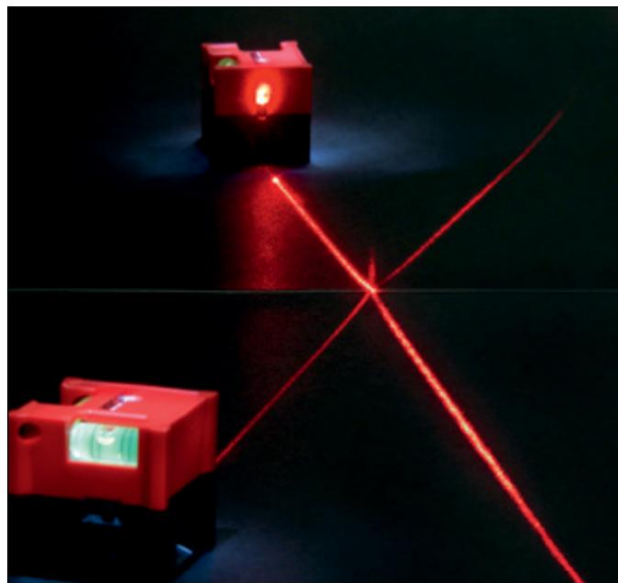


9 Aplicaciones de las derivadas

Buscando la optimización

La obtención de la tangente a una curva en uno de sus puntos y el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil son problemas históricos que dieron lugar, en su momento, a la noción de derivada. Sin embargo, fueron los problemas de optimización los que aportaron mayor impulso a la búsqueda de una teoría que diera generalidad a todos los problemas particulares que se habían planteado.

La ciencia, la técnica, las propias matemáticas e, incluso, la vida cotidiana están plagadas de problemas de optimización (máximos y mínimos). Numerosas cuestiones importantes se plantean de este modo: “qué es lo óptimo en tales circunstancias”. Muchos de los problemas de máximos y mínimos ya fueron abordados por los griegos, como, por ejemplo, el camino que recorre la luz para llegar de un punto a otro mediante reflexión (**Herón**, siglo I d. C.). Antes de la invención del cálculo diferencial, cada uno de tales problemas se abordaba mediante un procedimiento específico, no generalizable a los demás. Actualmente muchos de esos problemas son simples aplicaciones de las derivadas.



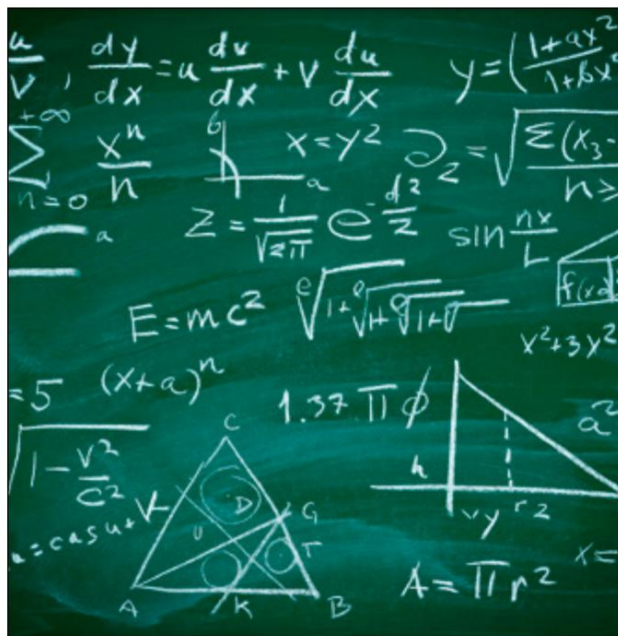
Herón comprobó que la luz sigue la trayectoria más corta.

Una buena notación

Tener una buena notación para designar simbólicamente de forma adecuada los conceptos matemáticos es enormemente importante. **Newton** anotaba con un punto encima, $\dot{y}$, la derivada de la función, lo cual dice muy poco sobre lo que es la derivada. **Leibniz** en cambio ideó la notación $\frac{dy}{dx}$, que representa muy adecuadamente su significado.

A comienzos del siglo XVIII se originó una vehemente disputa entre las islas británicas y el continente sobre si había sido Leibniz (continental) o Newton (inglés) el primero que había inventado el cálculo infinitesimal. Tanto se agriaron los ánimos que los matemáticos británicos se aferraron durante todo el siglo XVIII no solo a las enseñanzas de Newton, sino también a su notación poco afortunada. Se dice que la consecuencia de este empecinamiento fue un atraso de 50 años para la matemática británica.

El gran maestro de la buena notación fue **Euler**. A él se debe casi toda la que hoy usamos en nuestra matemática. Él fue quien introdujo π (inicial de *periferia* en griego), él también introdujo e (probablemente por ser inicial de *Einheit*, “unidad” en alemán; e es el número cuyo logaritmo natural es la unidad). Fue Euler quien consagró la notación de Leibniz para la derivada y la integral y otras muchas que quedaron avaladas por su autoridad y por su adecuación con lo que querían representar.



Una notación adecuada favorece el desarrollo e intercambio de ideas.

Johann Bernoulli y el Marqués de L'Hôpital

El padre de los hermanos **Bernoulli, Jakob y Johann**, creía saber bien lo que les iba a cada uno de sus hijos: a Jakob, la teología, y a Johann, la medicina. La verdad es que no acertó con ninguno. Por ahí los encauzó y por esos caminos comenzaron cada uno en la Universidad de Basilea, Suiza. Pero la atracción de la matemática fue tal que, después de terminados los estudios prescritos por su padre, esta les absorbió completamente y en ella descollaron extraordinariamente.

En 1692, en un viaje que Johann hizo a París, conoció a un joven marqués, **G.F.A. de L'Hôpital**, entusiasmado con el nuevo cálculo infinitesimal. Este, aparte de recibir lecciones de Bernoulli, firmó con él un contrato por el que Johann, de vuelta a Basilea, a cambio de un sueldo regular, se comprometía a comunicar al marqués sus descubrimientos y este podría hacer de ellos el uso que le pareciera.

Con las ideas y descubrimientos de Johann Bernoulli, L'Hôpital escribió en 1696 un magnífico libro, *Análisis de los infinitésimos*, que tuvo un éxito extraordinario durante todo el siglo XVIII y le ha hecho pasar a la historia. Este nunca pretendió hacerse con la paternidad de los resultados que publicaba en él, sino que siempre reconoció claramente el mérito a Bernoulli.

La regla de L'Hôpital, que ya conoces como eficaz herramienta para el cálculo de límites y cuya validez se demostrará en esta unidad, es uno de los descubrimientos de Johann Bernoulli que se le atribuyen injustamente al marqués.

Al morir L'Hôpital, Johann Bernoulli reclamó para sí el mérito de aquella regla. Nadie le creyó. Más adelante el descubrimiento de la correspondencia entre Bernoulli y el marqués ha puesto las cosas en su lugar.



Johann Bernoulli (1667-1748).

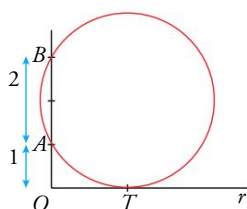
Resuelve

Optimización

- Una persona se acerca a una estatua de 2 m de altura. Los ojos de la persona están 1 m por debajo de los pies de la estatua. ¿A qué distancia se debe acercar para que el ángulo, φ , bajo el cual ve la estatua sea máximo?

Hay una hermosa resolución por métodos geométricos. Obsérvala:

Se traza una circunferencia que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta r .



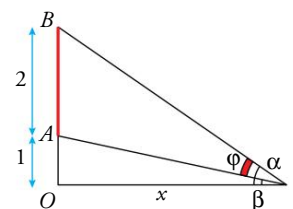
Demuestra que el punto de tangencia, T , es el lugar de la recta r desde el que se ve el segmento AB con ángulo máximo.

La longitud del segmento OT se halla teniendo en cuenta que la potencia del punto O respecto a la circunferencia es igual a $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ y también es igual a $\overline{OT}^2$.

Por tanto, $\overline{OT} = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} = \sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3} \approx 1,73$ m.

¡ATENCIÓN! Este problema lo puedes resolver, también, relacionando el ángulo φ con los ángulos α y β cuyas tangentes trigonométricas podemos expresar en función de x .

Obtendrás una función que debes hacer máxima (en la página 276 se resuelve este problema siguiendo este camino).



1 Recta tangente a una curva

Recuerda

Si la recta tangente es “vertical” (perpendicular al eje X), la derivada en ese punto no existe.

La obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos es la aplicación más inmediata de las derivadas, que ya conoces desde el curso pasado y que hemos utilizado en la unidad anterior. Pero relacionados con este hay otros casos menos triviales. Véamoslos:

Caso elemental

Hallar la tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = x_0$.

Ordenada del punto: $f(x_0)$; pendiente de la recta: $m = f'(x_0)$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Por ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 3}$ en $x_0 = 3$.

$$\text{Cálculo de la ordenada: } f(x_0) = f(3) = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{3 + 3} = \frac{1}{2}$$

La curva pasa por $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Pendiente: } f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + 3) - (x^2 - 2x)}{(x + 3)^2}; f'(3) = \frac{4 \cdot 6 - 3}{6^2} = \frac{7}{12}$$

La ecuación de la recta tangente en $x_0 = 3$ es: $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{12}(x - 3)$

Cuando la función se da implícitamente: $\phi(x, y) = 0$

La función $y(x)$ viene dada implícitamente. Nos pueden dar las coordenadas del punto (x_0, y_0) , o bien solo la abscisa. En este caso la ordenada se obtiene resolviendo la ecuación $\phi(x_0, y) = 0$.

La expresión de $y'(x, y)$ o, mejor, el valor de $y'(x_0, y_0)$ se obtiene mediante la derivación implícita en $\phi(x, y) = 0$.

Ejemplo:

Hallar las tangentes a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en los puntos de abscisa $x_0 = 4$.

Obtención de las ordenadas correspondientes:

$$\frac{16}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \rightarrow y_0^2 = 16 \left(1 - \frac{16}{25}\right) = \frac{144}{25} \rightarrow y_0 = \pm \frac{12}{5}$$

Para hallar la pendiente en esos puntos, derivamos implícitamente:

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y y'}{16} = 0 \rightarrow y' = -\frac{16x}{25y}$$

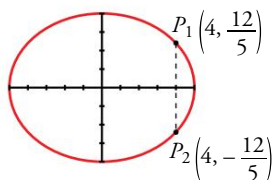
$$\text{RECTA TANGENTE EN } P_1: \text{Pendiente: } y' \left(4, \frac{12}{5}\right) = -\frac{16 \cdot 4}{25 \cdot (12/5)} = -\frac{16}{15}$$

$$y = \frac{12}{5} - \frac{16}{15}(x - 4)$$

$$\text{RECTA TANGENTE EN } P_2: \text{Pendiente: } y' \left(4, -\frac{12}{5}\right) = -\frac{16 \cdot 4}{25 \cdot (-12/5)} = \frac{16}{15}$$

$$y = -\frac{12}{5} + \frac{16}{15}(x - 4)$$

En el apartado 8.5 de la unidad anterior vimos algunos ejemplos de este caso.



■ Tangente a una curva $y = f(x)$ conociendo su pendiente

Conocemos la pendiente, m , de las rectas tangentes buscadas pero no sabemos cuáles son los puntos de tangencia. Las abscisas de estos se obtienen resolviendo la ecuación $f'(x) = m$.

Por ejemplo:

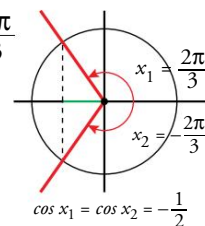
Hallar las rectas tangentes a $y = \sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$ paralelas a la recta $x + 2y = 0$.

Pendiente de la recta: $y = -\frac{1}{2}x \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

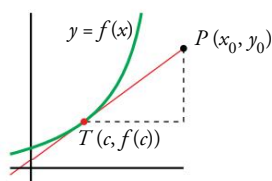
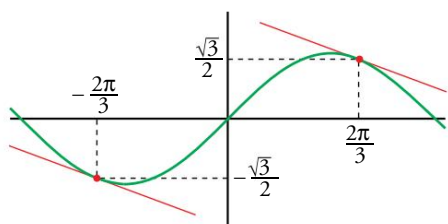
Resolvemos $f'(x) = -\frac{1}{2}$: $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{2\pi}{3}, x_2 = -\frac{2\pi}{3}$

Puntos de tangencia: $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Rectas tangentes:
$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$



■ Tangente a una curva desde un punto exterior

Conocemos el punto, $P(x_0, y_0)$. Desconocemos el punto de tangencia, $T(c, f(c))$.

La pendiente del segmento PT es $\frac{y_0 - f(c)}{x_0 - c}$ y coincide con $f'(c)$.

Se igualan y se resuelve la ecuación. Las soluciones son las abscisas de los puntos de tangencia.

Por ejemplo:

Hallar las rectas tangentes a $y = x^2 - 5x + 3$ que pasan por el punto $P(2, -7)$.

- El punto T de tangencia es de la curva. Sus coordenadas son $(c, c^2 - 5c + 3)$.
- La pendiente de la recta PT debe ser igual a la derivada de f en c :

$$\frac{f(c) - y_0}{c - x_0} = f'(c) \rightarrow \frac{c^2 - 5c + 3 - (-7)}{c - 2} = 2c - 5 \quad (\text{pues } f'(x) = 2x - 5)$$

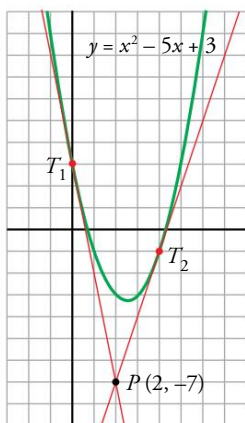
$$\rightarrow c^2 - 5c + 10 = (c - 2)(2c - 5) \rightarrow c^2 - 4c = 0 \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 4$$

- Hay dos rectas tangentes:

$$c_1 = 0, f(c_1) = 3, f'(c_1) = -5 \rightarrow y = 3 - 5(x - 0) \rightarrow y = -5x + 3$$

$$c_2 = 4, f(c_2) = -1, f'(c_2) = 3 \rightarrow y = -1 + 3(x - 4) \rightarrow y = 3x - 13$$

Los puntos de tangencia son $T_1(0, 3)$ y $T_2(4, -1)$.



Ejercicios propuestos

1 Halla las rectas tangentes a cada curva que cumplen la condición que se indica:

a) $y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$

en los puntos de abscisa 0, 1, 3.

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

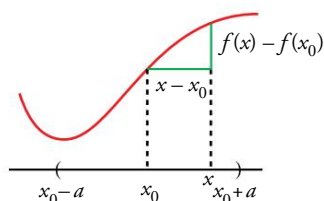
c) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 6$

paralelas a la recta $y - x = 9$

d) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2$

que pasan por el punto $P(2, 0)$.

2 Crecimiento y decrecimiento de una función en un punto



La idea gráfica de función creciente o decreciente en un punto es muy clara. Vamos a dar una definición que permita operar con ella:

f es **creciente** en x_0 si existe un entorno de x_0 , $E = (x_0 - a, x_0 + a)$ tal que, si $x \in E$, $x \neq x_0$, entonces:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{Esto significa:} \quad \begin{cases} \text{si } x > x_0, \text{ entonces } f(x) > f(x_0) \\ \text{si } x < x_0, \text{ entonces } f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Análogamente, si f es **decreciente**, el cociente es negativo.

Relación del crecimiento con el signo de la derivada

$$f(x) \text{ derivable y creciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$$f(x) \text{ derivable y decreciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

Demostración

$$f \text{ creciente en } x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ para todo } x \text{ de un entorno } E \text{ de } x_0.$$

Por tanto, $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, pues el límite de una función que toma valores positivos es positivo o nulo.

Análogamente, se demostraría que si f es decreciente en x_0 , $f'(x_0) \leq 0$.

Criterio de crecimiento en x_0 a partir del signo de $f'(x_0)$

Cuando se pretende representar una función a partir de su expresión analítica, resulta útil el siguiente criterio que permite inferir si una función es creciente o decreciente a partir del signo de su derivada:

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x_0$$

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } x_0$$

La demostración de estas implicaciones se verá en la página 283.

Por ejemplo, averigüemos dónde es creciente y dónde es decreciente la función $y = x^3 - 6x^2 + 5$, cuya derivada es $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$:

$$\begin{cases} x < 0 & \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente} & (-\infty, 0) \text{ CRECIENTE} \\ 0 < x < 4 & \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es decreciente} & (0, 4) \text{ DECRECIENTE} \\ 4 < x & \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente} & (4, +\infty) \text{ CRECIENTE} \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

1 Demuestra que si una función $y = f(x)$ es decreciente en x_0 , entonces:

$$f'(x_0) \leq 0$$

2 Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:

- ¿Dónde crece?
- ¿Dónde decrece?

En la web



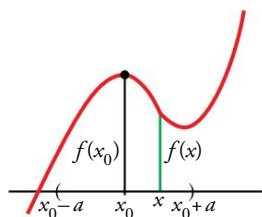
Gráfica interactiva para analizar la primera derivada y el crecimiento de una función.

En la web



Ejercicios para estudiar localmente una función usando su derivada primera.

3 Máximos y mínimos relativos de una función



La idea de máximo relativo en un punto es que la función, en ese punto, vale más que en los puntos que lo rodean. Veamos una definición más operativa:

f tiene un **máximo relativo** en el punto de abscisa x_0 si existe un entorno de x_0 , $E = (x_0 - a, x_0 + a)$, tal que si $x \in E$, $x \neq x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$. Es decir, es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha.

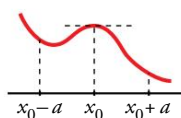
Análogamente se define **mínimo relativo**.

En los máximos y mínimos, la derivada es 0

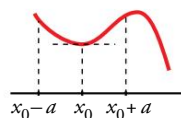
Si $f(x)$ es derivable en x_0 y tiene un máximo o un mínimo en él, entonces $f'(x_0) = 0$. Es decir:

$$f(x) \text{ máximo o mínimo en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

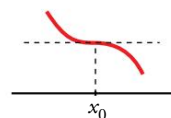
Sin embargo, puede ocurrir que $f'(x_0) = 0$ y que no haya ni máximo ni mínimo en x_0 .



MÁXIMO RELATIVO



MÍNIMO RELATIVO



NO HAY MÁXIMO NI MÍNIMO. ES UN PUNTO DE INFLEXIÓN

Puntos singulares

Los puntos de tangente horizontal, es decir, aquellos donde $f'(x) = 0$, se llaman **puntos singulares** o **puntos críticos**.

Un punto singular puede ser:

máximo	f pasa de crecer a decrecer
mínimo	f pasa de decrecer a crecer
punto de inflexión	no hay cambio en el crecimiento

Demostración

Si f tiene un máximo en x_0 , $f(x) - f(x_0) < 0$ cualquiera que sea $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$:

$$\left. \begin{aligned} x < x_0 &\Rightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow f'(x_0^-) \geq 0 \\ x > x_0 &\Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow f'(x_0^+) \leq 0 \end{aligned} \right\}$$

Como f es derivable en x_0 , será: $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

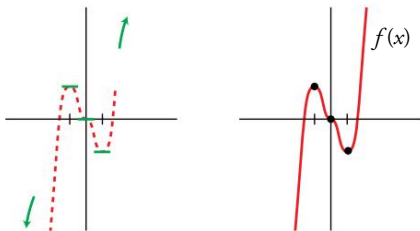
Ejemplo: veamos los máximos y mínimos de la función $y = 3x^5 - 5x^3$.

Su derivada, $f'(x) = 15(x^4 - x^2) = 15(x - 1)x^2(x + 1)$ se anula en $-1, 0$ y 1 . ¿Cómo saber si hay máximo o mínimo en cada uno de ellos?

— Estudiando el signo de la derivada a su derecha y a su izquierda. Por ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} f'(0,99) < 0, \text{ es decreciente a la izquierda de } 1 \\ f'(1,01) > 0, \text{ es creciente a la derecha de } 1 \end{aligned} \right\} \text{ Hay un mínimo en } x = 1.$$

— O bien, representando los tres puntos así como las ramas infinitas. Como la función es derivable y, por tanto, continua en $\mathbb{R}$, al unir los puntos se aprecia cómo se comporta la función en cada uno de ellos.



Ejercicios propuestos

- Comprueba que la función $y = x^3/(x - 2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.
Averigua de qué tipo es cada uno de estos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

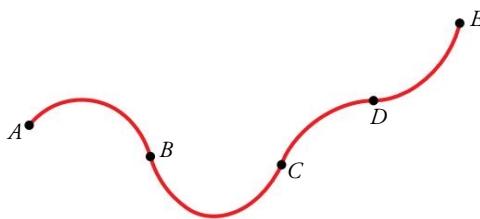
- a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.
b) Haz lo mismo para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

En la web Ejercicios de refuerzo de identificación de extremos relativos.

4 Información extraída de la segunda derivada

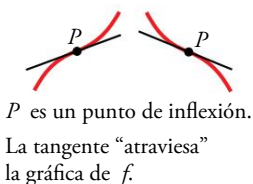
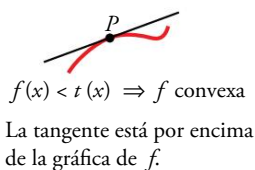
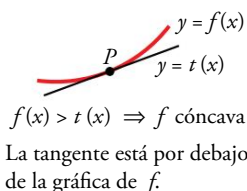
Concavidad, convexidad y punto de inflexión

Observemos la siguiente gráfica:



Mirándola desde arriba, ¿no es razonable que llamemos **cóncavos** a los tramos BC y DE y **convexos** a los tramos AB y CD ? Los puntos B , C , D , en los que la curvatura pasa de cóncava a convexa, o viceversa, son los **puntos de inflexión**.

La mejor forma de caracterizar matemáticamente el tipo de curvatura (concavidad, convexidad o inflexión) es comparar la curva con su tangente, como vamos a hacer a continuación.



Tenemos una curva $y = f(x)$. Trazamos la recta tangente a ella en un punto P , cuya ecuación es $y = t(x)$. Entonces:

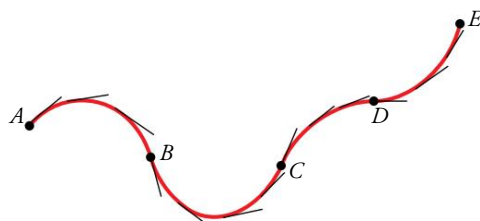
Si en las cercanías de P es $f(x) > t(x)$, la curva es **cóncava** en P .

Si en las cercanías de P es $f(x) < t(x)$, la curva es **convexa** en P .

Si la tangente atraviesa la curva en P , es decir, si a la izquierda de P es $f(x) < t(x)$, y a la derecha $f(x) > t(x)$, o viceversa, P es un **punto de inflexión**.

Relación de la curvatura con la segunda derivada

Observa esta gráfica:



Fíjate que en el tramo AB las cuatro tangentes que hay representadas tienen su pendiente cada vez menor. Por tanto, la derivada de f es decreciente en ese intervalo. Lo mismo le ocurre al tramo CD .

Y lo contrario ocurre en los tramos BC y DE : la pendiente de las tangentes aumenta y, por tanto, f' es creciente. En general:

Si f tiene segunda derivada en x_0 , se cumple que:

f **cóncava** en $x_0 \Rightarrow f'$ es **creciente** en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

f **convexa** en $x_0 \Rightarrow f'$ es **decreciente** en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

f tiene un **punto de inflexión** en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

En la web



Gráfica interactiva para analizar la segunda derivada y la curvatura de una función.

Ten en cuenta

Estas implicaciones sirven para extraer conclusiones sobre el comportamiento de la segunda derivada, f'' , a partir de la forma de la curva.

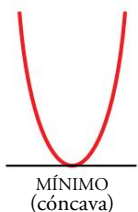
■ Criterio para detectar el tipo de curvatura

Puesto que lo que suele interesarnos es obtener información sobre la forma de la curva a partir de su expresión analítica, veamos cómo son las implicaciones de sentido opuesto a las que acabamos de ver:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es } \textbf{cóncava} \text{ en } x_0$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es } \textbf{convexa} \text{ en } x_0$$

$$f''(x_0) = 0 \text{ y } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f \text{ tiene un } \textbf{punto de inflexión} \text{ en } x_0$$



■ Aplicación a la definición de máximos y mínimos

Si $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x_0)$, entonces:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un } \textbf{mínimo relativo} \text{ en } x_0$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un } \textbf{máximo relativo} \text{ en } x_0$$

(La demostración se verá en la página 283).

Ejercicio resuelto

- 1 Estudiar la curvatura de la función:
 $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Hallamos la derivada segunda de la función:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

Buscamos los valores que anulan la derivada segunda:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = 2$$

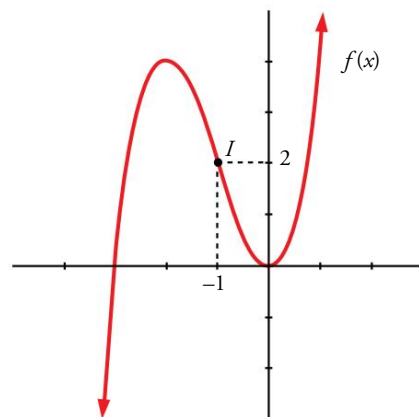
Como $f'''(x) = 6 \neq 0$, el punto $I(-1, 2)$ es un punto de inflexión.

$$\bullet f''(x) = 6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Desde $-\infty$ hasta -1 , la curva es **convexa**, pues $f''(x) < 0$.

$$\bullet f''(x) = 6x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

Desde -1 hasta $+\infty$, la curva es **cóncava**, pues $f''(x) > 0$.



En la web

Ejercicios de **refuerzo**: aplicaciones de la segunda derivada.

Ejercicios propuestos

- 1 Estudia la curvatura de esta función:

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

- 2 Estudia la curvatura de la función siguiente:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$



En la web



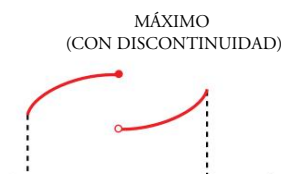
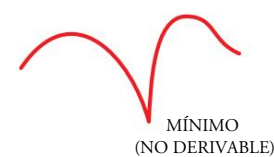
Ejercicios para estudiar localmente una función usando sus derivadas primera y segunda.

5 Optimización de funciones

La importancia de optimizar

Hacer máximo un volumen, una población, unos beneficios, hacer mínimos unos costes de producción o un área son ejemplos de optimización de funciones con los que ingenieros, arquitectos, economistas, ... tienen que tratar habitualmente.

La dificultad de estos problemas, normalmente, no estriba en optimizar una función dada por una expresión analítica, sino en encontrar la expresión analítica de la función a optimizar.



Para familiarizarnos con la resolución de este tipo de problemas, tendremos que:

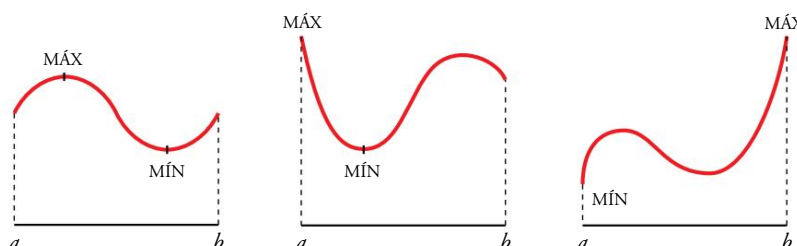
- Aprender la técnica de hallar, de la forma más eficaz posible, los extremos de una función que viene dada mediante su expresión analítica.
- Ejercitarnos en expresar analíticamente funciones que se describen mediante un enunciado.

Empecemos dando unas orientaciones muy concretas para lo primero y, a continuación, propondremos una serie de ejemplos como entrenamiento para lo segundo.

■ Cálculo de los extremos de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$

En los problemas de optimización, lo que interesa no son los extremos relativos de la función sino los absolutos. Veamos algunas reglas para obtenerlos:

- a) Si $f(x)$ es derivable en $[a, b]$, los máximos y los mínimos absolutos están entre los puntos singulares y los correspondientes a los extremos del intervalo:



Por tanto, para hallarlos:

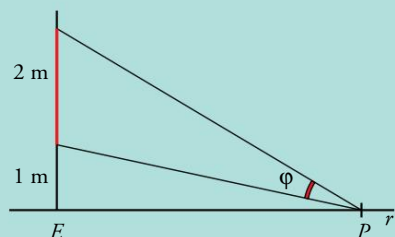
- Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.
- Se seleccionan las soluciones $x_1, x_2, x_3, \dots$ que están entre a y b .
- Se calcula $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots$ y $f(b)$.

Con estos valores se verá cuál es el máximo y cuál el mínimo.

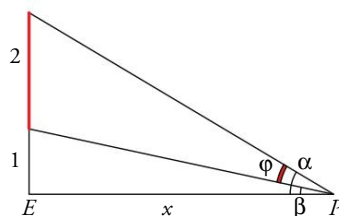
- b) Si hay algún punto de $[a, b]$ en el que la función no sea derivable, aunque sí continua, calcularemos el valor de f en ese punto, pues podría ser un extremo.
- c) Si f no es continua en algún punto x_0 de $[a, b]$, estudiaremos el comportamiento de la función en las cercanías de x_0 .

Ejercicios resueltos

- 1 En la segunda página de la unidad se proponía un problema como este:



Si el punto P se desliza a lo largo de la semirrecta r , ¿en qué posición se consigue que el ángulo φ sea máximo?



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{x}, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} =$$

$$= \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

φ es máximo cuando lo es su tangente.

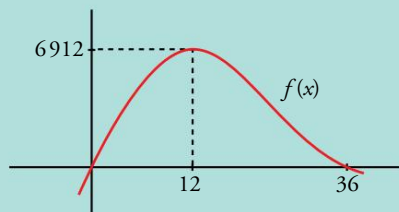
$$\text{Hemos de hallar el máximo de } \operatorname{tg} \varphi = f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}; f'(x) = \frac{-2x^2 + 6}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}. \text{ Solo vale la solución positiva.}$$

Por tanto, para que φ sea máximo, el punto P ha de estar a $\sqrt{3} = 1,73$ m del punto E .

Ejercicios resueltos

- 2 Descomponer el número 36 en dos sumandos positivos de modo que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.



$$\left. \begin{array}{l} 1.^{\text{er}} \text{ sumando: } x, x > 0 \\ 2.^{\text{o}} \text{ sumando: } 36 - x, x < 36 \end{array} \right\}$$

Ha de ser máximo el valor de la siguiente función:

$$f(x) = x(36 - x)^2, \quad 0 < x < 36$$

Empezamos averiguando dónde se anula su derivada:

$$f(x) = x^3 - 72x^2 + 1296x \quad f'(x) = 3x^2 - 144x + 1296$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{144 \pm \sqrt{144^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1296}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} 12 \\ 36 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

(36 no vale porque está fuera del dominio de definición de f).

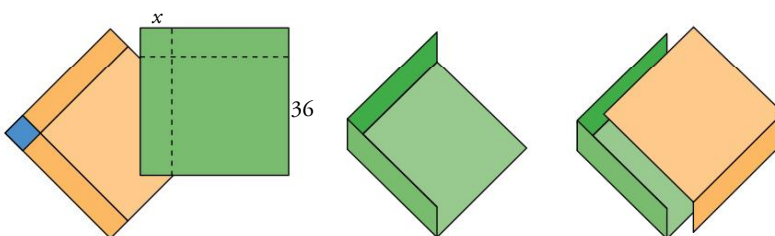
En este caso, el intervalo de definición es $(0, 36)$, es decir, es abierto; por tanto, no hace falta estudiar el comportamiento de f en sus extremos aunque fácilmente puedes comprobar que se corresponden con el producto 0, es decir, $f(0) = f(36) = 0$.

Por tanto, el valor máximo se obtiene para $x = 12$, $f(12) = 6912$.

Solución: el primer sumando es 12, y el segundo, 24.

- 3 Con dos piezas cuadradas de 36 cm de lado hacemos la operación que aparece a la derecha.

¿Cuánto debe valer x , el lado del cuadradito que recortamos, para que el volumen de la caja resultante sea máximo?



Las dimensiones de la caja serán:

$$x, 36 - x, 36 - x$$

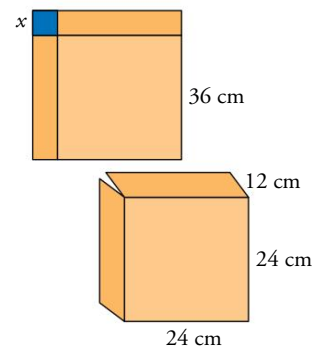
Por tanto, el volumen será:

$$V(x) = x(36 - x)^2, \quad 0 < x < 36$$

Es decir, la función que hemos de optimizar es la misma del ejemplo anterior.

El lado del cuadradito será de 12 cm.

En tal caso, el volumen de la caja será de 6912 cm^3 .



En la web

Ejercicios de **refuerzo** sobre optimización de funciones.

Ejercicios propuestos

- Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.
- De entre todos los triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitudes que suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.
- Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?
- Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.



En la web



Problemas para optimizar funciones aplicando las derivadas.

6 Dos importantes teoremas

Lo que dicen estos teoremas es muy sencillo y natural. Con ellos se simplifican notablemente las demostraciones de varios resultados que hemos enunciado y utilizado, sin demostrar, en los primeros apartados de esta unidad. Recordemos dos de ellos:

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x_0$$

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x_0$$

Como verás, el primero de los dos teoremas que enunciaremos a continuación es un caso particular del segundo, pero resulta básico para su demostración.

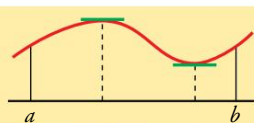
Teorema de Rolle

La idea del teorema de Rolle es que una curva continua y sin puntos angulosos que toma los mismos valores en los extremos de un intervalo necesariamente tiene algún punto con tangente horizontal.

En la web



Comprobación interactiva del teorema de Rolle.



f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) .

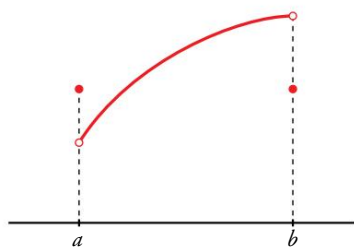
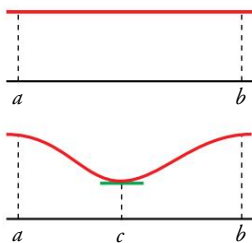
Si $f(a) = f(b)$, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

HIPÓTESIS		TESIS
f continua en $[a, b]$ f derivable en (a, b) $f(a) = f(b)$	$\Rightarrow$	Existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Puesto que f es continua en $[a, b]$, alcanza en dicho intervalo un valor máximo y un valor mínimo (teorema de Weierstrass, unidad 7). Distingamos dos casos:

- El máximo y el mínimo están uno en a y otro en b . Como $f(a) = f(b)$, el máximo y el mínimo coinciden. La función es constante en todo el intervalo y su derivada es cero no solo en algún punto, sino en todos.
- f alcanza el máximo o el mínimo en un punto c distinto de los extremos del intervalo. Como f es derivable en c , se cumple que $f'(c) = 0$.

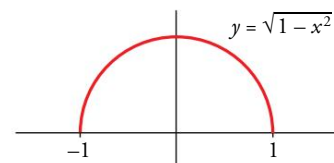


$f(a) = f(b)$ pero no existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ porque f no es continua en $[a, b]$.

Observaciones

- La condición “ f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) ” puede resultar chocante. ¿Por qué no poner, simplemente, derivable en $[a, b]$, con lo cual exigiríamos la existencia de derivadas laterales? Porque hay funciones con tangente vertical y, por tanto, no derivables en alguno de los extremos que quedarían injustamente separadas de los beneficios de este teorema.

Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, continua en $[-1, 1]$, derivable en $(-1, 1)$ pero no derivable en $[-1, 1]$. Fíjate en que $f(1) = f(-1) = 0$ y que $f'(0) = 0$.



- ¿Y por qué no exigimos, simplemente, que “ f sea derivable en (a, b) ”? Pues porque si no exigiríamos que f sea continua en los extremos del intervalo se nos “colarían” funciones como la del margen, que, evidentemente, no es buena candidata para pretender que cumpla la tesis.

En definitiva: es necesario exigir la continuidad en $[a, b]$, y es conveniente conformarse con la derivabilidad en (a, b) .

Ejercicios resueltos

1 Comprobar que la función:

$$y = x^3 - 4x + 3$$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$. ¿En qué punto cumple la tesis?

La función es derivable y, por tanto, continua en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = f(2) = 3$. Cumple las hipótesis. Por tanto, cumplirá la tesis; es decir, tendrá un punto de derivada nula entre 0 y 2.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Efectivamente, $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,15 \in (0, 2)$ y $f'(c) = 0$.

2 Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación $x^4 - 8x^2 + k = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[0, 2]$, cualquiera que sea el valor de k .

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo: supondremos que tiene dos raíces, r y s , en el intervalo $[0, 2]$ y llegaremos a una contradicción.

Si r y s son raíces de la ecuación, $0 \leq r < s \leq 2$, entonces $P(x) = x^4 - 8x^2 + k$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[r, s]$, pues por ser polinómica es derivable, y por tanto continua, y además $P(r) = P(s) = 0$.

Se cumple, pues, la tesis: hay un número $c \in (r, s)$ para el cual $P'(c) = 0$. Como $c \in (r, s)$, entonces $0 < c < 2$.

Pero $P'(x) = 4x^3 - 16x$ solo tiene tres raíces: $-2, 0, 2$, ninguna de ellas está contenida en el intervalo $(0, 2)$. Llegamos, pues, a una contradicción. Conclusión: la ecuación no tiene dos raíces en $(0, 2)$. (Es decir, tiene una o ninguna).

3 Calcular p , m y n para que:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ mx + n & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 5]$. ¿Dónde cumple la tesis?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= -9 + 3p \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= 3m + n \end{aligned} \right\} \text{ Para que } f \text{ sea continua, ha de ser } -9 + 3p = 3m + n$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) &= -2 \cdot 3 + p \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) &= m \end{aligned} \right\} \text{ Para que } f \text{ sea derivable, ha de ser } -6 + p = m$$

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= -1 - p \\ f(5) &= 5m + n \end{aligned} \right\} \text{ Para que } f \text{ tome el mismo valor en los dos extremos del intervalo } [-1, 5] \rightarrow -1 - p = 5m + n$$

El sistema formado por las tres ecuaciones señaladas tiene como solución $p = 10/3$, $m = -8/3$, $n = 9$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 10/3 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ -8/3 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

La tesis del teorema de Rolle se cumple en $c = \frac{5}{3}$.

Ejercicios propuestos

1 Comprueba que la función $f(x) = \sin x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$. ¿Dónde cumple la tesis?

2 Calcula b para que la función:

$$f(x) = x^3 - 4x + 3$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde cumple la tesis?

3 Comprueba que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -0,5 \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle. ¿Dónde se cumple la tesis?

4 Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de k .

HIPÓTESIS

- f continua en $[a, b]$
- f derivable en (a, b)



TESIS

Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

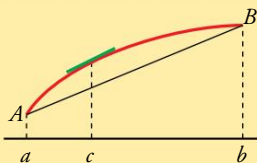
En la web



Comprobación interactiva del teorema del valor medio.

Teorema del valor medio

La idea del teorema del valor medio (T.V.M.) es que en una curva continua y sin puntos angulosos que va de A a B habrá algún punto intermedio en el que su tangente sea paralela al segmento AB .



f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración

Vamos a estudiar la función $\psi(x)$, que se obtiene al restar de la ordenada de la curva, $f(x)$, la ordenada de la recta r que pasa por $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

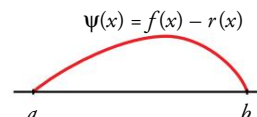
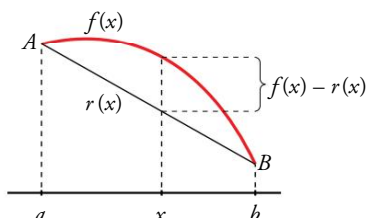
(ψ es una letra del alfabeto griego. Se llama *psi*).

La ecuación de la recta r es:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Es decir:

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



Por tanto:

$$\psi(x) = f(x) - r(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Esta función cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$, pues, además de ser continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , verifica que $\psi(a) = \psi(b)$.

Veámoslo:

$$\left. \begin{aligned} \psi(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0 \\ \psi(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \psi(b) = \psi(a)$$

Por tanto, $\psi(x)$ cumple la tesis del teorema de Rolle: existe $c \in (a, b)$ tal que $\psi'(c) = 0$.

Como $\psi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$:

$$\psi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Es decir, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ejercicios resueltos

- 1 Comprobar que $y = \sqrt{x}$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 9]$.

¿Dónde cumple la tesis?

$\sqrt{x}$ es continua en $[0, 9]$ y derivable en $(0, 9)$. Cumple, pues, las hipótesis del T.V.M. Por tanto, cumple la tesis. Veamos dónde:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} &= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{0}}{9 - 0} = \frac{1}{3} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned} \right\} \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \rightarrow c = \frac{9}{4}$$

Como $\frac{9}{4} \in (0, 9)$ y $f'\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{1}{3}$, es el valor que buscábamos.

- 2 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del T.V.M. en el intervalo $[-1, 5]$.

¿Dónde cumple la tesis?

Para que sea continua en $x_0 = 1$: $1 + a + b = 2 + 1 \rightarrow a + b = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Para que sea derivable en } x = 1, \\ \text{ha de ser } 2 \cdot 1 + a = 2 \rightarrow a = 0 \end{array}$$

Como, además, ha de ser continua: $(a + b = 2 \text{ y } a = 0) \Rightarrow b = 2$

La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $[-1, 5]$ y derivable en $(-1, 5)$.

Por tanto, cumple las hipótesis del T.V.M.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{11 - 3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases} \rightarrow 2c = \frac{4}{3} \rightarrow c = \frac{2}{3}$$

La tesis se cumple en el punto $c = \frac{2}{3} \in (-1, 5)$.

- 3 Si $f(x) = mx^2 + nx + p$, comprobar que en esta parábola se tiene que el punto c para el cual

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es, precisamente, la media aritmética de a y b :

$$c = (a + b)/2$$

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(mb^2 + nb + p) - (ma^2 + na + p)}{b - a} = \\ &= \frac{m(b^2 - a^2) + n(b - a)}{b - a} = m(b + a) + n \end{aligned}$$

$$f'(c) = 2mc + n$$

Por tanto: $2mc + n = m(b + a) + n \rightarrow 2c = b + a \rightarrow c = \frac{b + a}{2}$

Ejercicios propuestos

- 5 Demuestra que $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$.
¿En qué punto cumple la tesis?

- 6 Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en $[-3, 2]$.
¿Dónde cumple la tesis? Haz la gráfica.

- 7 Aplica el teorema del valor medio, si es posible, en el intervalo $[-2, -1]$ a la función siguiente:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Calcula el valor correspondiente a c y comprueba gráficamente el resultado obtenido.

- 8 Repite el ejercicio anterior para la función:

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

7 Aplicaciones teóricas del teorema del valor medio

A lo largo de la unidad hemos demostrado algunas propiedades como, por ejemplo:

$$“f \text{ creciente y derivable en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0”$$

en las que, a partir de ciertas propiedades de la función, se obtienen consecuencias de su derivada. Pero hemos dejado sin demostrar otras del tipo:

$$“f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x_0”$$

en las que, a partir de alguna propiedad de $f'(x)$, se obtienen datos de la función.

Con el teorema del valor medio se simplifican notablemente las demostraciones de este último tipo de teoremas en los que se deducen propiedades de una función, $f(x)$, a partir de sencillas propiedades de su derivada, $f'(x)$.

FUNCIÓN CONSTANTE

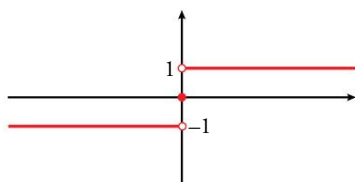
Sabemos que la derivada de una función constante es cero en todos sus puntos. Ahora vamos a probar lo recíproco: si la derivada de una función es cero en todos sus puntos, entonces esa función es constante.

Observa

Hay funciones en las que todos los puntos en los que son derivables tienen derivada igual a 0 pero que no son constantes.

Por ejemplo, la función *signo*:

$$\text{signo}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

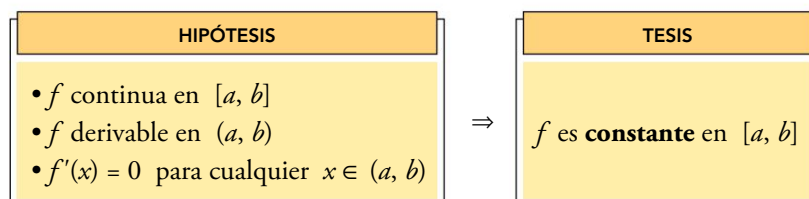


Evidentemente, la razón es que no cumple las hipótesis pues no es continua ni derivable en $x = 0$.

f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) .

Si $f'(x) = 0$ en todos los puntos de (a, b) , entonces f es constante en $[a, b]$.

Demostración



Para probar que f es constante en $[a, b]$, tomaremos dos puntos cualesquiera del intervalo y veremos que f toma el mismo valor en ambos.

Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Se cumplen las hipótesis del T.V.M. en $[x_1, x_2]$ y, por tanto:

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ que verifica } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Pero como $f'(x) = 0$ en todo el intervalo (a, b) , $f'(c) = 0$. Por tanto:

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \text{ es decir, } f(x_2) = f(x_1)$$

Esto significa que la función toma el mismo valor en dos puntos cualesquiera del intervalo y, por tanto, es constante.

FUNCIÓN CRECIENTE EN UN PUNTO

En el apartado 2 de esta unidad hemos visto y demostrado que:

$$“f \text{ creciente y derivable en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0”$$

también afirmamos allí que “ $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en x_0 ”.

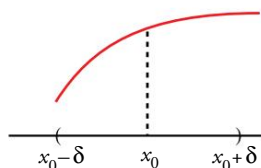
Esta última implicación quedó sin demostrar. Ahora, utilizando el teorema del valor medio podremos probarla fácilmente, retocando la hipótesis de partida.

$$f \text{ es derivable en un entorno de } x_0 \text{ y } f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x_0$$

Función decreciente

Naturalmente hay un resultado análogo para funciones decrecientes:

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente en } x_0$$



Demostración

HIPÓTESIS	⇒	TESIS
• f derivable en un entorno de x_0. • $f'(x_0) > 0$		f es creciente en x_0

Si $f'(x_0) > 0$, hay un entorno $E = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en donde f' es positiva.

Si tomamos dos puntos cualesquiera, $x_1 < x_2$ de E , f cumple las hipótesis del T.V.M. en $[x_1, x_2]$. Por tanto, se cumple la tesis:

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ tal que } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$

Se deduce que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ y, por tanto, que $f(x_2) > f(x_1)$.

La función es, pues, creciente en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y, por tanto, lo es en x_0 .

MÍNIMO RELATIVO

En el apartado 3 de esta unidad demostramos que:

“si f tiene un mínimo en x_0 y es derivable, entonces $f'(x_0) = 0$ ”

También veíamos que la implicación recíproca no siempre es cierta. Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar una proposición parecida a su recíproca:

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ presenta un mínimo relativo en } x_0$$

Demostración

HIPÓTESIS	⇒	TESIS
• $f'(x_0) = 0$ • $f''(x_0) > 0$		f tiene un mínimo relativo en x_0

Para probar que f tiene un mínimo en x_0 demostraremos que es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Para ello, tendremos en cuenta el resultado anterior que asocia el crecimiento o decrecimiento con el signo de la derivada, f' :

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0$$

Si $h < 0$, $f'(x_0 + h) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente a la izquierda de x_0 ①

Si $h > 0$, $f'(x_0 + h) > 0 \Rightarrow f$ es creciente a la derecha de x_0 ②

Por ① y ②, f presenta un mínimo en x_0 .

Ejercicios propuestos

1 Demuestra que si f es derivable en un entorno de x_0 y $f'(x_0) < 0$, entonces f es decreciente en x_0 .

2 Demuestra que si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo relativo en x_0 .

8 Teorema de Cauchy y regla de L'Hôpital

Interesante

El teorema de Cauchy, de interés teórico, da paso a la regla de L'Hôpital, de extraordinaria utilidad para el cálculo de límites.

Observa

Hemos de suponer que $g(a) \neq g(b)$ y que, por tanto, $g'(c) \neq 0$.

En caso contrario, el teorema se puede formular así:

$$g'(c) [f(b) - f(a)] = f'(c) [g(b) - g(a)]$$

Una consecuencia del teorema del valor medio

El teorema de Cauchy es una generalización del teorema del valor medio con un gran interés teórico. Veamos cuál es la idea por la cual llegamos a él.

Tenemos dos funciones, f y g , que cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[a, b]$. Vamos a extraer consecuencias de esto:

$$\text{para } f \dots \exists c_1 \in (a, b) \text{ tal que } f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c_1)$$

$$\text{para } g \dots \exists c_2 \in (a, b) \text{ tal que } g(b) - g(a) = (b - a) \cdot g'(c_2)$$

Dividiendo, miembro a miembro, ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

El teorema que veremos a continuación es más potente que lo anterior, pues llega a un resultado similar pero para un único c .

Teorema de Cauchy

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración

Construimos la función $\phi(x) = f(x) [g(b) - g(a)] - g(x) [f(b) - f(a)]$.

Veamos que $\phi(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$:

- $\phi(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por ser una combinación lineal de $f(x)$ y $g(x)$, que lo son.

$$\begin{aligned} \phi(a) &= f(a) [g(b) - g(a)] - g(a) [f(b) - f(a)] = f(a) g(b) - g(a) f(b) \\ \phi(b) &= f(b) [g(b) - g(a)] - g(b) [f(b) - f(a)] = -f(b) g(a) + g(b) f(a) \end{aligned}$$

Vemos, pues, que $\phi(a) = \phi(b)$.

Por tanto, $\phi(x)$ cumple la tesis del teorema de Rolle en $[a, b]$:

$$\exists c \in (a, b), \text{ tal que } \phi'(c) = 0$$

Y como $\phi'(x) = f'(x) [g(b) - g(a)] - g'(x) [f(b) - f(a)]$:

$$\phi'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Esto es lo que se quería demostrar.

Ejercicios propuestos

1 En cada caso halla c donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy:

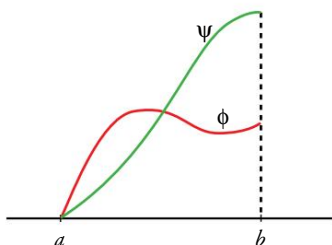
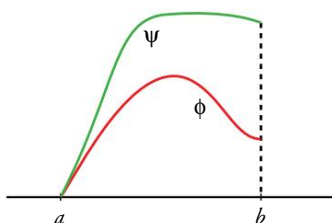
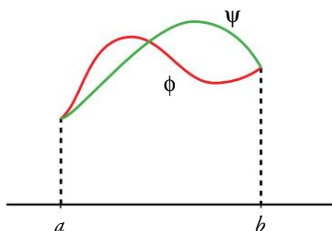
a) $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$, en $[1, 4]$

b) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$, en $[0, 1]$

c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, en $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

d) $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, en $[1, 3]$

La demostración anterior ha sido muy eficiente. Pero para realizarla hemos tenido que recurrir a una función $\phi(x)$ nada trivial. Si no nos lo dicen, ¿cómo se nos podría haber ocurrido esa función?



Una demostración más constructiva

Vamos a demostrar paso a paso el teorema de Cauchy, de modo que se tenga muy claro por qué hacemos cada cosa.

PRIMERA APROXIMACIÓN

Sean ψ y ϕ dos funciones continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y que cumplen que $\psi(a) = \phi(a)$ y $\psi(b) = \phi(b)$.

La función diferencia, $d(x) = \psi(x) - \phi(x)$, cumple las hipótesis del teorema de Rolle y, por tanto, su tesis:

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } d'(c) = 0$$

Es decir, $\psi'(c) - \phi'(c) = 0$; o bien $\psi'(c) = \phi'(c)$.

La idea es sencilla: si las dos funciones parten del mismo punto y llegan al mismo punto, en algún lugar crecen igual de deprisa.

SEGUNDA APROXIMACIÓN

Sean ψ y ϕ dos funciones continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y que cumplen que $\psi(a) = \phi(a) = 0$ y $\psi(b) = 3\phi(b)$.

La función $d(x) = \psi(x) - 3\phi(x)$, cumple las hipótesis del teorema de Rolle y, por tanto, su tesis:

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } d'(c) = 0$$

Es decir, $\psi'(c) - 3\phi'(c) = 0$, y de aquí:

$$\psi'(c) = 3\phi'(c), \quad \frac{\psi'(c)}{\phi'(c)} = 3 = \frac{\psi(b)}{\phi(b)}$$

Esto quiere decir que si ψ crece el triple que ϕ habrá algún momento en que la velocidad de crecimiento de ψ sea triple de la de ϕ .

TERCERA APROXIMACIÓN

Si en la versión anterior suprimimos la condición impuesta de $\psi(b) = 3\phi(b)$, y dejamos que $\psi(b)$ y $\phi(b)$ estén en una relación cualquiera, $\psi(b) = k\phi(b)$, razonando del mismo modo llegamos a que:

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } \frac{\psi'(c)}{\phi'(c)} = \frac{\psi(b)}{\phi(b)}$$

VERSIÓN FINAL

Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . A partir de ellas obtenemos otras dos, ψ y ϕ . (Observa las gráficas).

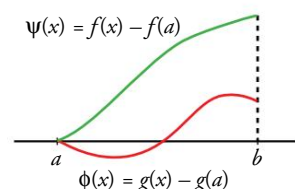
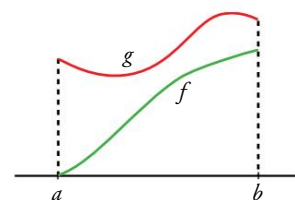
Las funciones ψ y ϕ cumplen las mismas condiciones del párrafo anterior (tercera aproximación). Por tanto, $\exists c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{\psi'(c)}{\phi'(c)} = \frac{\psi(b)}{\phi(b)}$$

Sustituyendo ψ y ϕ por sus expresiones en función de f y g :

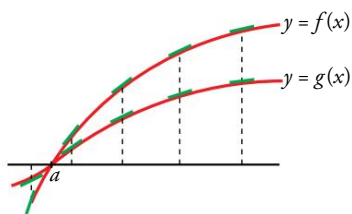
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

que es lo que se quería demostrar.



Ten en cuenta

De nuevo, obtenemos fracciones cuyos denominadores suponemos diferentes de 0.



En la web



Resolución de indeterminaciones utilizando la regla de L'Hôpital.

Regla de L'Hôpital

Esta regla, que tan útil nos ha resultado para el cálculo de límites, se justifica a partir del teorema de Cauchy.

Idea en la que se basa

Cuando un límite del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe, significa que la relación entre las ordenadas de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tiende a estabilizarse.

Si existe $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ significa que tiende a estabilizarse la relación entre sus pendientes.

Pues bien, si $\frac{f(x)}{g(x)}$ es del tipo $\frac{0}{0}$, cuando ocurre lo segundo $\left(\frac{f'}{g'} \rightarrow l_1\right)$, entonces, con seguridad, ocurre lo primero $\left(\frac{f}{g} \rightarrow l_2\right)$ y, además, los dos límites

coinciden, es decir, $l_1 = l_2$.

Esto es lo que asegura el siguiente **enunciado**:

Sean f y g derivables en un entorno $(a-r, a+r)$ del punto a .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el

límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ y es $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración

Podemos suponer que $f(a) = 0$ y que $g(a) = 0$, pues para el cálculo de límites cuando $x \rightarrow a$, no es relevante el valor de la función en el punto a .

Ahora, f y g cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy en $[a, x]$, siendo $a < x < a+r$. Por tanto, existe $c \in (a, x)$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Cuando $x \rightarrow a$ también $c \rightarrow a$. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Observa que al considerar $a < x < a+r$ estamos tomando límites a la derecha de a . Análogamente se haría para límites a la izquierda).

Ampliación de la regla de L'Hôpital a los casos $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

En la forma en que se ha expuesto, la regla de L'Hôpital solo sería válida para límites cuando $x \rightarrow a$ de indeterminaciones del tipo $(0/0)$. Pero su campo de actuación se puede ampliar notablemente, pues también es válida para indeterminaciones del tipo $(\pm\infty/\pm\infty)$.

Y no solo eso, pues también es aplicable cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

No vamos a probarlo, pues las demostraciones son largas y delicadas. En el margen tienes un *esquema* de cómo sería la demostración de la validez de esta regla para indeterminaciones del tipo $(\pm\infty/\pm\infty)$.

Generalización a $(\pm\infty/\pm\infty)$

He aquí una idea esquemática de cómo sería la demostración de la regla de L'Hôpital para los casos $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

$$\frac{f}{g} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{1}{\frac{g}{f}} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Derivando numerador y denominador:

$$\frac{-\frac{g'}{g^2}}{-\frac{f'}{f^2}} = \frac{g'}{f'} \cdot \frac{f^2}{g^2};$$

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \left(\frac{g'}{f'} \cdot \frac{f^2}{g^2} \right)$$

Es decir:

$$\lim \frac{g}{f} = \lim \frac{g'}{f'}$$

o bien:

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$$

1. Tangente en un punto de la curva

Escribir, si es posible, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = |x|e^{-x}$ en los puntos de abscisa 0 y -1.

Hazlo tú. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y y^x = 1$ en el punto (1, 1).

- Definimos la función por intervalos: $f(x) = \begin{cases} -xe^{-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Observamos que f es una función continua en $\mathbb{R}$, ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

- Hallamos su función derivada $f'(x) = \begin{cases} (-1+x)e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ (1-x)e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f es derivable en $x = -1$ pero no en $x = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Por tanto, no existe tangente en $x = 0$.

- Calculamos la ordenada del punto de abscisa $x = -1$: $f(-1) = 1e^1 = e \rightarrow P(-1, e)$

La pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es $m = f'(-1) = -2e$

Ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa -1: $y = e - 2e(x + 1)$

2. Tangente que pasa por un punto exterior

Hallar los puntos de la curva

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

en los que la recta tangente a ella pase por el punto $P(-3, 2)$.

Hazlo tú. Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas.

- Las coordenadas del punto de tangencia son $x = a$, $f(a) = \frac{1}{a-1}$.

La pendiente de la tangente en $x = a$ es $f'(a) = \frac{-1}{(a-1)^2}$.

- La pendiente del segmento de la tangente que pasa por el punto $P(-3, 2)$ y por el punto de tangencia $\left(a, \frac{1}{a-1}\right)$ debe ser igual a $f'(a)$.

$$\text{Por tanto: } \frac{\frac{1}{a-1} - 2}{a+3} = \frac{-1}{(a-1)^2} \rightarrow \frac{-2a+3}{(a-1)(a+3)} = \frac{-1}{(a-1)^2} \rightarrow \frac{-2a+3}{a+3} = \frac{-1}{a-1}$$

$$(-2a+3)(a-1) = -(a+3) \rightarrow -2a^2 + 6a = 0 \rightarrow a = 0; a = 3 \rightarrow f(0) = -1; f(3) = \frac{1}{2}$$

Hay dos puntos de tangencia que corresponden a dos rectas tangentes:

- $x = 0$; $f(0) = -1$; $f'(0) = -1 \rightarrow y = -1 - x$
- $x = 3$; $f(3) = \frac{1}{2}$; $f'(3) = -\frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-3)$

3. Recta tangente en un punto de la curva

Si P es un punto cualquiera de la gráfica de $xy = 1$, probar que el triángulo formado por la recta OP , la tangente a esa gráfica en P y el eje $y = 0$ es isósceles.

Hazlo tú. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto de coordenadas $\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Un punto P cualquiera de la curva $y = \frac{1}{x}$ tiene por coordenadas $\left(a, \frac{1}{a}\right)$.

- Tangente en P : $m = f'(a) = -\frac{1}{a^2} \rightarrow y = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a)$
- Hallamos el punto de corte de la tangente con el eje $y = 0$:

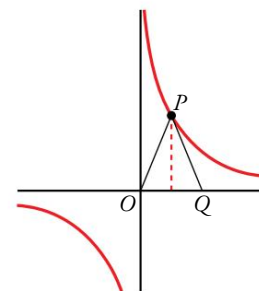
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) = 0 \rightarrow x = 2a \rightarrow Q(2a, 0)$$

- Calculamos la longitud de los lados del triángulo:

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^4 + 1}}{a}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(2a-a)^2 + \left(0 - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^4 + 1}}{a}$$

Como $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}|$, el triángulo OPQ es isósceles.



Ejercicios y problemas resueltos

4. Intervalos de crecimiento

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y determinar sus máximos y sus mínimos.

a) $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$

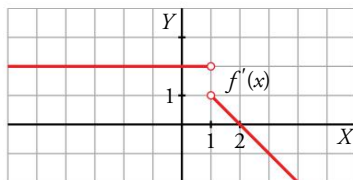
b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Hazlo tú. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$

5. Función derivada



Esta es la gráfica de la función derivada de una función f continua en $\mathbb{R}$.

a) Explicar razonadamente si f es derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de f y explicar si tiene algún extremo relativo.

c) Representar $f''(x)$.

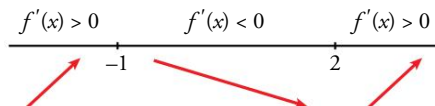
a) La función es continua y derivable en todo su dominio, $\mathbb{R}$.

f es creciente en los intervalos donde $f' > 0$, y decreciente si $f' < 0$. Buscamos los puntos de derivada nula.

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 2)$$

Como $e^x > 0$ para cualquier x , f' se anula si:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$$



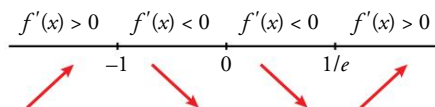
f crece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1, 2)$.

Tiene un máximo en $(-1, \frac{5}{e})$ y un mínimo en $(2, -e^2)$.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$ pero no es derivable en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \rightarrow -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ 1 + \ln x & \text{si } x > 0 \rightarrow 1 + \ln x = 0 \rightarrow x = e^{-1} \end{cases}$$

La derivada es nula en $x = -1$ y $x = 1/e$. Estudiamos el signo de f' a la izquierda y a la derecha de esos puntos.



f crece en $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0) \cup (0, \frac{1}{e})$.

Tiene un máximo en $(-1, 1)$ y un mínimo en $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$.

a) $f(x)$ no es derivable en $x = 1$. No existe $f'(1)$, ya que $f'(1^-) = 2 \neq 1 = f'(1^+)$.

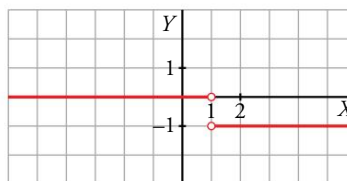
b) $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ porque en ese intervalo $f'(x) > 0$.

$f(x)$ es decreciente en $(2, +\infty)$ porque $f'(x) < 0$.

$f(x)$ tiene un extremo en $x = 2$, porque en la gráfica observamos que $f'(2) = 0$.

Además, en $x = 2$, $f'(x)$ pasa de positiva a negativa y, por ello, $f(x)$ pasa de creciente a decreciente, lo que nos asegura que $f(x)$ tiene un máximo en $x = 2$.

c) Los valores de $f''(x)$ son las pendientes de las semirrectas que forman $f'(x)$. Su gráfica es la siguiente:



6. Un avión que se aleja

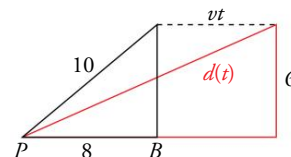
Un avión vuela horizontalmente a 6 km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un punto P y se sabe que, en el instante en que la distancia del avión a P es 10 km, dicha distancia aumenta a razón de 6 km/min. La velocidad del avión es constante. Hallarla.

Hazlo tú. Una lancha rápida navega paralela a la costa a 10 km de esta, a velocidad constante, v .

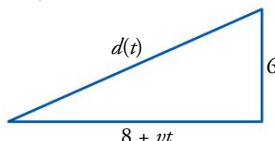
En un cierto instante, desde un faro de la costa la vemos acercarse. Su distancia a nosotros es de 26 km y disminuye a una velocidad de 72 km/h. ¿Qué velocidad lleva la lancha?

- Tomamos como instante inicial aquel en que el avión, alejándose de P , dista de él 10 km.

$$\overline{PB} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ km}$$



- Hallamos la expresión de la distancia, d , del avión a P en el instante t (en minutos).



El avión, en el instante t ha recorrido una distancia vt y, por tanto, dista $\sqrt{(8+vt)^2 + 6^2}$ del punto P .

$$d(t) = \sqrt{(8+vt)^2 + 6^2}; \quad d(0) = 10$$

¿Qué significa que la distancia del avión a P aumenta a razón de 6 km/min? Pues que $d'(t) = 6$, y esto ocurre cuando $t = 0$.

Hallamos $d'(0)$ y lo igualamos a 6:

$$d'(t) = \frac{2(8+vt) \cdot v}{2\sqrt{(8+vt)^2 + 36}}; \quad d'(0) = \frac{8v}{\sqrt{8^2 + 36}} = \frac{8}{10}v = 0,8v$$

Por tanto, $0,8v = 6 \rightarrow v = 6 : 0,8 = 7,5$

La velocidad del avión es de 7,5 km/min = 450 km/h

7. Una esfera que se hincha

En una esfera se inyecta aire a una velocidad constante de $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$. Hallar la velocidad de crecimiento del radio cuando este mida 2 m.

- El volumen de la esfera es: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (en m^3)
- Si empezamos a contar el tiempo cuando la esfera está vacía, su volumen en el instante t es $V = 0,1t \text{ m}^3$.

Por tanto, igualando los volúmenes obtenemos la relación entre el radio de la esfera y el tiempo: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 0,1t$

- ¿En qué instante el radio mide 2 m?

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 0,1t_1 \rightarrow t_1 = \frac{32\pi}{0,3} \text{ s}$$

- Para hallar la velocidad de crecimiento del radio, hemos de expresar R en función de t y derivar:

$$R(t) = \sqrt[3]{\frac{0,3}{4\pi}t}, \quad R'(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{0,3}{4\pi} \cdot t \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{0,3}{4\pi}$$

$$R'(t_1) = \frac{1}{3} \left(\frac{0,3}{4\pi} \cdot \frac{32\pi}{0,3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{0,3}{4\pi} = \frac{0,1}{4\pi} \cdot 8^{-2/3} = \frac{0,1}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} \approx 0,002$$

Por tanto, el radio crece a una velocidad de $0,002 \text{ m/s} = 2 \text{ mm/s}$

Comprobación aproximada (consideramos $\pi = 3,1415$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen para } R = 2; V(2) = 33,509 \text{ m}^3 \\ \text{Volumen para } R = 2,002; V(2,002) = 33,61 \text{ m}^3 \end{array} \right\} \text{Aumento de volumen: } 0,101 \text{ m}^3$$

El aumento de volumen es casi exactamente igual a $0,1 \text{ m}^3$, el volumen insuflado en 1 s. Tarda, pues, 1 s en aumentar el radio de 2 m a 2,002 m.

Hazlo tú.

Halla cuál fue la velocidad de aumento del radio cuando medía 1 m.

Ejercicios y problemas resueltos

8. Puntos en los que se anulan f' , f'' y f'''

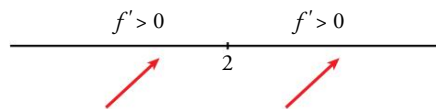
Dada la función $f(x) = 1 - (2-x)^5$ estudiar si tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = 2$.

- Hallamos f' , f'' , f''' :

$$f'(x) = 5(2-x)^4 \rightarrow f''(x) = -20(2-x)^3 \rightarrow f'''(x) = 60(2-x)^2$$

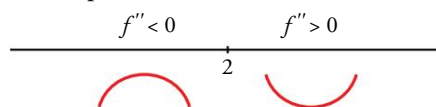
Al hacer $x = 2$, se verifica $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$.

- Estudiamos el signo de f' a la izquierda y a la derecha de $x = 2$:



f crece a la izquierda y a la derecha de 2 $\rightarrow f$ no tiene máximo ni mínimo en $x = 2$.

- Comprobamos que tiene un punto de inflexión estudiando el signo de f'' :



A la izquierda de $x = 2$, la función es convexa, y a la derecha de $x = 2$, la función es cóncava.

El punto $(2, 1)$ es un punto de inflexión.

Hazlo tú. Estudia si la función

$$f(x) = 3 - (x+1)^4$$

tiene algún máximo, mínimo o punto de inflexión.

9. Coeficientes de una función

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\cos^2 x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determinar los valores de a , b y c para que la función sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

Hazlo tú. Calcula b y d para que la función $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(1, 4)$.

- Para que sea continua debe ser:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\sin x \cos x}{1} = 0 \rightarrow c = 0$$

- Si tiene un máximo en $x = -1$, debe ser:

$$f'(-1) = 0, \text{ es decir, como } f'(x) = 2ax + b \rightarrow -2a + b = 0$$

- Si la tangente en $x = -2$ es paralela a $y = 2x$, debe ser: $f'(-2) = 2 \rightarrow -4a + b = 2$

- Resolvemos el sistema:
$$\begin{cases} -2a + b = 0 \\ -4a + b = 2 \end{cases}; a = -1, b = -2$$

Los valores pedidos son: $a = -1$, $b = -2$, $c = 0$.

10. Teorema de Rolle

Mostrar que la función:

$$f(x) = (1-x^2) \sin x$$

tiene un máximo relativo que pertenece al intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

- $f(0) = (1-0) \sin 0 = 0$
- $f(1) = (1-1) \sin 1 = 0$
- f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $(0, 1)$.

Como $(0, 1)$ está contenido en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos asegurar que existe un $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f'(c) = 0$.

Para saber si en c hay un máximo o un mínimo, utilizamos la segunda derivada:

$$f'(x) = -2x \sin x + (1-x^2) \cos x$$

$$f''(x) = (x^2 - 3) \sin x - 4x \cos x$$

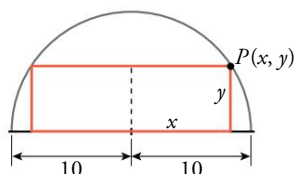
Si $c \in (0, 1)$: $c^2 - 3 < 0$, $\sin c > 0$, $4c > 0$, $\cos c > 0$

$$f''(c) = (- \cdot +) - (+ \cdot +) < 0 \rightarrow f \text{ tiene un máximo en } x = c.$$

11. Área máxima

En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva.

Calcular las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.



Tomamos como origen de coordenadas el centro de la circunferencia.

$P(x, y)$ es un punto de la circunferencia.

El área del parterre es: $S = 2xy$

Como el punto P pertenece a la circunferencia, debe verificar que:

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

Así pues, hay que maximizar $S(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$.

$$\text{Calculamos } S'(x) = \frac{2(100 - 2x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}; S'(x) = 0 \begin{cases} x = 5\sqrt{2} \\ x = -5\sqrt{2} \text{ (no vale)} \end{cases}$$

En $x = 5\sqrt{2}$ hay, efectivamente, un máximo, ya que $S'(x) > 0$ si $x < 5\sqrt{2}$, y $S'(x) < 0$ si $x > 5\sqrt{2}$.

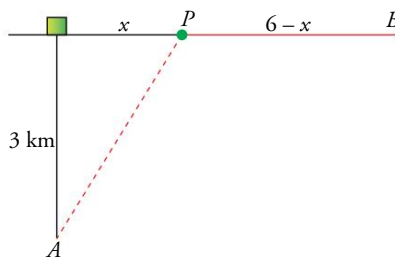
Las dimensiones del parterre serán $10\sqrt{2}$ m y $5\sqrt{2}$ m, y su área máxima será 100 m^2 .

Hazlo tú. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm^2 . Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

12. Problema de tiempo mínimo

Un nadador, A , se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B , en la misma playa, a 6 km de la caseta.

Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, averiguar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.



Llamamos x a la distancia de la caseta al punto P al que debe llegar a nado.

Tiene que recorrer:

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + 9} \text{ a } 3 \text{ km/h y}$$

$$\overline{PB} = 6 - x \text{ a } 5 \text{ km/h}$$

El tiempo empleado es:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{6 - x}{5} \rightarrow t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2 + 9} = 0 \rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 9} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 9) \rightarrow 16x^2 = 81 \begin{cases} x = 9/4 = 2,25 \text{ km} \\ x = -9/4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Comprobamos que:

• si $x < 2,25$ $t'(x) < 0$ ya que, por ejemplo, $t'(0) = -1/5$.

• si $x > 2,25$ $t'(x) > 0$ ya que $t'(4) = 1/15$.

Debe dirigirse a nado a un punto que diste 2,25 km de la caseta.

El tiempo que tardará en llegar a B es:

$$t = \frac{\sqrt{2,25^2 + 9}}{3} + \frac{6 - 2,25}{5} = 1,25 + 0,75 = 2 \text{ horas}$$

Hazlo tú. La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Si la hipotenusa debe medir 6 m, calcula sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

Ejercicios y problemas guiados

1. Tangente perpendicular a una recta

Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 2 = 0$.

- La pendiente, m , de la tangente se obtiene con la pendiente de la recta dada.
- Para obtener los puntos de tangencia, resuelve la ecuación $f'(x) = m$.
- Halla los puntos de tangencia y escribe las ecuaciones pedidas.

Solución: $y = x$; $y = x + 2$

2. Intervalos de concavidad y convexidad

Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

- Resuelve la ecuación $f''(x) = 0$.
- Recuerda que para que exista un punto de inflexión la curva debe pasar de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.
- Ten en cuenta el dominio de definición de la función para determinar los intervalos donde debes estudiar el signo de $f''(x)$.

Solución: Cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$. No tiene puntos de inflexión.

3. Máximo y mínimo absoluto

Calcular el máximo y el mínimo absolutos, en el intervalo $[-1, 2]$ de la función:

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$$

- Estudia el dominio de $f(x)$ y su continuidad en el intervalo dado.
- Recuerda que una función continua en un intervalo cerrado alcanza el máximo y el mínimo absolutos en los extremos del intervalo o en los extremos relativos.
- Obtén las abscisas de los extremos relativos. Calcula y compara el valor de $f(x)$ en esos puntos y en $x = -1$ y en $x = 2$.

Solución: El máximo absoluto se alcanza en el punto $(-1, 1)$ y el mínimo absoluto en $(2, \ln 7 - 2)$.

4. Continuidad en $[a, b]$

Dada la función $f(x) = x^{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}$, demostrar que existe un valor $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = 4$.

- Estudia el dominio de $f(x)$ y su continuidad en el intervalo $[1, 3]$.
- Halla la derivada de $f(x)$ tomando logaritmos.
- Comprueba que la derivada existe en el intervalo $(1, 3)$. Aplica el teorema del valor medio y obtén c .

Solución: $f(x)$ es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$. Entonces, existe un c tal que $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 4$.

5. Extremos relativos

Sea $f(x) = x^2 e^{-ax}$ con $a \neq 0$.

- Calcular el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.
- Clasificar los extremos relativos cuando $a = 2$.

- Los extremos relativos están entre las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Una de las soluciones de esa ecuación depende de a . Para $x = 2$, obtendrás el valor de a .
- Estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos que determinan los puntos singulares.

Soluciones:

- $a = 1$
- Tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(1, e^{-2})$.

Para practicar

Recta tangente

- 1 Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \ln(\operatorname{tg} 2x)$ en $x = \frac{\pi}{8}$

b) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 5x}$ en $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ en $x = 2$

d) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$ en $x = 0$

- 2 Halla las tangentes a la curva:

$$y = \frac{2x}{x-1}$$

paralelas a la recta $2x + y = 0$.

- 3 Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:

a) $y = x \ln x$

b) $y = x^2 e^x$

c) $y = \operatorname{sen} 2x$

- 4 Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X . Escribe la ecuación de esa tangente.

- 5 a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en $x = 3$.

b) ¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de f que sea paralela a la que has hallado? En caso afirmativo, hállala.

- 6 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$y = 4x^3 - 2x^2 - 10$$

en su punto de inflexión.

- 7 Halla los puntos de la curva:

$$y = 3x^2 - 5x + 12$$

en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas.

- 8 Halla los puntos de la curva:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$$

en los que la recta tangente a esta pase por el punto $(0, -8)$. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

- 9 Halla, en cada caso, las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas al eje X :

a) $y = \frac{x^3}{3(x-1)}$

b) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

c) $y = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

- 10 Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $y = \frac{x^3(3x-8)}{12}$

c) $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$

e) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

f) $y = e^x(x-1)$

- 11 Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{8-3x}{x(x-2)}$

b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \frac{2x^2-3x}{2-x}$

e) $y = \frac{x^2-1}{x}$

f) $y = \frac{8}{x^2(x-3)}$

- 12 Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x + 4$

b) $y = x^4 - 6x^2$

c) $y = (x-2)^4$

d) $y = x e^x$

e) $y = \frac{2-x}{x+1}$

f) $y = \ln(x+1)$

- 13 Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $y = 1 + (x-1)^3$

b) $y = 2 + (x-1)^4$

c) $y = 3 - (x-1)^6$

d) $y = -3 + 2(x-1)^5$

- 14 Determina los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + \frac{4}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = x \ln x$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$

d) $f(x) = e^{-x^2}$

- 15 Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Comprueba que son derivables en $\mathbb{R}$.

- b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

- 16 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x|x|$. ¿Tiene máximos o mínimos?

Determina los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Ejercicios y problemas propuestos

■ Coeficientes de una función

- 17** Dada la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$, calcula a sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?
- 18** De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por $(1, 1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b .
- 19** Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$.
- 20** Calcula los coeficientes a , b y c de la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que:
- La ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es $y = x$.
 - Tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$.
- 21** Halla a , b , c y d para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo relativo en el punto $(2, 0)$.
- 22** Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Halla a , b , c y d .
- 23** Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.
- 24** La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 1)$. Calcula a , b y c .
- 25** La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a , b y c .
- 26** Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.
- 27** Halla el valor de c de modo que la función $y = \frac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único punto crítico.
¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?
- 28** a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función:
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
- b) Halla sus extremos relativos en el caso $a = -2$, $b = 1$.

Para resolver

- 29** Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:
- $$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$
- 30** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 + 2x - 6 = 0$ en los puntos de ordenada $y = 3$.
- 31** Determina los puntos de la circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
- 32** Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \arctg \frac{x-1}{x+1}$ que es paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$.
- 33** Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^{x/2}$ en el punto de abscisa $x = e$.
- 34** Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por:
- $$y = |x^2 + 2x - 3|$$
- 35** Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.
- 36** La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje de abscisas en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en $(3, 2)$. Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje X .
- 37** Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:
- $$f(x) = 2x - x^2 \quad g(x) = x^2 - x - 2$$
- 38** Dada la función $f(x) = |x - 3|(x + 1)$, halla los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta $y = 6x - 2$.
- 39** Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ se pide:
- El punto de esa curva en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(-1, 3)$ y $(2, 0)$.
 - Las rectas que pasan por el punto $(-2, 1)$ y son tangentes a la curva.
- 40** Halla el valor que debe tener a para que la función $f(x) = x^2 \ln \frac{x}{a}$, $a > 0$, tenga un punto singular en $x = e$.

- 41** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Determina a , b y c para que sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

- 42** a) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

calcula los valores de m , n y p para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -\frac{1}{2}$.

b) ¿Es un máximo o un mínimo?

c) Comprueba si existen otros puntos singulares y representa la función.

- 43** Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Determina el valor de a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) ¿Tiene puntos singulares?

- 44** Halla los puntos de la parábola $y = x^2 - 1$ que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

- 45** El nivel medio diario de CO_2 de una ciudad depende del número de habitantes, p , y viene dado por la función:

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

con p en miles y C en partes por millón (ppm).

Si la evolución de la población de esa ciudad en t años es $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$, en miles de habitantes, ¿con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en ese lugar dentro de 3 años?

- 46** La velocidad de una partícula en m/s, viene dada por la función $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$ con $t \geq 0$.

a) ¿En qué instante del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(t)$ e interpreta el resultado.

- 47** En un experimento, la cantidad de agua en función del tiempo viene dada por la expresión

$$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$$

con $t \in [1, 10]$, t en horas y $C(t)$ en litros.

Halla cuál es la cantidad mínima de agua y en qué instante de tiempo se obtiene.

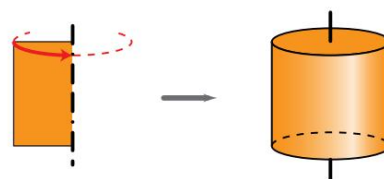
- 48** Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + |x - 2|$ b) $f(x) = 3e^{-2|x|}$

- 49** Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo $[-2, 3]$ de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1) + (x - 3)$.

- 50** Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

- 51** Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al girar alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.



- 52** Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede $x + y$ ser menor que 7? Razona la respuesta.

- 53** El radio de un círculo crece uniformemente con una velocidad de 2 cm/s. Halla la velocidad de crecimiento de su superficie cuando el radio sea 5 cm.

- 54** a) Siendo $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $P(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcula los extremos relativos de $h(x)$.

b) ¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto?

- 55** El punto $P(x, y)$ recorre la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto $(0, 0)$ es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

- 56** Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.

a) Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por $A(x) = 12 \sin x$, donde x es el ángulo que forman las manecillas.

b) Halla x para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.

- 57** En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2 . ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?

- 58** Dada $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.

Ejercicios y problemas propuestos

- 59** En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:

- Expresa el área, A , del rectángulo en función de su base, x , y di cuál es el dominio de la función.
- Halla el valor máximo de esa función.

- 60** Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

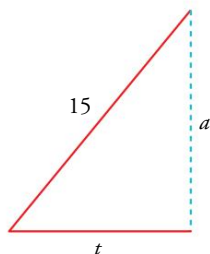
- 61** Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.

Encuentra un punto P sobre la altura tal que la suma de distancias de P a los tres vértices sea mínima.

- 62** Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

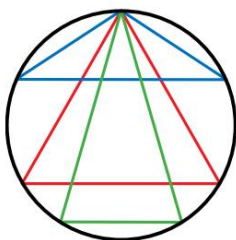
- 63** De todas las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$, encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.

- 64** Una escalera se apoya en la pared. Si el extremo inferior comienza a deslizarse a una velocidad de 1 m/s , ¿cuál será la velocidad del extremo superior en el instante en que el extremo inferior diste 5 m de la pared? La longitud de la escalera es de 15 m.



* Ten en cuenta que en el instante t , en segundos, el extremo inferior se ha separado de la pared t metros. Halla la altura $a(t)$ a la que se encuentra el extremo superior. Averigua el valor de $a'(5)$.

- 65** Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima, inscrito en una circunferencia de 4 m de radio.



Cuestiones teóricas

- 66** Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in (0, 3\sqrt{2})$ para el que $f'(c) = 0$.

- 67** La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 4]$? En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.

- 68** Se tiene la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$ y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

- 69** ¿Es posible calcular a , b , c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla el teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

- 70** La función $f(x) = |\cos x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?

- 71** Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.

- 72** Calcula a y b para que:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$. ¿Dónde cumple la tesis?

- 73** Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

- 74** La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos, a y b , tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.

- 75** Calcula a , b y c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

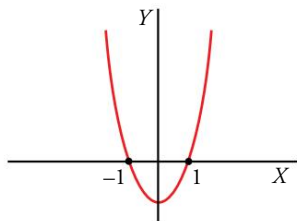
76 Dada la función:

$$f(x) = \sqrt{\ln(3^x + x) + \ln(x^2 - 10x + 20)}$$

demuestra que existe un valor $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$.
Menciona y justifica los resultados teóricos empleados.

77 ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.

- Una función que no sea una recta puede tener infinitos puntos en los que su recta tangente sea $y = 1$.
- Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, entonces f no puede tener ni máximo ni mínimo en $x = a$.
- Si un polinomio de grado 3 tiene un mínimo en $x = 2$, ese mínimo no puede ser mínimo absoluto.
- Una función continua en $[0, 5]$, que no es derivable en $x = 3$, no puede tener un máximo en $x = 3$.
- Si $y = f(x)$ es creciente en $x = a$, entonces $y = -f(x)$ es decreciente en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$, f tiene un máximo o un mínimo en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = -5$, f tiene un punto de inflexión en $x = a$.
- Si esta es la gráfica de $f'(x)$, entonces f tiene un mínimo en $x = -1$ y un máximo en $x = 1$.

**Para profundizar**

78 En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Demuestra que, para que el área del triángulo ABC sea máxima, la distancia de C a la cuerda debe ser $3/2$ del radio.

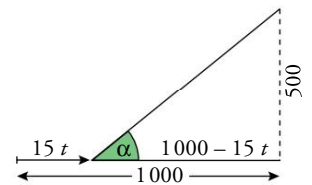
79 Cuando un globo está a 200 m sobre el suelo y se eleva a 15 m/s, un automóvil pasa bajo él con velocidad de 45 km/h. ¿Con qué velocidad se separan coche y globo un segundo después?

Ten en cuenta lo siguiente:

- El globo está a $200 + 15t$ m de altura en el instante t .
- El coche está a $(45/3,6) \cdot t$ m de la vertical del globo.

Halla la distancia entre ambos y averigua la velocidad de alejamiento cuando $t = 1$.

80 Una torre está al final de una calle. Un hombre se dirige en automóvil hacia la torre a razón de 15 m/s. Sabiendo que la torre tiene 500 m de altura, ¿con qué velocidad varía el ángulo del observador respecto de la cumbre de la torre cuando dicho observador se encuentra a 1000 m de la torre?



- Halla $\tan \alpha$ y, después, α .
- Averigua el valor de $\alpha'(t)$ para $t = 0$.

Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1 Halla los puntos de la función:

$$f(x) = \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

en los que la recta tangente sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

2 Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de la función siguiente:

$$f(x) = x|x - 2|$$

3 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$ y determina sus máximos y mínimos para $x \in [0, 2\pi]$.**4** a) Estudia la curvatura de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

b) Escribe la ecuación de la recta tangente que pasa por su punto de inflexión.

5 Determina a , b , c y d para que la función:

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un máximo relativo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo relativo en el punto $(2, 0)$.

6 Calcula el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**7** De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**8** La función $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-2, 2]$ verifica la igualdad $f(-2) = f(2)$.

Justifica si es posible encontrar algún $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.