = (a_{ij} = i + j), \forall i, j = 1, 2, 3$$

$$B_{2 \times 3} = (b_{ij} = i - j), \forall i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

$$C_{3 \times 2} = (c_{ij} = 2i + j), \forall i = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

a) Construye las tres matrices.

b) Halla las traspuestas A^t , B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.

c) Analiza cuáles de los productos $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot A$, $C \cdot B$ o $C \cdot C$ pueden realizarse.

d) Determina el rango de las tres matrices A, B y C.

39. - Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ en la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Calcula M^2 .

b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprueba que $P^2 = P$.

d) Comprueba que $P \times M = M \times P = O$.

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- La dimensión de la matriz A es:

- a) 3 b) 2 c) 2×3 d) 3×2

2.- La matriz A es:

- a) una matriz fila b) cuadrada c) traspuesta d) rectangular

3.- La suma de las matrices A y B es:

a) $A+B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ b) $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ c) $A+B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ d) $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$

4.- El producto $3A$ es:

a) $3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ b) $3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ c) $3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix}$ d) $3A+B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$

5.- Indica qué afirmación es cierta

- a) Las matrices A y B se pueden multiplicar b) Las matrices A y B no se pueden multiplicar
c) Ambas tienen matriz inversa d) Sus matrices traspuestas son iguales

Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz identidad es la matriz:

- a) C ; b) D ; c) E ; d) F .

7.- El producto de las matrices E y F es:

a) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$ b) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$ c) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 13 & 9 \end{pmatrix}$ d) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

8.- La matriz inversa de la matriz F es:

a) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.- La matriz traspuesta de la matriz F es:

a) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

10.- El rango de la matriz C es:

- a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Apéndice: Problemas de matrices en las P.A.A.U.

(1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Comprueba que verifica $A^3 - I = O$, con I la matriz identidad y O la nula. b) Calcula A^{13} . c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2 \cdot X + I = A$

- (2) a) Define rango de una matriz.

b) Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3. ¿Cómo varía el rango si quitamos una columna? Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá dos?

- (3) Sea A una matriz $(m \times n)$

- a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?
b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- (4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

- a) El vector X tal que $A \cdot X = 0 \cdot X$.
b) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 3 \cdot X$.
c) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 2 \cdot X$.

- (5) Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Se pide calcular, explicando todos los pasos necesarios:

- a) Las matrices A^2 y A^3 .
b) Los números reales a y b para los cuales se verifica $(I + A)^2 = a \cdot I + b \cdot A$.

- (6) Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 , se pide:

- a) Calcula el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
b) Calcula B en el caso $a = 1$.

- (7) Una matriz 2×2 se dice que es triangular si el primer elemento de su segunda fila es 0. Encuentra todas las matrices triangulares B tales que $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

- (8) Comprueba razonadamente que:

- a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, entonces se deduce que el producto de los cuadrados de dichas matrices es igual al cuadrado del producto de dichas matrices.

- b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3 \cdot A + 2 \cdot I = O$, siendo I y O , respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula.

- c) Calcula razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores a y b que hacen que $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 = 3 \cdot A + 2 \cdot I$.

- (9) a) Calcula las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y , que satisfacen las ecuaciones: $\begin{cases} 2 \cdot X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$ donde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcula $(2 \cdot X + Y) \cdot X - (2 \cdot X + Y) \cdot (2Y)$.

- (10) Calcula todos los valores reales x, y, z, t para los cuales se verifica $A \cdot X = X \cdot A$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (11) Tenemos las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A .

b) Calcula la matriz $B = A \cdot (A + 4 \cdot I)$.

c) Determina los números reales que cumplen: $A^{-1} = x \cdot A + y \cdot I$, $A^2 = z \cdot A + t \cdot I$,

- (12) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$ dos matrices de orden (2×3) en las que x, y y $z \in \mathbb{R}$

denotan valores numéricos desconocidos. a) Determina, razonadamente, los valores de x, y y $z \in \mathbb{R}$ de manera que $B = A$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A \times B$? Razona la respuesta

- (13) Sea $6 \cdot A + 2 \cdot I = B$ una expresión matricial, donde B denota la matriz cuadrada de orden (2×2) : $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la

matriz identidad de orden correspondiente: a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A ? b) Determina los elementos que integran la matriz A , esto es, $a_{ij} \in A_{\times q}$. c) Calcula $A + 2 \cdot I$.

- (14) Sean A y B dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

- (15) Sean X e Y dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \quad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

- (16) Se llama "traza" de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal principal. Halla A , matriz de tamaño (2×2) , sabiendo que la traza de $A \cdot A^t$ es cero.

- (17) Sea A una matriz que tiene tres filas; sea B la matriz que resulta de sustituir en A la 1ª fila por la suma de las otras dos. ¿Qué debe ocurrir entre las filas de A para que A y B tengan el mismo rango?

- (18) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide: a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c

para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$. b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10} .

- (19) Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M . Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A \cdot B)^t$ y $(B \cdot A)^t$. b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (A \cdot B)^t = C$.

- (20) Calcula todas las matrices X tales que $A \cdot X + B = X$, donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- (21) Calcula dos números naturales a y b menores que 10 y tales que la siguiente matriz tenga rango 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$