

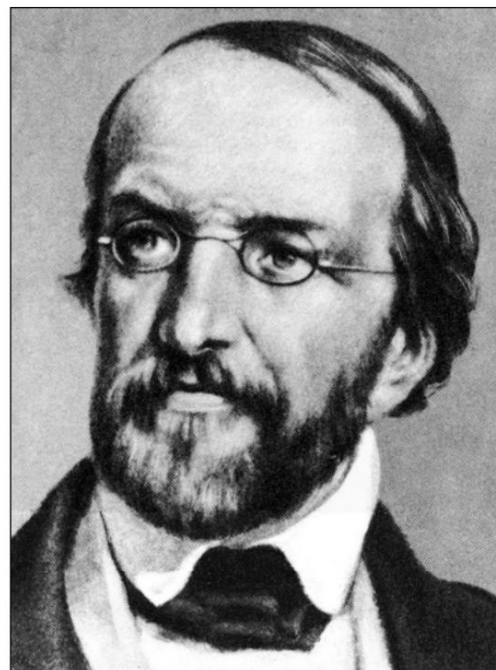
10 Representación de funciones

Concepto de función

Una de las ideas más fecundas y brillantes del siglo XVII fue la de la conexión entre el concepto de función y la representación gráfica de una curva.

Los matemáticos de aquella época solo admitían como funciones las gráficas que respondían a una fórmula. Fue a mediados del siglo XIX cuando **Dirichlet** amplió el concepto de función a relaciones de ciertos tipos dadas gráficamente (o de otro modo), aunque no hubiera una “fórmula” que las describiera.

Los conceptos y los procedimientos del cálculo de límites y derivadas permiten, en la actualidad, indagar cómoda y eficazmente sobre las características más relevantes de funciones dadas mediante fórmulas y, en consecuencia, proceder a su representación gráfica. Con una calculadora o un ordenador se consigue de forma automática e instantánea.



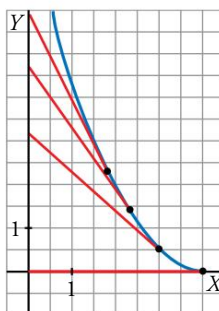
Dirichlet (1805-1859).

Dos curvas interesantes

TRACTRIZ

Sobre el eje X , a 4 m del origen hay una bola atada a una cuerda de 4 m. Una persona sujeta el extremo de la cuerda y camina a lo largo del eje Y , arrastrando la bola. La trayectoria que recorre la bola es una curva, llamada **tractriz**, que es tangente a la cuerda en cada punto. Su ecuación es:

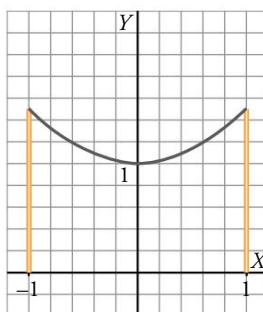
$$y = 4 \log \left(\frac{4 + \sqrt{16 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{16 - x^2}$$



CATENARIA

Si se atan los extremos de una cadena de 2,35 m a sendos postes de 1,54 m de altura separados entre sí 2 m, la cadena forma una curva llamada **catenaria**. Situando los ejes de forma adecuada, su ecuación es:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Una extraña función y un sabio contrariado

Dirichlet, con el fin de poner un ejemplo de función que no fuera continua en ninguno de sus puntos, definió esto:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Funciones así de estrafalarias se diseñaron para perfilar el concepto de función. Y el gran **Poincaré**, en 1899, se quejaba de “esas extrañas funciones inventadas con el fin de mostrar que el razonamiento de nuestros antecesores fue erróneo” y las contraponía a las “funciones *honestas* que sirven para algo”.

Dirichlet, alemán (1805-1859)

Su definición del concepto de función sirvió para afianzar los fundamentos del análisis. Pero Gustav Dirichlet, profesor en Berlín, hizo otras muchas aportaciones a las matemáticas y a la física, de modo que, al morir **Gauss** en 1855, todos pensaron en Dirichlet como su digno sucesor y fue llamado a ocupar la cátedra de Göttingen.

Poincaré, francés (1854-1912)

A principios del siglo xx era considerado como el más importante matemático del momento. Tras una vida de fecundas aportaciones a las matemáticas, a partir de 1930, utilizando su gran capacidad como escritor y su profundidad como pensador, comenzó a dirigirse al público en general, a fin de comunicar sus ideas, originales y novedosas, sobre la ciencia y la matemática. Sus tres famosas obras escritas con esta intención son *Ciencia e Hipótesis* (1902), *El valor de la Ciencia* (1905) y *Ciencia y Método* (1908). Son obras consagradas sobre filosofía de la ciencia y escritas con un estilo que se lee con mucha facilidad y agrado. Gracias a ellas, Poincaré, que era ya en 1906 presidente de la Academia de Ciencias, fue nombrado, también, miembro de la Academia Francesa, el máximo honor en Francia para un hombre de letras.

En la web  Biografía de Poincaré.



Poincaré ocupó la silla 24 de la Academia Francesa entre 1908 y 1912.

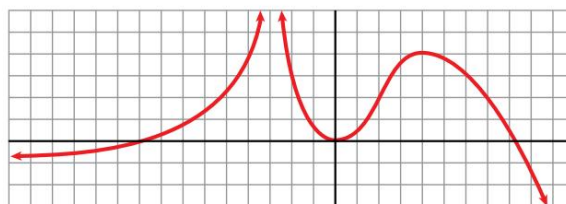
Resuelve

Límites y derivadas para representar una función

- Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$; $f(1,75) = 0$
- f es derivable en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = 2$.

- Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar al ejercicio anterior, la siguiente función:



1 Elementos fundamentales para la construcción de curvas

Recuerda

La curva que define una función f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$ del plano.

En la web

Ejercicios para **repasar** funciones conocidas.

Aunque la gráfica de una función es un conjunto de puntos, para representarla no es buen sistema, como bien sabes, obtener indiscriminadamente las coordenadas de muchos puntos de la misma. Y esto por dos motivos:

- Se emplearía mucho tiempo.
- Esos puntos, probablemente, sean insuficientes para dar una idea correcta de cómo es la curva, pues las partes más interesantes de la misma es posible que se encuentren intercaladas entre ellos o bien fuera del tramo en que hemos trabajado.

Las curvas, en general, presentan algunos detalles interesantes (puntos singulares, ramas, rupturas,...) y fuera de ellos se comportan de forma anodina. Para representarla eficazmente habrá que saber localizar esas peculiaridades que las caracterizan. Con ese fin se estudian sus límites, asíntotas, derivadas,...

En esta unidad vamos a revisar, a sistematizar, a poner orden en todos los instrumentos matemáticos que poseemos para la búsqueda de rasgos interesantes de una curva con vistas a su representación. Recordemos cuáles son:

■ Campo en el que hay que estudiar la función

- Dominio de definición. ¿Es continua? ¿Es derivable?
- Simetrías (pues si es simétrica respecto del eje Y o respecto del origen de coordenadas, bastará con estudiarla para $x \geq 0$).
- Periodicidad (si es periódica, bastará estudiarla en un periodo).

■ Ramas infinitas

- Cuando $x \rightarrow \pm\infty$. ¿De qué tipo son?
- Cuando $x \rightarrow a$. ¿Las hay?

■ Derivadas

- Puntos singulares: máximos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

■ Obtención de puntos complementarios

- Puntos de corte con los ejes.
- Otros puntos que puedan servir para perfilar la curva.

Casi nunca será necesario someter la curva a un estudio tan prolijo que requiera de todos estos elementos. Esta lista es como el panel en el que el artesano pone sus herramientas. Rara vez tendrá que utilizarlas todas para ejecutar una obra. Pero es bueno que las tenga a mano y conozca cómo se usan y cuándo es oportuno hacerlo.

Pongamos a punto todas estas herramientas.

■ Dominio de definición

El dominio de definición de una función $y = f(x)$ (valores de x para los cuales existe la función) es, en principio, todo $\mathbb{R}$, salvo que haya operaciones imposibles o que, expresamente, se nos restrinja. Recordemos las principales restricciones:

- Si hay denominadores, la función no está definida donde estos se anulan.
- $\sqrt{\varphi(x)}$ solo está definida cuando $\varphi(x) \geq 0$.
- $\log \varphi(x)$ solo está definida cuando $\varphi(x) > 0$.
- $\arcsen \varphi(x)$ y $\arccos \varphi(x)$ solo están definidas cuando $-1 \leq \varphi(x) \leq 1$.
- $\operatorname{tg} \varphi(x)$ no está definida si $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio resuelto

1 Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \arcsen(x + 3)$

b) $y = \ln(3 - \sqrt{25 - x^2})$

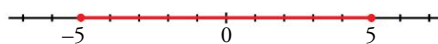
a) Puesto que $\arcsen$ actúa sobre valores del intervalo $[-1, 1]$, se ha de cumplir:

$$-1 \leq x + 3 \leq 1 \rightarrow -1 - 3 \leq x \leq 1 - 3 \rightarrow -4 \leq x \leq -2$$

El dominio de definición de $y = \arcsen(x + 3)$ es $[-4, -2]$.

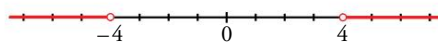
b) Para poder extraer la raíz cuadrada, ha de ser $25 - x^2 \geq 0$:

$$25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$$

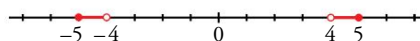


Para poder tomar logaritmo, ha de ser $3 - \sqrt{25 - x^2} > 0$:

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{25 - x^2} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} < 3 \Leftrightarrow 25 - x^2 < 9 \Leftrightarrow -x^2 < -16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow (x < -4 \text{ o bien } x > 4) \end{aligned}$$



Como han de cumplirse las dos condiciones:



Es decir, el dominio de definición de $y = \ln(3 - \sqrt{25 - x^2})$ es $[-5, -4) \cup (4, 5]$.

Dibujar funciones continuas y derivables

La **continuidad** en un intervalo permite unir con un solo trazo todos los detalles (puntos, ramas,...) que conozcamos de la función.

Si, además, es **derivable**, el trazo será suave, es decir, sin puntos angulosos.

Continuidad, derivabilidad

Las funciones que utilizamos en este nivel *son continuas en todo su dominio de definición*, salvo aquellas que se definen artificialmente empalmando trozos. También son derivables, con algunas excepciones:

— Las funciones “raíz” pueden tener tangente vertical (y, por tanto, no ser derivables) en los puntos en los que se anula el radicando.

Por ejemplo, $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$.

— El valor absoluto suele dar lugar a puntos angulosos.

Por ejemplo, $y = |x^2 - 4|$ los tiene en $x = -2$ y en $x = 2$.

Ejercicios propuestos

1 Halla el dominio de estas funciones y di dónde son continuas y dónde derivables.

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \frac{1}{\sen x}$

d) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

f) $y = \ln(x^2 - 1)$

g) $y = \ln(x^2 + 1)$

h) $y = \frac{e^x}{x^2}$

2 Di dónde son continuas y dónde son derivables las funciones:

a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

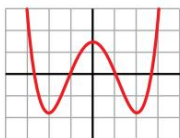
b) $y = |x^3 - x|$

c) $y = \arccos(x - 4)$

d) $y = \log(5 - \sqrt{169 - x^2})$



Ejercicios para determinar el dominio de una función.



Vocabulario

A las funciones simétricas respecto al eje Y las llamamos **pares** y a las simétricas respecto al origen de coordenadas, **impares**.

En la web



Escena para interpretar gráficamente las funciones simétricas.

Dibujar funciones periódicas

Construiremos la curva solo en un periodo y , después, la extenderemos periódicamente repitiendo el tramo una y otra vez.

Ejercicio resuelto

1 Probar que si f es periódica, también lo es $g[f(x)]$ cualquiera que sea g , pero, en general, no lo es $f[g(x)]$. Según esto, decir cuáles de las siguientes funciones son periódicas:

$$\begin{array}{ccc} 2\sin x & \sin^2 x & \sin x^2 \\ \sqrt{\sin x} & \sin \sqrt{x} & \sin 2x \end{array}$$

Simetrías

■ Si una función f verifica que $f(x) = f(-x)$, entonces su gráfica es **simétrica respecto al eje Y** . La razón es muy sencilla: si el punto (a, b) es de la gráfica, $f(a) = b$ y, por tanto, $f(-a) = b$, lo que quiere decir que el punto $(-a, b)$ también es de la gráfica.

Por ejemplo: $y = \frac{x^4 - 8x^2 + 7}{5}$ (representada en el margen), $y = \cos x$, $y = \frac{x^3 - 5x}{x^3 + 2x}$

■ Si una función verifica que $f(-x) = -f(x)$, entonces su gráfica es **simétrica respecto al origen de coordenadas**, pues si (a, b) pertenece a la gráfica de f , entonces $f(a) = b$ y, por tanto, $f(-a) = -b$, lo que significa que $(-a, -b)$ pertenece también a la gráfica de f . El punto $(-a, -b)$ es el simétrico de (a, b) respecto de $O(0, 0)$.

Por ejemplo: $y = x^3 - 3x$ (representada en el margen), $y = \sin x$, $y = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 2}$

Si sabemos que una función es simétrica, podemos construir solo media curva y, después, dibujar la otra parte por simetría.

Periodicidad

Saber que una función es periódica facilita mucho su representación. Para ayudarte en la detección de periodicidades, aquí tienes algunas propiedades. Léelas atentamente y razonalas sobre algún ejemplo:

— Las únicas funciones periódicas que conoces son las trigonométricas.

— Si $f(x)$ es periódica de periodo T , también lo es $f(mx + n)$, y su periodo es $\frac{T}{m}$.

Por ejemplo: $\sin\left(\frac{x + \pi}{4}\right)$ es periódica y su periodo es $\frac{2\pi}{1/4} = 8\pi$.

— Si $f(x)$ y $g(x)$ son periódicas, entonces $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$ son periódicas, y su periodo es, como máximo, el mínimo común múltiplo de los periodos de f y g .

Por ejemplo: $\sin 2x + \sin x$ tiene periodo 2π .

Si f es periódica de periodo T , entonces $f(x + kT) = f(x)$. Por tanto, $g[f(x + kT)] = g[f(x)]$, es decir, $g \circ f$ es periódica.

Sin embargo, $f[g(x + kT)] \neq f[g(x)]$ porque $g(x + kT) \neq g(x)$.

De las funciones propuestas son periódicas aquellas en las que la función seno actúa directamente sobre la variable: $2\sin x$, $\sin^2 x$, $\sqrt{\sin x}$.

No lo son $\sin x^2$ y $\sin \sqrt{x}$.

La función $y = \sin 2x$ es periódica de periodo π por ser del tipo $\sin(mx + n)$.

Ejercicios propuestos

3 Halla las simetrías y las periodicidades de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

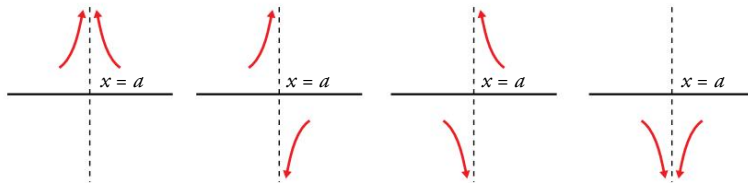
e) $y = \sin x + 1/2 (\sin 2x)$

f) $y = \sqrt[3]{\cos x + 5}$

Ramas infinitas en un punto. Asíntotas verticales

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, entonces la recta $x = a$ es una **asíntota vertical**.

Si la función está definida a ambos lados de la asíntota, puede ocurrir uno de estos cuatro casos:



Para dilucidar cuál de ellos es, hay que estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Tienen asíntota vertical:

- Las funciones que son de la forma $\frac{\Psi(x)}{\Phi(x)}$ en puntos en los que se anula el denominador, $\Phi(x)$.
- $\log \varphi(x)$ en los puntos en donde se anula $\varphi(x)$.
- $\operatorname{tg} \varphi(x)$, donde $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ejemplos:

- $y = \frac{2x+1}{x-2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$ ($\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$).

Para averiguar el signo de $f(x)$ en las cercanías de 2, damos a x valores próximos a 2 (“algo menores” y “algo mayores”).

$$\text{IZQUIERDA: } x = 1,99 \rightarrow f(x) = \frac{2 \cdot 1,99 + 1}{1,99 - 2} = -498 \text{ (negativo)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{DERECHA: } x = 2,01 \rightarrow f(x) = \frac{2 \cdot 2,01 + 1}{2,01 - 2} = 502 \text{ (positivo)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

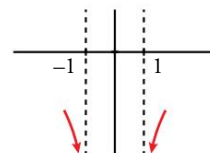
- $y = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$ tiene una asíntota vertical en $x = -5$. Pero la función solo está definida a la derecha de la asíntota, y, evidentemente, $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{1}{\sqrt{x+5}} = +\infty$.

$$\bullet y = \ln(x^2 - 1)$$

$$\ln(x^2 - 1) \rightarrow -\infty \text{ si } x^2 - 1 \rightarrow 0^+$$

Es decir, si $x \rightarrow 1^+$ o $x \rightarrow -1^-$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1) = -\infty$$



Ejercicios propuestos

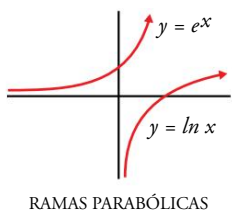
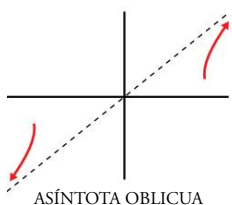
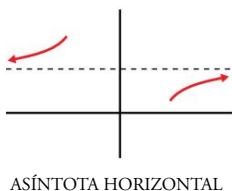
4 Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2 x}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

c) $y = \frac{3}{\sqrt{4-x}}$

d) $y = \log(x^2 - 4)$



Ramas infinitas en el infinito

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, entonces la recta $y = l$ es **asíntota horizontal** cuando $x \rightarrow +\infty$.

La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua estudiando el signo de la diferencia $f(x) - l$ para valores grandes de x .

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n$, entonces la recta $y = mx + n$ es una **asíntota oblicua** cuando $x \rightarrow +\infty$.

La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua estudiando el signo de $f(x) - (mx + n)$ para valores grandes de x .

¡Atención! Como sabes de primer curso, en las funciones racionales la localización de las asíntotas oblicuas es mucho más sencilla (véase página 287).

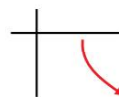
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ y no hay asíntota oblicua, entonces puede haber **rama parabólica** de uno de los siguientes tipos:



TIPO 1. Crecimiento cada vez más rápido.



TIPO 2. Crecimiento cada vez más lento.



La curva crece, o decrece, cada vez más deprisa. De este tipo son las ramas parabólicas de las funciones **polinómicas** y de las **exponenciales**.

La curva crece, o decrece, cada vez más despacio. De este tipo son las funciones **radicales** y las **logarítmicas**.

La casuística cuando $x \rightarrow -\infty$ es análoga a la aquí expuesta.

- La función $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ tiene una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. Hallémosla:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x) - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - 2/x} + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Hay asíntota oblicua para $x \rightarrow +\infty$. Su ecuación es $y = x - 1$.

Posición de la curva respecto de la asíntota:

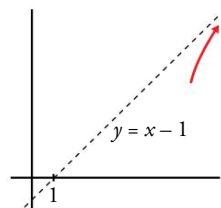
Para $x = 1\,000$, $\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)$ vale $-0,0005$.

La curva queda por debajo de la asíntota.

Análogamente, se obtiene la asíntota $y = -x + 1$ para $x \rightarrow -\infty$ y se prueba que la curva también está por debajo.

Notación

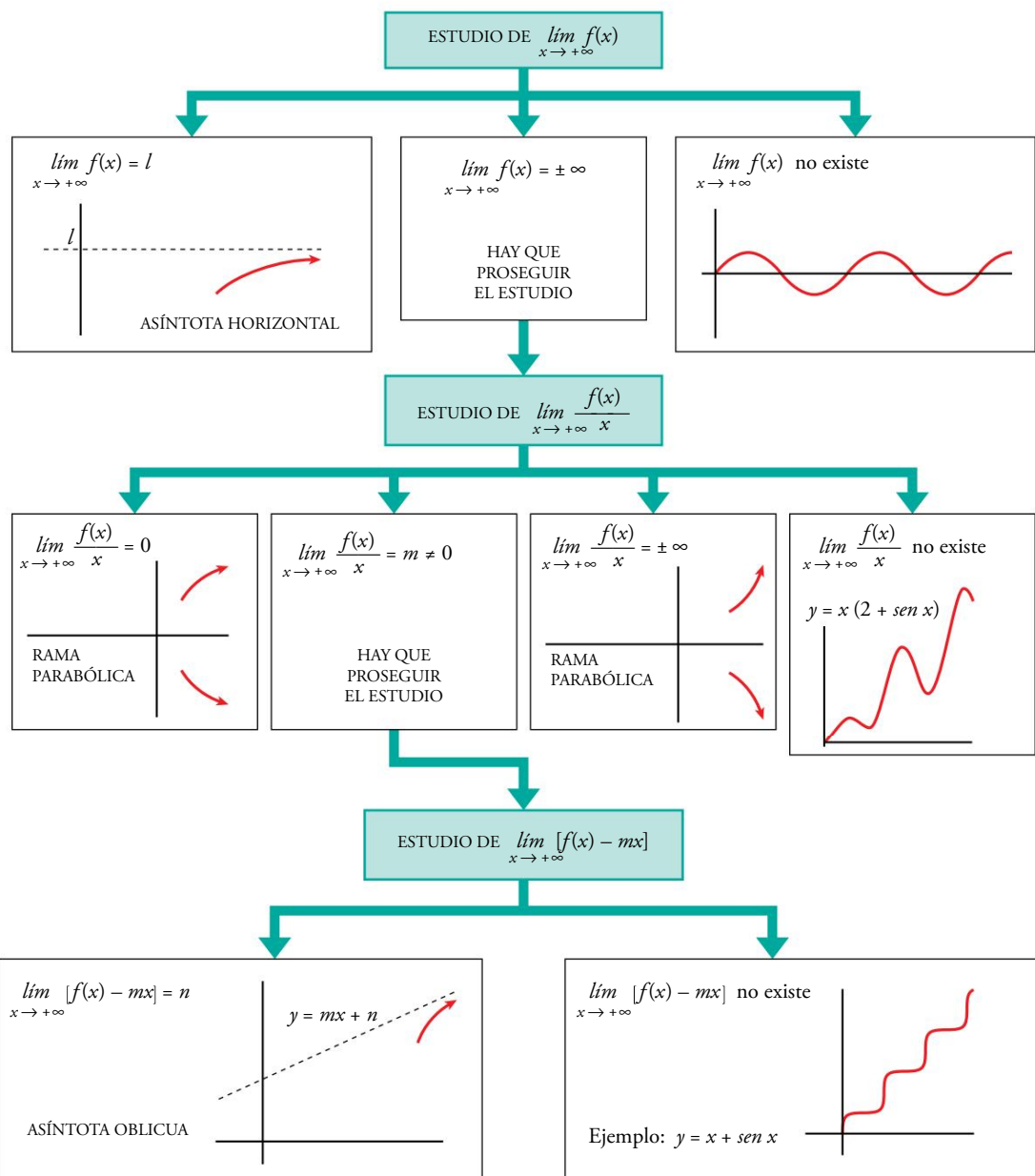
Llamamos $y = mx + n$ a la asíntota.



En la web

Obtención de la asíntota oblicua de $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

SÍNTESIS: POSIBLES RAMAS INFINITAS CUANDO $x \rightarrow +\infty$ (*)



(*) Para $x \rightarrow -\infty$, la casuística es idéntica.

Ejercicios propuestos

5 Halla las ramas en el infinito de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e) $y = \ln(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

g) $y = x \sin x$

h) $y = x - \cos x$

6 ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen estas funciones?

a) $y = \frac{1}{x+1}$

b) $y = \frac{3x}{x+1}$

c) $y = \frac{x^2}{x+1}$

d) $y = \frac{x^4}{x+1}$

e) $y = \frac{x^2}{e^x}$

f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

g) $y = x + \sqrt{x}$

h) $y = \lg x$



En la web



Ejercicios para determinar las asíntotas de funciones racionales.

Puntos interesantes

Puntos singulares

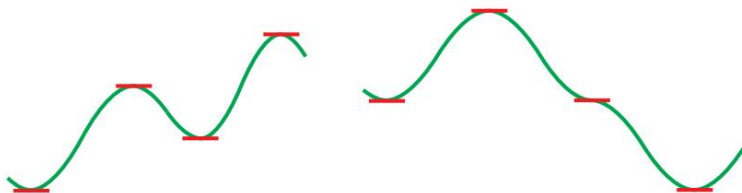
El conocimiento de **todos** los puntos de tangente horizontal (puntos singulares) es crucial para la representación de una gráfica.

También es un dato muy importante saber que no hay ninguno.

PUNTOS DE TANGENTE HORIZONTAL (SINGULARES O CRÍTICOS)

- Las abscisas de los puntos de tangente horizontal se obtienen cuando resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

Una vez halladas sus soluciones, $x_1, x_2, \dots, x_k$, los puntos de la gráfica correspondientes, $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_k, f(x_k))$, sirven para marcar las subidas y las bajadas de la curva, siempre que $f(x)$ sea derivable en todo el tramo en el que se encuentran.



- Los **máximos** y los **mínimos** se manifiestan espontáneamente al trazar la curva, uniendo razonablemente las ramas infinitas y los puntos de derivada nula. Pero recordemos que también se puede saber si un punto de tangente horizontal es máximo o mínimo recurriendo a la segunda derivada:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0 \Rightarrow$ en $(a, f(a))$ hay un mínimo relativo.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \Rightarrow$ en $(a, f(a))$ hay un máximo relativo.

- También se puede averiguar si un punto de tangente horizontal es máximo o mínimo estudiando el signo de $f'(x)$ a su izquierda y a su derecha.

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

- Cortes con el eje X : sus abscisas son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.
- Corte con el eje Y : es el $(0, f(0))$.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Son los puntos en donde la función pasa de cóncava a convexa, o viceversa. Se encuentran entre las raíces de la ecuación $f''(x) = 0$.

OTROS PUNTOS

A veces, conviene hallar otros puntos $(a, f(a))$ para precisar la forma de la curva.

Puntos de inflexión

Los puntos de inflexión matizan la forma de la curva. A veces, son muy útiles.

Ejercicios propuestos

7 Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de estas funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b) $y = \ln(x^2 + 1)$

8 Halla los puntos singulares de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$



2 El valor absoluto en la representación de funciones

En la web

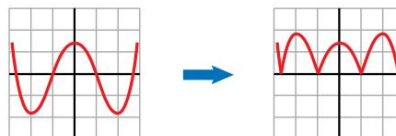
Repaso teórico: valor absoluto de una función.

Valor absoluto de una función

Para representar $y = |f(x)|$, representaremos la función $y = f(x)$ y, después, pasaremos hacia arriba, mediante simetría, todo el trozo de curva que esté bajo el eje X .

Por ejemplo, para representar $y = \left| \frac{x^4 - 8x^2 + 7}{5} \right|$, representamos $y = \frac{x^4 - 8x^2 + 7}{5}$ y

“echamos hacia arriba” del eje X , por simetría, lo que está debajo.



OPERACIONES CON “VALORES ABSOLUTOS”

El análisis de la función debe realizarse prestando atención a las abscisas en las que cambia de signo alguno de los sumandos con valor absoluto.

Ejercicios resueltos

1 Representar $y = \frac{1}{1+|x|}$.

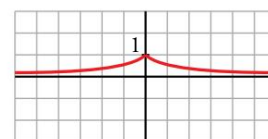
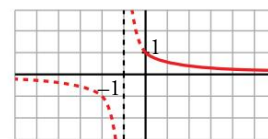
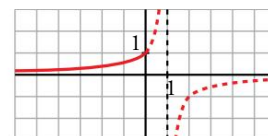
El único valor absoluto que interviene es $|x|$. La abscisa en donde cambia de signo x es 0. Por tanto:

$$x < 0, |x| = -x \rightarrow y = \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x-1}$$

$$x \geq 0, |x| = x \rightarrow y = \frac{1}{1+x}$$

Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{1}{1+|x|} = \begin{cases} -\frac{1}{x-1}, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



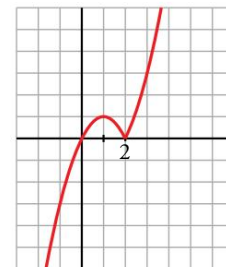
2 Representar $y = x|x-2|$.

El único valor absoluto que interviene es $|x-2|$. La abscisa en donde cambia de signo $x-2$ es 2. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 2:

$$x < 2 \rightarrow |x-2| = -x+2 \rightarrow y = x(-x+2) = -x^2 + 2x$$

$$x \geq 2 \rightarrow |x-2| = x-2 \rightarrow y = x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$y = x|x-2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



Ejercicios propuestos

1 Representa:

a) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

b) $y = |x-5|x$

c) $y = x - |x-3| + |x+1|$

d) $y = \sqrt{|x^2 - 1|}$

En la web



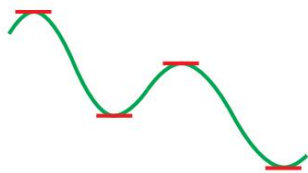
Ejercicios para identificar funciones con valor absoluto.

3 Representación de funciones polinómicas

Recuerda

Es importante reconocer las funciones polinómicas y saber, a priori, qué podemos esperar de ellas.

Ten en cuenta



Con los puntos singulares y las ramas infinitas se aprecia claramente la forma de la curva.

En la web

Ejercicios para **repasar** la representación de funciones polinómicas.

Ejercicios resueltos

1 Representar la función siguiente:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

Las funciones polinómicas, $y = P(x)$, son derivables (y, por tanto, continuas) en todo $\mathbb{R}$.

No tienen asíntotas de ningún tipo. Tienen ramas parabólicas en $-\infty$ y en $+\infty$. Conociendo estas dos ramas infinitas y los puntos singulares, se pueden representar con mucha precisión. Si se quieren perfilar mejor, se pueden obtener los puntos de corte con los ejes y los puntos de inflexión.

Pueden presentar simetrías:

- Si solo tienen términos de grado par, son simétricas respecto del eje Y .

Por ejemplo: $y = 2x^4 - 3x^2 + 5$

- Si solo tienen términos de grado impar, son simétricas respecto del origen de coordenadas.

Por ejemplo: $y = x^5 - 4x^3 + 2x$

Para representar una función polinómica $y = P(x)$:

- Se observa si tiene algún tipo de **simetría**.

- Se hallan sus dos **ramas infinitas**: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- Se resuelve la ecuación $P'(x) = 0$.

Sus soluciones, si las hay, son las abscisas de sus **puntos singulares**. A continuación, se obtienen sus ordenadas.

- Los puntos obtenidos se unen entre sí y con las ramas infinitas, cuidando de no dibujar más puntos singulares que los obtenidos. De este modo se averigua cuáles son los máximos y mínimos relativos.

- Si se puede, conviene obtener, también, los **puntos de corte con los ejes** para conseguir mayor precisión en la representación.

Simetrías. No es simétrica ni respecto del eje Y ni respecto del origen de coordenadas.

Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$$

$$f(1) = 9, f(3) = 5 \rightarrow (1, 9), (3, 5)$$

Cortes con los ejes:

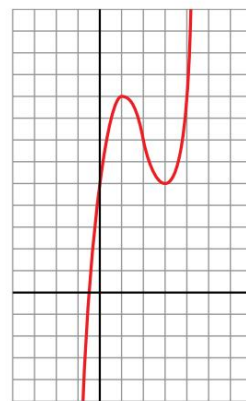
Corta el eje Y en $(0, 5)$ y al eje X entre -1 y 0 , pues $f(-1) = -11$ y $f(0) = 5$.

Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \rightarrow (2, 7)$$

Con estos datos podemos dibujar la curva.



Ejercicios resueltos

2 Representar la siguiente función:

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3$$

Simetrías: Observamos que todos los términos son de grado impar. Por tanto, es simétrica respecto del origen de coordenadas. (Recuerda que a estas funciones se las llama **impares**).

Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 20x^3) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 20x^3) = +\infty$$

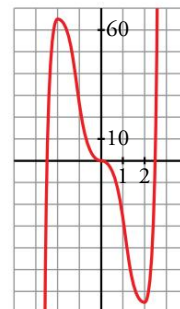
Puntos singulares:

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Los puntos singulares son $(-2, 64)$, $(0, 0)$ y $(2, -64)$.

Estos datos son suficientes para representar la gráfica.



3 Representar la función:

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$$

Simetrías: No es ni **par** ni **impar**. Por tanto, no es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen de coordenadas.

Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Puntos singulares:

$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24$. Por ser un polinomio de tercer grado, hemos de localizar algunas de sus raíces tanteando con los divisores del término independiente (24). Además, como todos los coeficientes son positivos, solo puede tener raíces negativas. Probamos con $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 24 & 44 & 24 \\ -1 & & -4 & -20 & -24 \\ \hline & 4 & 20 & 24 & 0 \end{array}$$

Una raíz es $x = -1$, y las otras dos raíces se obtienen resolviendo la ecuación $4x^2 + 20x + 24 = 0$.

Son $x = -2$ y $x = -3$.

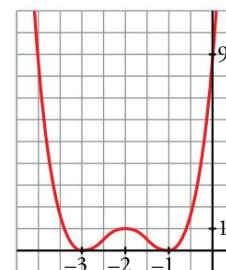
$$\left. \begin{array}{l} x = -3, f(-3) = 0 \\ x = -2, f(-2) = 1 \\ x = -1, f(-1) = 0 \end{array} \right\} \text{Puntos singulares: } (-3, 0), (-2, 1), (-1, 0)$$

Cortes con los ejes:

Dos de los puntos singulares están en el eje X .

Si hacemos un bosquejo de la curva, observamos que no corta al eje X en más puntos.

Al eje Y lo corta en el punto $(0, 9)$.



Ejercicios propuestos

1 Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

e) $y = x^3 - 3x$

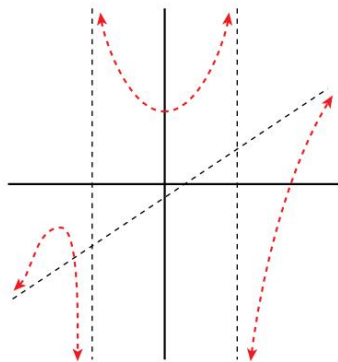
c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

f) $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

4 Representación de funciones racionales

Atención

Suponemos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen raíces comunes.



En las funciones racionales, conociendo las asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas, podemos realizar un bosquejo en el que se aprecie claramente la forma de la curva.

En la web

Ejercicios para **repasar** la representación de funciones racionales.

En una función racional $y = P(x)/Q(x)$ hemos de prestar especial atención a los valores de x para los que se anula el denominador: en cada uno de ellos hay una asíntota vertical. La función es derivable (y, por tanto, continua) en todos los demás puntos de $\mathbb{R}$.

Dependiendo de los grados de $P(x)$ y de $Q(x)$, la curva puede tener asíntota horizontal, asíntota oblicua o ninguna de ellas.

Si tiene asíntota horizontal u oblicua, es la misma para $x \rightarrow -\infty$ y para $x \rightarrow +\infty$.

Para representar una función racional $y = f(x) = P(x)/Q(x)$:

- Se observa si tiene algún tipo de **simetría**.
- Se hallan las **asíntotas verticales**: sus abscisas son las soluciones de la ecuación $Q(x) = 0$. Se estudia la posición de la curva respecto de cada una de ellas.

- Se estudia si tiene asíntota horizontal u oblicua:

— Si $\text{grado de } P(x) \leq \text{grado de } Q(x)$, hallamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)/Q(x) = l$$

La recta $y = l$ es una **asíntota horizontal**.

- Si $\text{grado de } P(x) = \text{grado de } Q(x) + 1$ hay **asíntota oblicua**. Su ecuación es $y = mx + n$, siendo $mx + n$ el cociente de la división $P(x) : Q(x)$.

(Tanto si hay asíntota horizontal como oblicua, se estudia la posición de la curva respecto de ella para $x \rightarrow -\infty$ y para $x \rightarrow +\infty$).

- Si $\text{grado de } P(x) > \text{grado de } Q(x) + 1$ hay **ramas parabólicas**.

- Se averiguan los **puntos singulares**. Sus abscisas son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

- Se pueden obtener, si se desea, otros **puntos** como los **de corte con los ejes**, $f(x) = 0$, y los **de inflexión**, $f''(x) = 0$.

Ejercicios resueltos

- 1 Representar la función siguiente:

$$y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$$

Simetrías: $f(-x) = f(x)$. Por tanto, es simétrica respecto del eje Y .

Asíntotas verticales: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$

Posición respecto de la asíntota $x = 1$:

$$f(0,99) = -48, \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty; f(1,01) = 51, \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Por simetría, se deduce la posición respecto de la asíntota $x = -1$.

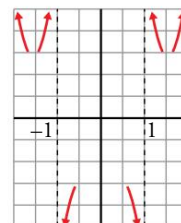
Ramas infinitas en el infinito:

No tiene asíntota horizontal ni oblicua, pues:

$$\text{grado } P(x) = \text{grado } Q(x) + 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, tiene

dos ramas parabólicas.



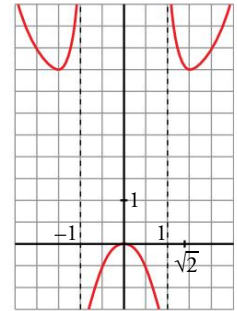
Ejercicios resueltos

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-1) - x^4 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^5 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}) = 4 \\ x = 0, f(0) = 0 \\ x = \sqrt{2}, f(\sqrt{2}) = 4 \end{array} \right\} \text{Puntos singulares: } (-\sqrt{2}, 4), (0, 0), (\sqrt{2}, 4)$$



2 Representar la siguiente función:

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

Simetrías: No es simétrica respecto del eje Y ni respecto del origen.

Asíntotas verticales: Hay una en $x = 2$.

Posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(1,99) \approx 78\,806 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

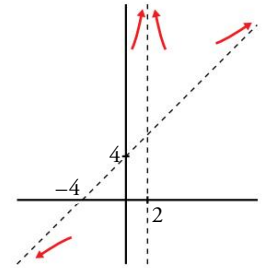
$$f(2,01) \approx 81\,206 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{x^2-4x+4} = x + 4 + \frac{12x-16}{x^2-4x+4}$$

$y = x + 4$ es asíntota oblicua.

El signo de la diferencia, $\frac{12x-16}{(x-2)^2}$, es positivo cuando $x \rightarrow +\infty$ y negativo cuando $x \rightarrow -\infty$.

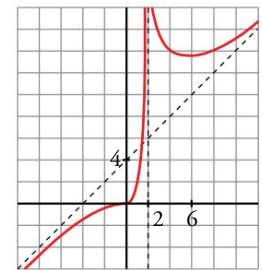


Puntos singulares:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x = 6 \rightarrow f(6) = 13,5 \end{array} \right\} \text{Puntos singulares: } (0, 0) \text{ y } (6; 13,5)$$



Ejercicios propuestos

1 Representa:

a) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

b) $y = \frac{x^2-9}{x^2-4}$

c) $y = \frac{x^2-2x-8}{x}$

d) $y = \frac{x^3+2x}{x^2+1}$

5 Representación de otros tipos de funciones

Si la función que nos proponemos representar no es polinómica ni racional, carecemos de la información que, a priori, tenemos de estas. Debemos proceder, por tanto, analizando sistemáticamente todos los aspectos que describimos en la presentación de esta unidad. Aun así, podemos tener en cuenta ciertas características de algunas funciones elementales:

- En las **funciones con radicales**, hemos de cuidar el dominio. Pueden tener asíntotas para $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, pero suelen ser distintas.
- Las **funciones exponenciales** suelen tener una asíntota horizontal y una rama parabólica.
- Las **funciones trigonométricas** es muy probable que sean periódicas.

Ejercicios resueltos

1 Representar la función siguiente:

$$y = \sqrt{x^2 - 2x}$$

- $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2 \cdot (-x)} = \sqrt{x^2 + 2x}$ no es igual a $f(x)$ ni a $-f(x)$.

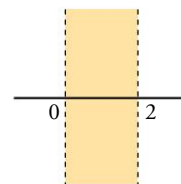
Por tanto, **no es simétrica** respecto del eje Y ni del origen de coordenadas.

- $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ o bien $x = 2$

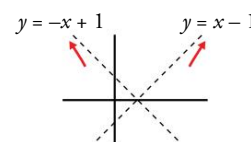
Si $x \in (0, 2)$, $x^2 - 2x < 0$; es decir, el radicando es negativo. Por tanto, no está definida en $(0, 2)$.

Dominio de definición: $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

La curva es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.



- Ya hemos visto (pág. 304) que tiene asíntotas para $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$ y la posición de la curva respecto a ellas.

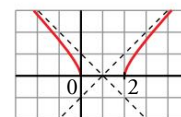


- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

Se anula en $x = 1$, pero aquí la función no está definida. Por tanto, **no tiene puntos singulares**.

Sabemos que la curva pasa por $(0, 0)$ y $(2, 0)$.



Otra forma de localizar las dos asíntotas oblicuas:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x - 1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$$

Vemos de esta forma que $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, para valores grandes de $|x|$ se aproxima a $y = |x - 1|$. Además es “un poco menor”, pues se resta 1 en el radicando.

Esto se concreta así:

Cuando $x \rightarrow -\infty$, $y = f(x) \approx y = -x + 1$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, $y = f(x) \approx y = x - 1$

La curva se aproxima a las asíntotas por debajo.

Ejercicios resueltos

2 Representar la siguiente función:

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

- Es **simétrica respecto al eje Y**, pues $f(x) = f(-x)$.
- Como $x^2 + 1$ es siempre positivo, **está definida** y **es derivable** en todo $\mathbb{R}$. Además, $f(x)$ es siempre positivo, pues $x^2 + 1 \geq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntota de ningún tipo.

Tiene **ramas parabólicas**.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$x = 0$, $f(0) = 0$. Tiene un **punto singular** en $(0, 0)$. Es un mínimo relativo, pues sabemos que $f(x) > 0$ si $x \neq 0$.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

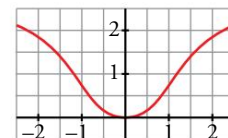
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = -1$$

$$f(-1) = f(1) = \ln 2 \approx 0,7$$

Puntos de inflexión: $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$

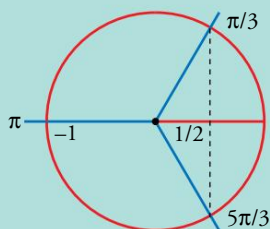


• Representación:



3 Representar la siguiente función:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x$$



- El periodo de $\sin x$ es 2π y el de $\sin 2x$, es π . Por tanto, la función es **periódica** de periodo 2π . La estudiamos solo en el intervalo $[0, 2\pi]$.

- Es **derivable** en todo $\mathbb{R}$ (es suma de funciones derivables).

$$f'(x) = \cos 2x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \rightarrow f(x) \approx 1,3 \\ x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow f(x) \approx -1,3 \end{cases}$$

$$\cos x = -1 \rightarrow x = \pi \rightarrow f(\pi) = \frac{1}{2} \sin 2\pi + \sin \pi = 0$$

Los **puntos singulares** son $\left(\frac{\pi}{3}; 1,3\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}; -1,3\right)$, $(\pi, 0)$

- **Puntos de corte con los ejes:** $(0, 0)$, $(\pi, 0)$

- **Puntos de inflexión:**

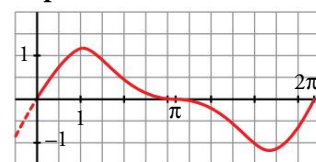
$$f''(x) = -4\sin x \cos x - \sin x = -\sin x(4\cos x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{4}$$

$$\sin x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (0, 0) \\ x = \pi \quad (\pi, 0) \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 1,82 \quad (1,82; 0,73) \\ x = 4,46 \quad (4,46; -0,73) \end{cases}$$

• Representación:



A partir de aquí, se extiende periódicamente en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicios resueltos

4 Representar la función siguiente:

$$y = \frac{e^x}{x}$$

• **No es simétrica.**

• **Asíntota vertical** en $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

• Rama infinita cuando $x \rightarrow +\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Es una **rama parabólica**.

Rama infinita cuando $x \rightarrow -\infty$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ tomando valores negativos.

$y = 0$ es una **asíntota horizontal**.

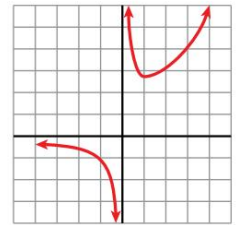
La curva queda por debajo.

$$f'(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$f(1) = e$. Tiene un **punto singular**: $(1, e)$.

• **Representación:**



5 Representar la función siguiente:

$$y = (\ln x)^2$$

Recordemos la gráfica de $y = \ln x$ para inspirarnos en ella.

• Puesto que $\ln x$ está definido en $(0, +\infty)$, $D = (0, +\infty)$ es el dominio de definición de $y = (\ln x)^2$.

En él la función es **continua** y, seguramente, también será **derivable**.

• **Ramas infinitas:**

La asíntota vertical de $y = \ln x$ también lo es de esta función, solo que al elevar al cuadrado tomará valores positivos: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, tiene una rama parabólica.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$f(1) = (\ln 1)^2 = 0$. Por tanto, el punto $(1, 0)$ es de tangente horizontal.

Puesto que $(\ln x)^2 \geq 0$ en su dominio, entonces en $(1, 0)$ hay un mínimo.

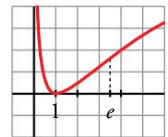
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$f(e) = (\ln e)^2 = 1$. Punto de inflexión en $(e, 1)$

• **Representación:**



Ejercicios propuestos

1 Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $y = \ln(x^2 + 4)$

d) $y = \ln(x^2 - 1)$

e) $y = \frac{\ln x}{x}$

f) $y = \frac{e^x}{x^2}$

g) $y = \frac{e^{-x}}{-x}$

h) $y = x^3 e^x$

i) $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

j) $y = \frac{1}{\ln x}$

En la web



Ejercicios para identificar funciones racionales, exponenciales y logarítmicas.

1. Del estudio a la gráfica (asíntotas horizontales y verticales)

Representar $y = f(x)$ sabiendo que:

I. $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$;

f es derivable en todo su dominio.

II. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

III. $f(1) = 0$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$;

$f(2) = -1$; $f''(2) > 0$

Hazlo tú. Representa $y = f(x)$:

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$;

f es derivable en todo su dominio.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^+$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1^+$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

$f(0) = 0$; $f(7) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $f(4) = 2$; $f''(4) < 0$

I. Que sea derivable en todo su dominio, $\mathbb{R} - \{0\}$, quiere decir que es continua y que no tiene puntos angulosos.

II. Los límites nos dan las tendencias de la función en el infinito y cerca de $x = 0$, donde no está definida.

En $-\infty$ hay una asíntota horizontal, $y = 0$, a la que la función se acerca por encima.

En $x = 0$ hay una asíntota vertical. Tanto a su izquierda como a su derecha, la gráfica tiende a $+\infty$.

En $+\infty$ está la misma asíntota horizontal, $y = 0$, a la que la función se acerca por debajo.

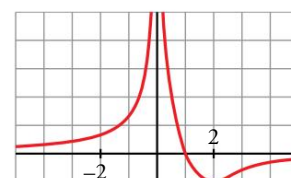
Trazamos, a partir de esta información, un esbozo de la gráfica.



III. $f(1) = 0$ quiere decir que corta al eje X en $x = 1$.

La equivalencia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ significa no solo que hay un punto de tangente horizontal en $x = 2$, sino que es el único. Como $f(2) = -1$, está en $(2, -1)$ y como $f''(2) > 0$, es un mínimo.

Trazamos la curva.



2. Del estudio a la gráfica (simetrías y asíntotas oblicuas y verticales)

Representar $y = f(x)$ sabiendo que:

I. $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$;

f es derivable en todo su dominio.

II. La función es par.

Información de $f(x)$ cuando $x \geq 0$:

III. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -2$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

IV. $f(3/4) = 0$; $f(3) = 0$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

$f(0) = -1$; $f''(0) > 0$

Hazlo tú. Representa $y = f(x)$:

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; función impar.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1) \cdot x] = -1^+$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

$f(3) = 0$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f(0) = 0$

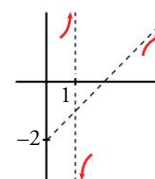
I. Como en el ejercicio anterior, la función es continua y no tiene puntos angulosos en su dominio de definición, $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

II. Que la función sea par quiere decir que es simétrica con respecto al eje Y . A partir de aquí, obtenemos la información solo para $x > 0$ y trazamos, luego, su simétrica.

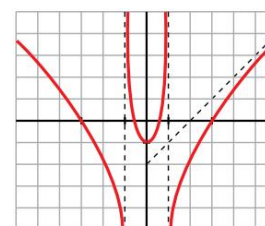
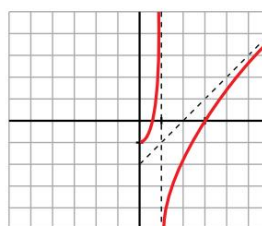
III. Los límites nos muestran que hay una asíntota oblicua, $y = x - 2$, hacia la derecha y que hay una asíntota vertical en $x = 1$ y la curva tiende a $+\infty$ por la izquierda y a $-\infty$ por la derecha.

IV. La equivalencia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ quiere decir que $x = 0$ es el único punto de derivada cero. Como, además, $f''(0) > 0$, se trata de un mínimo relativo.

Trazamos, a partir de esta información, un esbozo de la gráfica de la función.



Representamos, primero, la función para $x \geq 0$, y luego, por simetría respecto al eje Y , la función completa.



Ejercicios y problemas resueltos

3. Representación de una función racional con asíntotas oblicuas

Estudiar el dominio, las asíntotas y los puntos singulares de esta función:

$$y = \frac{4 - 2x^2}{x}$$

Representar su gráfica.

- Está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ y es continua en todo su dominio. Su expresión parece indicar que será derivable en todo el dominio.

$$\text{Simetría: } f(-x) = \frac{4 - 2(-x)^2}{-x} = -\frac{4 - 2x^2}{x} = -f(x)$$

Es simétrica respecto del origen de coordenadas.

- Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 - 2x^2}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - 2x^2}{x} = +\infty$$

- Asíntota oblicua: $y = -2x$

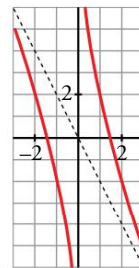
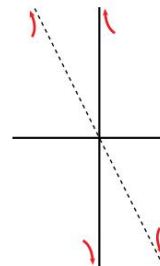
$$\text{La obtenemos efectuando el cociente: } \frac{4 - 2x^2}{x} = -2x + \frac{4}{x}$$

$$f(x) - (-2x) = \frac{4}{x} \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > -2x \\ \text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < -2x \end{cases}$$

- Puntos singulares: a partir del bosquejo de la curva que hemos hecho con las asíntotas, nos quedamos con la impresión de que no va a tener ni máximos ni mínimos. Lo comprobamos estudiando la derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 4}{x^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 0$$

Efectivamente, la ecuación $x^2 + 2 = 0$ no tiene solución. No hay, pues, puntos de tangente horizontal.



Hazlo tú. Representa la siguiente función:

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}$$

4. Representación de una función racional con ramas parabólicas

Estudiar el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos de la función:

$$y = \frac{x^3}{3(x+1)}$$

Después, representarla.

- Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{-1\}$. No tiene simetrías.

- Asíntota vertical: $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{3(x+1)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{3(x+1)} = -\infty$$

- Ramas en el infinito: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{3(x+1)} = +\infty$

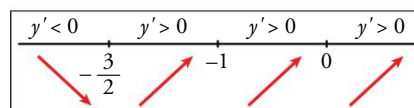
$$\text{Tiene ramas parabólicas, pues } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

La curva debe tener un mínimo a la izquierda de $x = -1$.

- Puntos singulares:

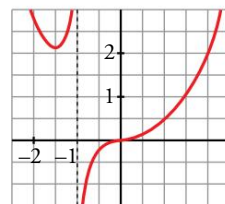
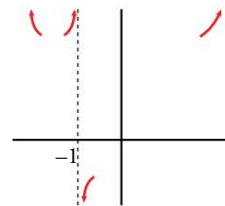
$$f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{3(x+1)^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = -\frac{3}{2}$$

- Signo de la derivada:



- Es decreciente en $(-\infty, -\frac{3}{2})$ y creciente en el resto de su dominio.

Tiene un mínimo en $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$. En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.



Hazlo tú. Estudia el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos para representar esta función:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

5. Función con valor absoluto

Dibujar la gráfica de esta función:

$$f(x) = |x + 3| + |x - 1| - |2x + 4|$$

Indicar antes la función a trozos correspondiente.

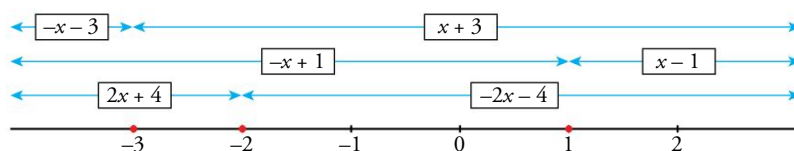
Expresamos cada uno de los valores absolutos como función definida a trozos:

$$|x + 3| = \begin{cases} -(x + 3) = -x - 3 & \text{si } x < -3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} -(x - 1) = -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$-|2x + 4| = \begin{cases} -[-(2x + 4)] = 2x + 4 & \text{si } x < -2 \\ -(2x + 4) = -2x - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Efectuamos la suma teniendo en cuenta los puntos donde cambia de signo cada sumando, que son -3 , -2 y 1 :



Sumando en cada tramo, se obtiene:

$$x \in (-\infty, -3) \rightarrow f(x) = -x - 3 - x + 1 + 2x + 4 = 2$$

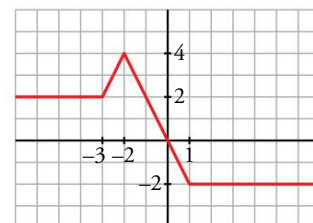
$$x \in [-3, -2) \rightarrow f(x) = x + 3 - x + 1 + 2x + 4 = 2x + 8$$

$$x \in [-2, 1) \rightarrow f(x) = x + 3 - x + 1 - 2x - 4 = -2x$$

$$x \in [1, +\infty) \rightarrow f(x) = x + 3 + x - 1 - 2x - 4 = -2$$

La función que debemos representar es:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ 2x + 8 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



Hazlo tú. Representa la siguiente función:

$$y = |x| - |x - 3| + |x + 1|$$

6. Función logarítmica

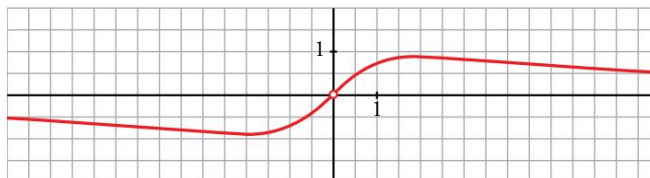
Representar esta función sabiendo que para $x \geq 0$, $f'(x)$ solo se anula en $x = 1,98$:

$$y = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

Hazlo tú. Representa la siguiente función sabiendo que tiene un único máximo en $x = 0$:

$$y = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- La función está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$, en $x = 0$ la gráfica tiene un agujero (discontinuidad evitable).
- Como la función es impar, ya que $f(-x) = -f(x)$, la estudiamos solo para $x \geq 0$.
- Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0 \rightarrow y = 0$. La función va por encima de la asíntota porque es mayor que cero para valores de x mayores que 0.
- $\frac{\ln(1,98^2 + 1)}{1,98} = 0,80$; la función tiene un único máximo en $(1,98; 0,80)$.
- Su representación gráfica, teniendo en cuenta que es impar, es la siguiente:



Ejercicios y problemas resueltos

7. Estudio y gráfica de otras funciones

a) Estudiar y representar: $y = \frac{x}{\ln x}$

a) • Dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

• Comportamiento de la función cerca de $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0. \text{ No tiene asíntota en } x = 0.$$

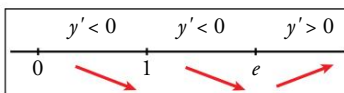
• Asíntota vertical: $x = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

• Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty$

• Tiene rama parabólica: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

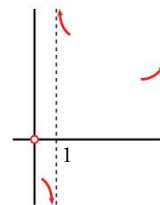
• $y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \rightarrow f(e) = e$

Signo de y' :



Crece en $(e, +\infty)$. Decrece en $(0, 1) \cup (1, e)$.

Mínimo en (e, e) .



b) Estudiar y representar: $y = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$

b) • Dominio: $\mathbb{R}$. No tiene asíntotas verticales.

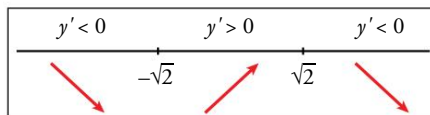
• Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{e^x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{e^x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{xe^x} = -\infty$$

• Tiene asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y rama parabólica cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Estudio de la derivada: $y' = \frac{2 - x^2}{e^x} \rightarrow y' = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$

Signo de y' :

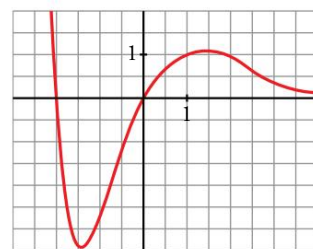


Crece en: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Decrece en: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Mínimo: $\left(-\sqrt{2}, \frac{2 - 2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}}\right)$

Máximo: $\left(\sqrt{2}, \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$



Hazlo tú. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{\ln x^2}$

b) $y = \frac{2x+1}{e^{-x}}$

8. Funciones trigonométricas

a) Representar: $y = \cos 2x - \cos x$

a) Dominio: $\mathbb{R}$. Es continua y derivable. Periodicidad: 2π . Función par.

• Punto de corte con el eje Y : $x = 0$, $y = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Puntos de corte con el eje X : $\cos 2x - \cos x = 0 \rightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -1/2 \end{cases}$

Si $\cos x = 1 \rightarrow x = 0 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Si $\cos x = -1/2 \rightarrow x = (2\pi/3) + 2k\pi$; $x = (4\pi/3) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

• Máximos y mínimos: $y' = -2\sin 2x + \sin x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2(2\sin x \cos x) + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(-4\cos x + 1) = 0 \rightarrow$

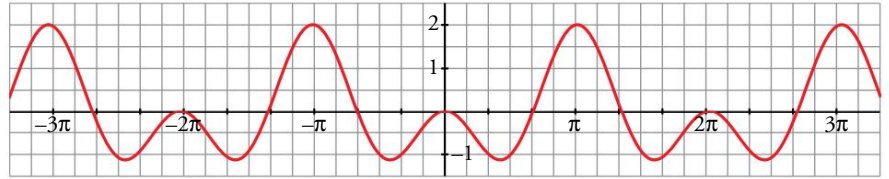
$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = 0 + k\pi \\ -4\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1/4 \rightarrow x \approx 1,32 + 2k\pi; x \approx 4,96 + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Estudiamos el signo de $y'' = -4\cos 2x + \cos x$ en esos puntos:

$y'' < 0$ en $x = 0 + k\pi \rightarrow$ máximos: $(0 + 2k\pi, 0)$, $(\pi + 2k\pi, 2)$ con $k \in \mathbb{Z}$

$y'' > 0$ en $x = 1,32 + 2k\pi$ y en $x = 4,96 + 2k\pi \rightarrow$

$\rightarrow$ mínimos: $(1,32 + 2k\pi; -1,12)$, $(4,96 + 2k\pi; -1,12)$ con $k \in \mathbb{Z}$



b) Representar: $y = \frac{1}{\sin \pi x}$

b) Dominio: $\mathbb{R} - \{k\}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Es continua y derivable. Periodicidad: 2. Impar.

• No corta con los ejes.

• Asíntotas verticales: $x = k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Posición de la curva con respecto a la asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow k^-} y = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow k^+} y = +\infty, \text{ si } k \text{ es par}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} y = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow k^+} y = -\infty, \text{ si } k \text{ es impar}$$

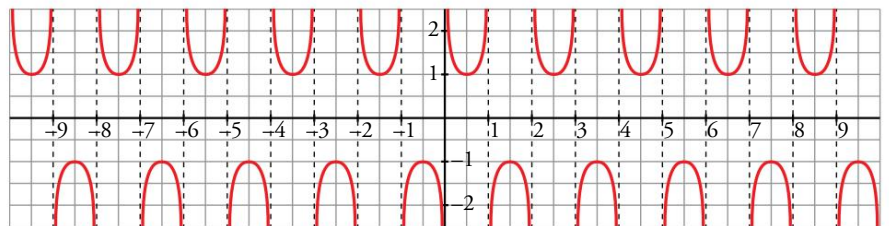
• Máximos y mínimos: $y' = -\frac{\pi \cos \pi x}{(\sin \pi x)^2} = 0 \rightarrow x = 1/2 + k$ con $k \in \mathbb{Z}$

Estudiamos ahora el signo de $y'' = \frac{2\pi^2 \cos^2 \pi x + \pi^2 \sin^2 \pi x}{\sin^3 \pi x}$.

El numerador es siempre positivo. El denominador es positivo para los intervalos $(2k, 1 + 2k)$ y negativo para $(1 + 2k, 2 + 2k)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto:

$y'' > 0$ en $x = 1/2 + 2k \rightarrow$ mínimos: $(1/2 + 2k, 1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$y'' < 0$ en $x = 3/2 + 2k \rightarrow$ máximos: $(3/2 + 2k, -1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.



Hazlo tú. Representa las siguientes funciones:

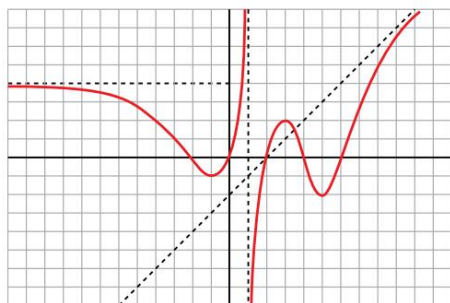
a) $y = 2\sin x + \cos 2x$

b) $y = \frac{1}{\cos \pi x}$

Ejercicios y problemas guiados

1. Descripción de una gráfica

Describir la siguiente gráfica dando los elementos necesarios para que un compañero la pueda representar a partir de la descripción.



- Indica dónde está definida la función y refiérete a su continuidad y su derivabilidad.
- Describe, mediante un límite, la asíntota horizontal, y la posición de la curva con respecto a esta.
- Describe, mediante límites, la asíntota vertical y la posición de la curva tanto a su izquierda como a su derecha.
- Describe la asíntota oblicua mediante límites. Refiere en uno de ellos la posición de la curva respecto a la asíntota.
- Describe la condición por la que se obtienen los puntos singulares. Añade condiciones para saber cuáles son máximos y mínimos.
- Completa la información de los puntos singulares con sus ordenadas.

Solución: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$; derivable en todo su dominio.

Asíntota horizontal para $x \rightarrow -\infty$: $y = 4$. Asíntota vertical: $x = 1$.

Asíntota oblicua para $x \rightarrow +\infty$: $y = x - 2$.

Máximo relativo en $(3, 2)$. Mínimos relativos en $(-1, -1)$ y $(5, -2)$.

Cortes con los ejes en $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(6, 0)$.

2. Representación de una función logarítmica con valor absoluto

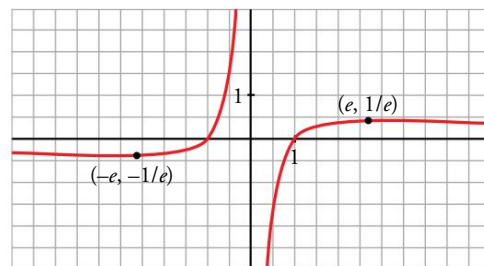
Representar la siguiente función:

$$y = \frac{\ln|x|}{x}$$

Estudia si es simétrica. Indica su dominio de definición y si es derivable en todo él.

Halla los elementos necesarios para su representación: asíntotas, puntos singulares, etc.

Solución:



3. Curva con asíntotas

Representar la siguiente función:

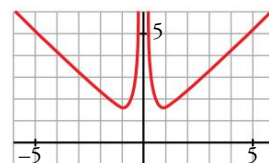
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|}$$

Estudia su simetría y averigua los elementos necesarios para su representación.

Para estudiar las asíntotas, conviene meter la x dentro de la raíz:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|} = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \approx \sqrt{x^2} = |x|$$

Solución:



4. Casi la misma función

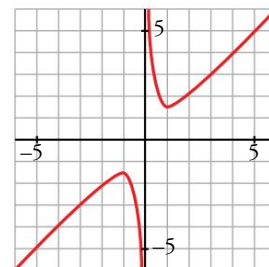
Representar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}$$

Haz lo mismo que en el ejercicio anterior.

Ten en cuenta que como la x en el denominador no tiene valor absoluto, los signos se gestionan de forma distinta.

Solución:



Para practicar

Descripción de una gráfica

- 1 Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(2) = 1, f'(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x, f'(2) = 0$$

- 2 De una función $y = f(x)$ tenemos la siguiente información:

$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0 \quad \text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$$

$$f'(2) = 0, f(2) = -1; f'(-1) = 0, f(-1) = -1$$

Representala.

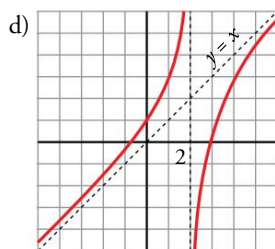
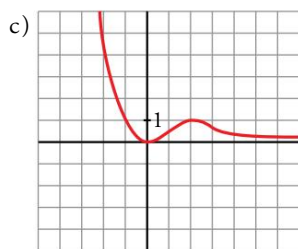
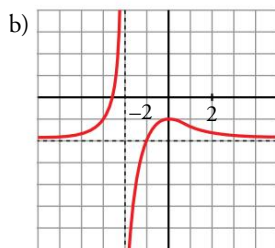
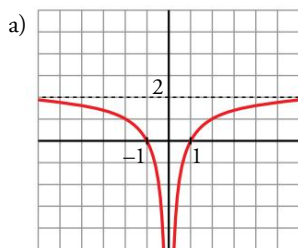
- 3 Dibuja la gráfica de una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ de la que se conocen los siguientes datos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, x = 0, x = 3, x = 4$$

$$f(-2) = 2; f(0) = 0; f(3) = 5; f(4) = 4$$

- 4 Describe las siguientes funciones indicando su dominio, sus simetrías (si las tienen), sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hazlo dando valores de la función, de su derivada y de ciertos límites.



Características de las funciones

- 5 Indica el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{3x-21}}$

c) $y = \ln(4 - \sqrt{x})$

d) $y = \frac{1}{\arccos(x-2)}$

e) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}}$

- 6 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

c) $y = \operatorname{tg} \pi x$

d) $y = e^{|x|}$

e) $y = \frac{|x|}{x^2 - 2x}$

f) $y = 2\cos \frac{x}{2}$

- 7 Determina el periodo de cada una de estas funciones:

a) $y = \operatorname{sen} 3x$

b) $y = \operatorname{sen} 2\pi x$

c) $y = \operatorname{tg} \pi x$

d) $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$

e) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \operatorname{sen} x$

f) $y = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$

- 8 Halla las asíntotas verticales de estas funciones e indica la posición relativa de cada curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $y = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-9}}$

c) $y = \frac{1}{\ln x}$

d) $y = \frac{x(x-1)}{x^2-2x}$

e) $y = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}$

f) $y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$

Funciones polinómicas

- 9 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

e) $y = x^5 - 5x^3$

f) $y = (x-1)^3 - 3x$

g) $y = x^4 - 4x^2$

h) $y = 1 - (x-1)^3$

- 10 Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Representalas gráficamente:

a) $y = 3 + (2-x)^3$

b) $y = 2 - (x-3)^4$

c) $y = (x+1)^6 - 5$

d) $y = 3 - (1-x)^3$

e) $y = x(x-1)(x+3)$

f) $y = (x-2)^2(x+1)x^3$

Ejercicios y problemas propuestos

■ Funciones racionales

11 En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{1}{x^2} & \text{b) } y = \frac{1}{x^2 - 1} & \text{c) } y = \frac{x}{x^2 - 1} \\ \text{d) } y = \frac{x^2 - 1}{x} & \text{e) } y = \frac{x}{x^2 + 1} & \text{f) } y = x + \frac{1}{x^2} \\ \text{g) } y = \frac{x^3}{1 - x^2} & \text{h) } y = \frac{x^3}{(1 - x)^2} & \text{i) } y = \frac{4x^2}{1 + x^4} \end{array}$$

12 Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, ramas infinitas y extremos relativos.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{1}{(x-1)(x-3)} & \text{b) } y = \frac{(x-1)}{x(x-3)(x+4)} \\ \text{c) } y = \frac{8-2x}{x(x-2)} & \text{d) } y = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} \end{array}$$

13 Representa las siguientes funciones racionales:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} & \text{b) } y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \\ \text{c) } y = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} & \text{d) } y = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x^3} \\ \text{e) } y = \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} & \text{f) } y = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x} \end{array}$$

Recuerda que si se simplifica una fracción dividiendo numerador y denominador por $(x - a)$, hay una discontinuidad evitable en $x = a$.

■ Otros tipos de funciones

14 Estudia y representa las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \sqrt[3]{4 - x^2} & \text{b) } y = \sqrt{x^2 - x} \\ \text{c) } y = \sqrt{x^2 - 4x + 5} & \text{d) } y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{array}$$

15 Estudia y representa las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{x}{e^x} & \text{b) } y = \frac{\ln x}{x} \\ \text{c) } y = x \ln x & \text{d) } y = (x-1)e^x \\ \text{e) } y = e^{-x^2} & \text{f) } y = x^2 e^{-x} \\ \text{g) } y = \frac{x^3}{\ln x} & \text{h) } y = \ln(x^2 - 1) \end{array}$$

16 Estudia y representa las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \sin x + \cos x & \text{b) } y = 2\sin x - \cos 2x \\ \text{c) } y = \cos 2x - \cos 4x & \text{d) } y = 3\sin \pi x + 2 \\ \text{e) } y = \sin \pi x - 2 & \text{f) } y = \tan \pi x + \cos 2\pi x \end{array}$$

■ Funciones con valor absoluto y funciones a trozos

17 Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

18 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

19 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Determina los puntos de corte con los ejes y sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.

20 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0]$, estudia si tiene puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, los puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo $\mathbb{R}$.

21 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x + |x + 2| & \text{b) } y = 2x - |x - 3| \\ \text{c) } y = |x| + |x - 3| & \text{d) } y = x|x - 1| \end{array}$$

22 Representa gráficamente cada una de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \frac{1}{|x| - 2} \quad \text{b) } y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$$

23 Considera la función $f(x) = x^2|x - 3|$:

- Halla los puntos donde f no es derivable.
- Calcula sus máximos y mínimos.
- Represéntala gráficamente.

24 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{|x+3|}{1+|x|}$$

25 Representa la función:

$$f(x) = -|x^3 - x^2 + 2|$$

Para resolver

26 Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de estas funciones y, con esa información, relacionalas con sus respectivas gráficas:

a) $y = \frac{1}{\sin x}$

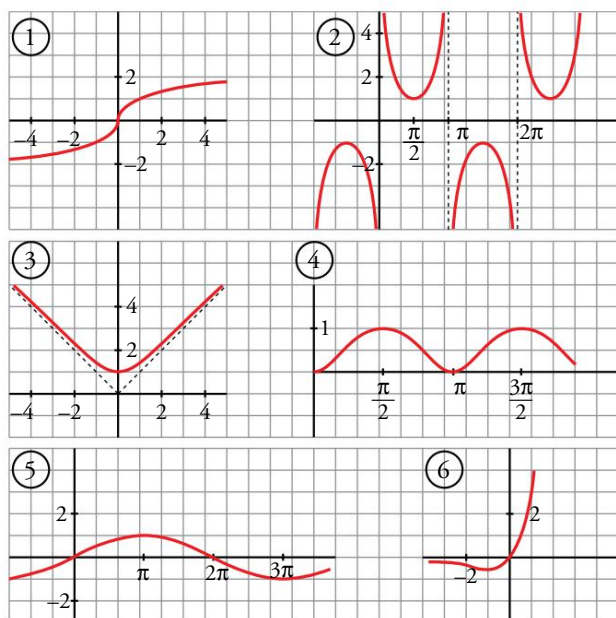
b) $y = x e^x$

c) $y = \sin \frac{x}{2}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = \sin^2 x$



27 Recuerda que el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico se definían así:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de estas funciones y represéntalas gráficamente.

28 Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{3x}$

b) $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

29 Realiza un estudio y representa cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

b) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

c) $y = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)$

d) $y = \frac{e^{|x-1|}}{x^2 + 2x - 3}$

30 La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$$

Halla el valor de k y representa la función así obtenida.

31 Sea la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ con $a \neq 0$.

- Calcula el valor de a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.
- Clasifica los extremos relativos cuando $a = 2$.

32 Dada la función:

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$$

calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b , representa la función.

33 Halla los valores de a , b y c para los cuales la función:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

tiene como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en el punto $(0, 1)$.

34 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

- Determina el valor de a para el que la función posea un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a , obtén los otros extremos relativos.
- Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
- Esboza la gráfica de la función para $a = 1$.

35 Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación $y = \frac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$.

En el punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

- Halla la ecuación de la tangente.
- Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P .
- Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje X .

36 La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función:

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

- Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué t la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración?
- ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

Cuestiones teóricas

37 ¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica con dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que los máximos?

38 Una función $f(x)$ tiene las siguientes características:
 $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$ y es continua y derivable en todo su dominio.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son seguras, cuáles son probables y cuáles son imposibles:

- $f(x)$ es par.
- $f(x)$ es impar.
- No tiene máximos ni mínimos.
- Tiene un máximo y un mínimo.
- Corta al eje X en dos puntos.
- Corta el eje X al menos en dos puntos.
- Tiene, al menos, una asíntota vertical.
- Tiene solo una asíntota vertical.
- Tiene una asíntota oblicua.
- Es cóncava en $x < 0$ y convexa en $x > 0$.

39 ¿Cuántos puntos de inflexión puede tener, como máximo, una función polinómica de cuarto grado?

40 Comprueba que la función $y = \frac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales.

41 Sobre la gráfica de $y = |x^2 - 4|$ indica los intervalos de concavidad y de convexidad. ¿Cuáles son sus puntos de inflexión?

42 $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifícalo.

43 ¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?

44 Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Representala.

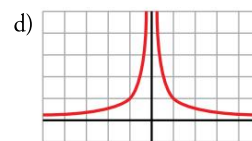
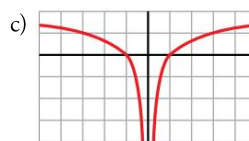
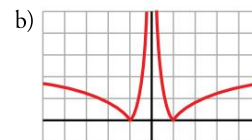
45 Da un ejemplo de una función derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.

46 Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga, al menos, un máximo relativo en $(2, 3)$ y un mínimo relativo en $(3, 4)$. Si la función fuera polinómica, ¿cuál debería ser, como mínimo su grado?

47 ¿Tiene $f(x) = x + e^{-x}$ alguna asíntota? Si es así, hállala.

48 ¿Son iguales las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{|x|}$? Justifica tu respuesta.

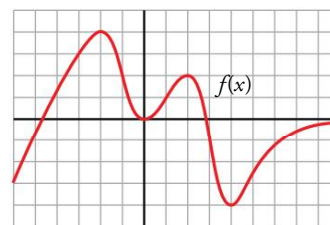
49 Indica cuál de estas gráficas corresponde a $y = \ln |x|$ y cuál a $y = |\ln x|$. ¿Cuál es la ecuación de cada una de las otras dos?



50 ¿Qué tipo de simetría tienen las siguientes funciones?

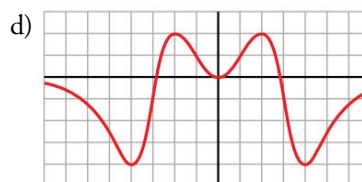
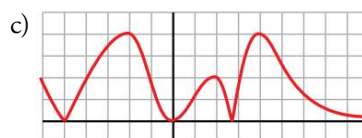
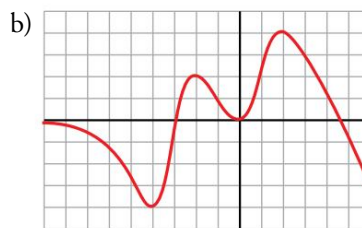
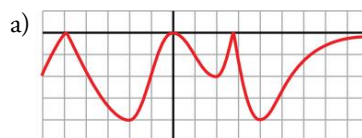
a) $y = \sin^2 x$ b) $y = |x| - 2$ c) $y = \tan x$ d) $y = x^3 - x$

51 Dada la función $f(x)$:

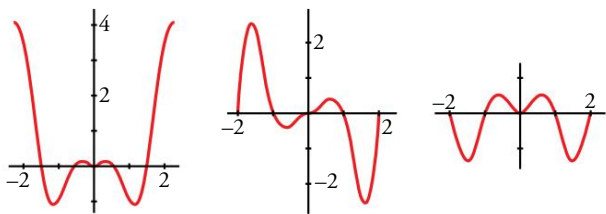


Indica qué gráfica corresponde a estas otras:

$f(-x)$ $f(|x|)$ $-|f(x)|$ $|f(x)|$



52 Relaciona cada gráfica con su función.



$f(x) = x \operatorname{sen}(\pi x)$ $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(\pi x)$ $h(x) = x^2 \cos(\pi x)$

Para profundizar

53 En el *Ejercicio resuelto 1* del apartado 10.5, vimos un sencillo procedimiento para calcular las asíntotas de la función $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ mediante los pasos siguientes:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx |x-1|$$

Averigua, de forma similar, las asíntotas de estas funciones:

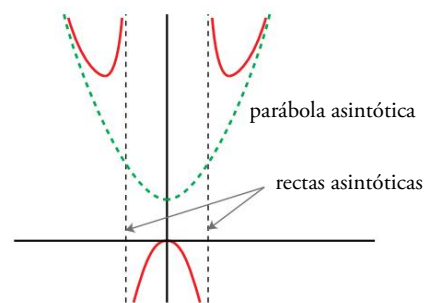
a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$

c) $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ d) $y = \sqrt{4x^2 - x + 3}$

Indica la posición de cada curva respecto de las asíntotas.

54 Aunque la palabra *asíntota* la hemos aplicado a rectas que se aproximan a una gráfica, tiene un significado más amplio: se dice que dos curvas son **asintóticas** cuando, al alejarse del origen, la distancia entre ellas tiende a cero.

Por ejemplo, la parábola $y = x^2 + 1$ es asíntota a la función $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ (revisa su gráfica en la página 310).



a) Halla la parábola asíntota a $y = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x}$. Determina la posición de la curva respecto de ella.

b) Representa la función utilizando esos datos, así como la asíntota vertical y el punto singular (único, en $x = 2$).

55 Estudia la posición relativa entre estas curvas y sus parábolas asíntotas. Representa la información obtenida:

a) $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$ b) $y = \frac{x^3 - 1}{x}$ c) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

Autoevaluación

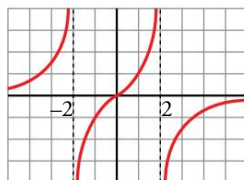
En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1 Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$f(-5) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f(-5) = 0; \quad f(0) = 2$$

2 Describe la gráfica de la siguiente función:



3 ¿Tiene $f(x) = x^3 + 2x + 4$ máximos y/o mínimos? ¿Y algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

4 Estudia las asíntotas y los puntos singulares de la función $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$ y represéntala gráficamente.

5 Representa la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$.

6 Calcula los puntos de corte con los ejes y los puntos singulares de la función $y = \ln(-x^2 + 1)$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y esboza la gráfica.

7 Dibuja una función continua en $\mathbb{R}$ que tenga un mínimo relativo en $(1, 6)$ y un máximo relativo en $(6, 2)$. Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?

8 Halla los máximos y los mínimos de $f(x) = x\sqrt{x+3}$. Indica si tiene asíntotas y represéntala gráficamente.

9 Dibuja la gráfica de $f(x) = |x+3| + |x-1|$.

10 Estudia estas funciones y represéntalas gráficamente:

a) $y = \operatorname{sen} 2x + 2\cos x$ b) $y = 2\operatorname{sen} \pi x + \cos 2\pi x$