

8 Derivadas

Evolución del concepto de derivada

Hay descubrimientos que están en el aire en una cierta época. El ambiente está preparado, maduro, y solo hace falta que alguien con decisión y tino se atreva a cristalizar las ideas en un todo coherente. Por eso no es de extrañar que en estas circunstancias surjan, así al mismo tiempo, dos o tres personas que lo hagan.

En la segunda mitad del siglo XVII el cálculo infinitesimal estaba flotando en el ambiente matemático, y cuajó en las mentes de **Newton** y **Leibniz** de forma independiente. Aunque Newton se adelantó unos cuantos años en su concepción, fue Leibniz el primero en publicarlo explícitamente en 1684. Pero lo hizo de una forma tan confusa que, dado que era buen expositor, se ha llegado a pensar que su oscuridad fue intencionada, a fin de que nadie le entendiera demasiado bien y poder mantener la prioridad de haberlo publicado y, al mismo tiempo, la ventaja de usarlo él solo en aquellos tiempos en que las competencias matemáticas estaban todavía de moda.

Pero hubo quien se empeñó en entender lo que Leibniz había escrito y lo consiguió con tal maestría que al poco tiempo, en lo que al manejo del cálculo se refiere, no tenía nada que aprender ni de Leibniz ni de Newton. Este fue **Jakob Bernoulli**, un suizo de Basilea, a quien su padre había encauzado hacia la teología. Después de aquella hazaña, Bernoulli se dedicó con afán a sacarle jugo al invento de mil modos sorprendentes, junto con su hermano **Johann**, trece años menor. Más tarde, **Euler** se unió al grupo, constituyendo este trío el orgullo científico de Basilea.

Hubo de pasar casi siglo y medio desde que Newton y Leibniz comenzaron a desarrollar y manejar las nociones del análisis infinitesimal, a finales del siglo XVII, hasta que **Cauchy**, a comienzos del XIX, las sistematizó en un cuerpo teórico bien construido y prácticamente con la misma forma en que hoy lo utilizamos para iniciarnos en los primeros pasos del análisis.

Agustín Louis Cauchy (1789-1857)

Nació en París, en 1789, en una familia acomodada. Al comenzar el periodo de la Revolución Francesa conocido como El Terror (1793-1794), su familia huyó de París a Arcueil, donde permaneció bastante tiempo. Allí tuvo la ocasión de conocer a **Laplace**. Estudió ingeniería militar y, al terminar, en 1810, fue enviado a Cherburgo, donde Napoleón preparaba una flota para invadir Inglaterra. Pero la afición llevaba a Cauchy a las matemáticas.



El cálculo infinitesimal permite estudiar el cambio a niveles infinitamente pequeños (de tiempo, espacio, ...).



"Acta Eruditorum", revista científica en la que en 1684, Leibniz publicó su teoría sobre el cálculo infinitesimal.

En 1813 volvió a París y, allí, Laplace y **Lagrange** le convencieron para que se dedicase de lleno a las matemáticas: tenía 24 años.

En 1814 escribe un tratado sobre la teoría de variable compleja; en 1816 ya es profesor de la Facultad de Ciencias, del Colegio de Francia y de la Escuela Politécnica, y entra en la Academia de las Ciencias sustituyendo al expulsado **Monge**, tras la caída de Napoleón.

Sus más grandes contribuciones matemáticas tienen lugar en los años 1820 y posteriores; son los libros que salen de sus lecciones: *Curso de Análisis* (1821), *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal* (1823) y *Lecciones sobre la aplicación del cálculo infinitesimal a la geometría* (1826-28). Con ellos, Cauchy comienza la tarea de imponer rigor en el desarrollo de la matemática del siglo XIX.

Su producción matemática fue enorme y muy variada. Cauchy es una excepción a la regla según la cual la mayor fecundidad del matemático se da en la juventud: de los 800 artículos que escribió, más de 500 fueron escritos en los últimos 20 años de su vida, si bien es verdad que sus grandes obras sistemáticas fueron escritas cuando su edad rondaba los 30 años.

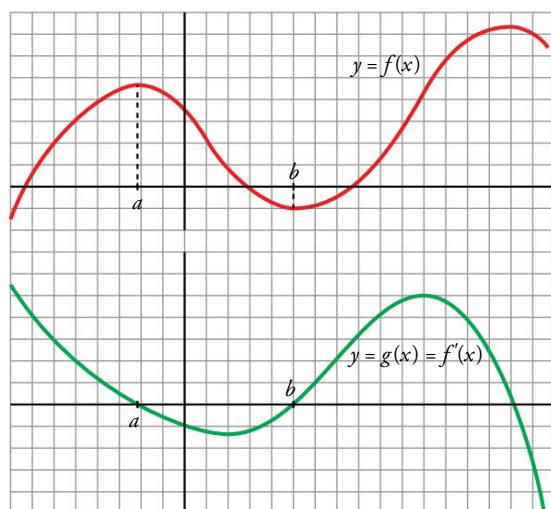


“Robespierre y Saint-Just camino de la guillotina”, óleo de Alfred Mouillard (1884) ambientado en la época en la que la familia de Cauchy huyó de París.

Resuelve

Función derivada

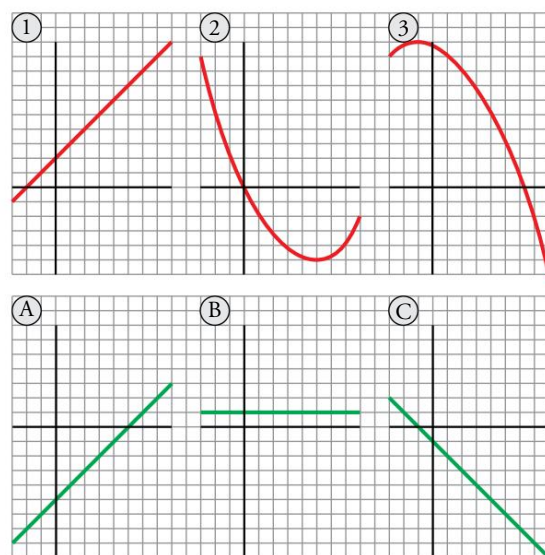
- La gráfica inferior (en verde) es la función derivada de la superior. Es decir: $g(x) = f'(x)$.



Veamos por qué:

- En el tramo $(-\infty, a)$, $f(x)$ es creciente. Por tanto, su derivada es positiva. Es lo que le pasa a $g(x)$.
- La derivada de f en a es 0: $f'(a) = 0$. Y también es $g(a) = 0$.

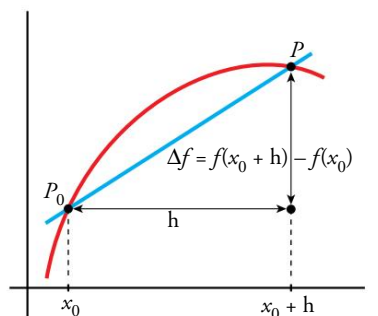
- Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.
- Las tres gráficas de abajo, A, B y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2 y 3, pero en otro orden. Explica razonadamente cuál es la de cada una.



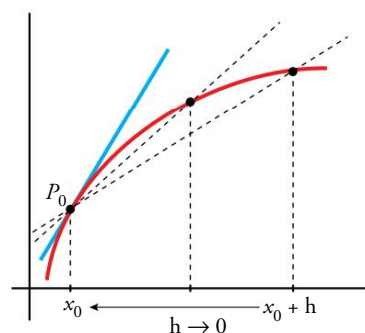
1 Derivada de una función en un punto

En la web

Ejercicios y ejemplos para trabajar el concepto de tasa de variación media.



$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ es la pendiente de P_0P .



$f'(x_0)$ es la pendiente de la tangente en x_0 .

Vamos a recordar algunos conceptos relacionados con la medida del crecimiento de una función $y = f(x)$ en un punto de su dominio.

Tasa de variación media

Cuando la abscisa varía entre x_0 y $x_0 + h$, la ordenada va de $f(x_0)$ hasta $f(x_0 + h)$.

- h es el **incremento de la x** .
- $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ es el **incremento de la función** en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

El cociente, $\frac{\Delta f}{h}$, mide el **crecimiento medio de f** en ese intervalo.

El **cociente incremental** $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se llama **tasa de variación media** y significa la variación relativa de f con relación a x en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$. Gráficamente, es la **pendiente de la recta** que pasa por los puntos $P_0(x_0, f(x_0))$ y $P(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Derivada en un punto

Si en la expresión del crecimiento medio de la función en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ hacemos que h tienda a 0, obtenemos el crecimiento instantáneo, o mejor, el crecimiento en un punto:

El límite, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h}$, si existe y es finito, se llama **derivada de la función f en x_0** y se designa por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Gráficamente, $f'(x_0)$ es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 .

Si $f'(x_0)$ existe, se dice que **f es derivable** en x_0 .

Ejercicios resueltos

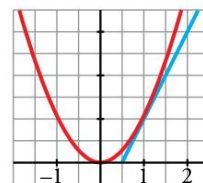
- 1 Si $f(x) = x^2$, hallar su derivada en $x_0 = 1$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2$$

$y = x^2$ es derivable en $x_0 = 1$. Su derivada es 2.

Significa que la pendiente de la recta tangente en $x_0 = 1$ es 2.

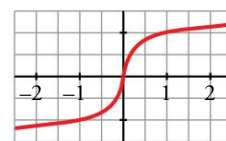


- 2 Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, hallar su derivada en $x_0 = 0$.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^{1/3} - 0}{h} = h^{-2/3}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h^{-2/3}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

El valor obtenido no es finito, por tanto, no existe $f'(0)$. La recta tangente a la curva en $x_0 = 0$ es perpendicular al eje X . La función no es derivable en ese punto.



En la web



Ejemplo que muestra el comportamiento de la tasa de variación media cuando $h \rightarrow 0$.

Recuerda

- $h \rightarrow 0^-$ Significa que h tiende a 0 tomando valores menores que 0.
- $h \rightarrow 0^+$ h tiende a 0 tomando valores mayores que 0.

Derivadas laterales

Se define la **derivada por la izquierda** de f en x_0 :

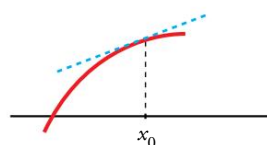
$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se define la **derivada por la derecha** de f en x_0 :

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A ambas se las llama **derivadas laterales**.

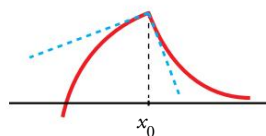
Si las dos derivadas laterales en x_0 coinciden, entonces f es **derivable** en x_0 .



FUNCIÓN DERIVABLE:

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$$

Si las dos derivadas laterales en x_0 son distintas, entonces la gráfica de la función tiene un **punto angular** en x_0 .



PUNTO ANGULOSO:

$$f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$$

Observa

Gráficamente, la derivabilidad de una función en un punto está relacionada con el hecho de que su gráfica sea “lisa” o “suave” en ese punto.

Función derivable en un intervalo

f es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) si lo es en cada punto de (a, b) .

f es **derivable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si lo es en (a, b) y existen las derivadas laterales $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.

Las funciones elementales, las que manejamos habitualmente, son derivables en todos los puntos en los que están definidas salvo en algunos puntos de tangente vertical, como el que hemos visto en la página anterior, de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$.

Ejercicios propuestos

1 Halla, paso a paso, las derivadas siguientes:

a) $4x - x^2$ en $x_0 = 3$

b) x^3 en $x_0 = 2$

c) $\frac{1}{x}$ en $x_0 = 2$

d) $(x - 3)^2$ en $x_0 = 1$

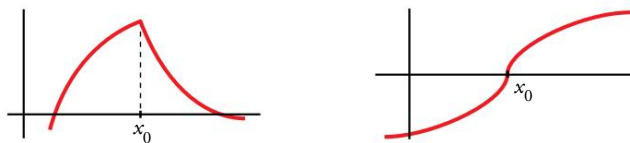
2 Halla, paso a paso, la derivada lateral $f'(0^+)$ de $f(x) = \sqrt{x}$ y justifica la respuesta.

3 ¿Qué condición debe cumplir una función, f , para ser derivable en el intervalo $[1, 5)$?

continuidad $\nRightarrow$ derivabilidad

Derivabilidad y continuidad

Una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él. Es lo que ocurre en los puntos angulosos y en los puntos de tangente “vertical” (es decir, perpendicular al eje X).



Sin embargo:

derivabilidad $\Rightarrow$ continuidad

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Demostración

Para probar que f es continua en x_0 , hemos de demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ o, lo que es lo mismo, } \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

$$\text{Veámoslo: } f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tomamos límites cuando $h \rightarrow 0$ en los dos miembros de la igualdad. Teniendo en cuenta que f es derivable en x_0 , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0 \cdot f'(x_0) \stackrel{(1)}{=} 0$$

Hemos probado que $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$ y, por tanto, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, es decir, f es continua en x_0 .

Observa

La igualdad (1) se sigue del hecho de que f es derivable en x_0 , y, por tanto, $f'(x_0)$ es finito.

Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos

Consideremos una función: $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$

En esta expresión, f_1 es derivable en el intervalo (a, x_0) y f_2 es derivable en (x_0, b) .

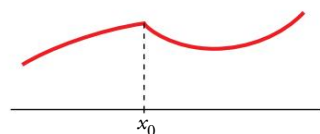
Para estudiar si $f(x)$ es derivable en x_0 , daremos los siguientes pasos:

1.º Vemos si f es continua en x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = f(x_0)$?

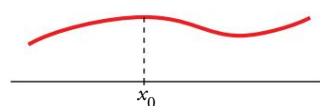
Si la respuesta es negativa, la función no es derivable. Si es afirmativa, seguimos.

2.º Calculamos las derivadas laterales $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_1(x)$ y $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_2(x)$.

¿Es $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ y es un valor finito? En caso afirmativo, este es el valor de $f'(x_0)$ y la función $f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b) .



¿Es continua en x_0 ?



¿Es derivable en x_0 ?

Ejercicios resueltos

- 1 Estudiar la derivabilidad de f en $x_0 = 2$ utilizando las reglas de derivación de las funciones polinómicas que conoces desde el curso pasado:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 4 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4. \text{ Por tanto, } f(x) \text{ es continua en } x_0 = 2.$$

- Derivabilidad en $x_0 = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x = 4 = f'(2^-) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 = 3 = f'(2^+) \end{aligned} \right\} \text{ Las derivadas laterales existen pero no coinciden. Por tanto, } f \text{ no es derivable en } x_0 = 2. \text{ Es un punto anguloso.}$$

- 2 Estudiar la derivabilidad en $x_0 = -2$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + x, & x \leq -2 \\ x^2 + 5x + 8, & x > -2 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^3 + 3x^2 + x) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + (-2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + 5x + 8) = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 8 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2. \text{ Además } f(-2) = 2. \text{ Por tanto } f(x) \text{ es continua en } x_0 = -2.$$

- Derivabilidad en $x_0 = -2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x + 1, & x \leq -2, & \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x^2 + 6x + 1) = 1 = f'(-2^-) \\ 2x + 5, & x > -2, & \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (2x + 5) = 1 = f'(-2^+) \end{cases}$$

Las derivadas laterales son finitas y coinciden. Por tanto f es derivable en $x_0 = -2$ y es $f'(-2) = 1$.

- 3 Calcular m y n para que la siguiente función sea derivable en $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m, & x \leq 1 \\ -x^2 + nx, & x > 1 \end{cases}$$

- Para que sea continua en $x_0 = 1$, hemos de procurar que los trozos “empalmen”, es decir, que los límites laterales en $x = 1$ coincidan:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 - 5 + m \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -1 + n \end{aligned} \right\} 1 - 5 + m = -1 + n \rightarrow m - 4 = n - 1 \rightarrow m - n = 3$$

- f será derivable si las dos derivadas laterales en $x_0 = 1$ coinciden:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 5) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x + n) = -2 + n \end{aligned} \right\} -3 = -2 + n \rightarrow n = -1$$

La función será derivable si se cumplen las dos condiciones anteriores:

$$\left. \begin{aligned} m - n &= 3 \\ n &= -1 \end{aligned} \right\} m = 2, \quad n = -1$$

f es derivable en $x_0 = 1$ si $m = 2$, $n = -1$. Su derivada en $f'(1) = -3$.

Ejercicios propuestos

- 4 Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

- 5 Estudia la derivabilidad en $x_0 = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 3, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

- 6 Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

- 7 Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \leq 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$



En la web



Ejercicios para conseguir que una función definida a trozos sea continua y derivable.

2 Función derivada

Notación

Para las derivadas, se usan superíndices en romanos

$$f^I, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, \dots$$

Sin embargo, para las tres primeras el I se ha desfigurado, convirtiéndose en un apóstrofo:

$$f', f'', f'''$$

Si una función, f , es derivable en un intervalo, I , la función f' :

$$x \longrightarrow f'(x)$$

definida en I , se llama **función derivada** de f .

Si f' es derivable, su derivada se llama f'' (se lee **f segunda**).

Así, sucesivamente, se definen $f''', f^{IV}, \dots, f^n$ (f tercera, f cuarta, f n -ésima).

Otra forma de nombrar las derivadas es $Df, D^2f, D^3f, \dots, D^n f$.

La función derivada, $f'(x)$, puede obtenerse a partir de la expresión de $f(x)$ aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ es la derivada en un punto variable } x.$$

No obstante, habitualmente las derivadas de las funciones se obtienen a partir de las llamadas “reglas de derivación”, que permiten hallar con comodidad y rapidez la derivada de cualquier función. Conocemos muchas del curso pasado. Esas y algunas nuevas se verán en páginas posteriores.

Ejercicio resuelto

1 Dada la función:

$$f(x) = 5x - x^2$$

a) Hallar su función derivada, $f'(x)$, mediante el límite del cociente incremental.

b) Hallar $f'(x)$ mediante las reglas de derivación que conoces del curso pasado.

c) Hallar el valor de $f'(-3)$ y $f'(0)$.

d) Averiguar para qué valor de x se cumple la igualdad $f'(x) = 3$ y para qué valor es $f'(x) = 0$.

e) Hallar las derivadas sucesivas $f''(x), f'''(x), \dots$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h) - (x+h)^2] - [5x - x^2]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x + 5h - x^2 - 2xh - h^2 - 5x + x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h - 2xh - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 - 2x - h) = 5 - 2x \end{aligned}$$

b) Aplicando las reglas de derivación que ya conoces del curso pasado:

$$f'(x) = 5 - 2x$$

Conocer la expresión de $f'(x)$ tiene ventajas evidentes, como se apreciará en los apartados c) y d).

c) A partir de la expresión de $f'(x)$, podemos obtener, rápidamente, la derivada en cualquier punto.

$$f'(-3) = 5 - 2(-3) = 11$$

$$f'(0) = 5 - 2 \cdot 0 = 5$$

d) A partir de $f'(x)$ podemos averiguar las abscisas para las cuales $f'(x)$ toma un valor determinado.

¿Para qué valor de x es $f'(x) = 3$?

$$f'(x) = 5 - 2x = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow f'(1) = 3$$

¿Para qué valor de x es $f'(x) = 0$?

$$5 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = 2,5 \rightarrow f'(2,5) = 0$$

e) Las derivadas sucesivas de esta función son:

$$f''(x) = -2$$

$$f'''(x) = 0$$

$$f^{IV}(x) = 0$$

3 Reglas de derivación

La validez de todas estas reglas se demuestra en el penúltimo apartado de esta unidad.

SUMA	$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$	
PRODUCTO POR UN NÚMERO	$D[k \cdot f(x)] = k f'(x)$	
PRODUCTO	$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	
COCIENTE	$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$	
COMPOSICIÓN (regla de la cadena)	$D\{f[g(x)]\} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ $D\{f[g[h(x)]]\} = f'(g[h(x)]) \cdot g'[h(x)] \cdot h'(x)$	En la web  Ejercicios para repasar la composición de funciones.
POTENCIA	$D(x^k) = k \cdot x^{k-1}, k \in \mathbb{R} - \{0\}$ $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$	$D[f(x)^k] = k f(x)^{k-1} \cdot f'(x)$ $D[\sqrt{f(x)}] = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ $D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$
TRIGONOMÉTRICAS	$D(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$D[\operatorname{sen} f(x)] = \cos f(x) \cdot f'(x)$ $D[\cos f(x)] = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$ $D[\operatorname{tg} f(x)] = [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x)$
FUNCIONES ARCO (Inversas o recíprocas de las trigonométricas)	$D(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D(\operatorname{arc} \cos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$D[\operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$ $D[\operatorname{arc} \cos f(x)] = \frac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$ $D[\operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x)] = \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$
EXPONENCIALES	$D(e^x) = e^x$ $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$	$D[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ $D[a^{f(x)}] = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
LOGARÍTMICAS	$D(\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0$ $D(\ln x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ $D(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}, x > 0$ $D(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}, x \neq 0$	$D[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x) > 0$ $D[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x) \neq 0$ $D[\log_a f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x), f(x) > 0$ $D[\log_a f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x), f(x) \neq 0$

Ejercicio resuelto

1 Calcular la derivada de:

$$a) f(x) = x^5$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$c) f(x) = \sqrt[5]{x^3}$$

$$d) f(x) = \sqrt[3]{7x^2}$$

$$e) f(x) = x^3 - \sqrt{2x} + \frac{3}{x}$$

$$f) f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x + 1$$

$$g) f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 5x - 1)$$

$$h) f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

$$i) f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + 5x - 1}$$

$$j) f(x) = 5e^{x^2 + 3x}$$

$$k) f(x) = \operatorname{arc} \cos \sqrt{x}$$

$$l) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$$

$$m) f(x) = \ln(\ln x)$$

$$n) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}$$

$$o) f(x) = (x^2 - \sqrt{x} + \operatorname{sen} x)^4$$

$$p) f(x) = \ln \left[\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right]$$

$$a) f'(x) = 5x^4$$

$$b) f'(x) \stackrel{(1)}{=} D(x^{-4}) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

(1) Recuerda que la derivada de una función $f(x)$ se puede escribir utilizando la notación $f'(x)$ o bien $D[f(x)]$.

$$c) f'(x) = D(x^{3/5}) = \frac{3}{5}x^{3/5-1} = \frac{3}{5}x^{-2/5} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

$$d) f'(x) = D(\sqrt[3]{7} x^{2/3}) = \sqrt[3]{7} \cdot \frac{2}{3} x^{2/3-1} = \sqrt[3]{7} \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2\sqrt[3]{7}}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$e) f'(x) = 3x^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{1}{x^2} = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{x^2}$$

$$f) f'(x) = 12x^3 - 10x + 7$$

$$g) f'(x) = \cos(x^2 + 5x - 1)(2x + 5)$$

$$h) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cos x$$

$$i) f'(x) = \cos \sqrt{x^2 + 5x - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5x - 1}} (2x + 5)$$

$$j) f'(x) = 5D(e^{x^2 + 3x}) = 5e^{x^2 + 3x} \cdot D(x^2 + 3x) = 5e^{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3)$$

$$k) f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot D(\sqrt{x}) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$$

$$l) f'(x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen} x)^2} \cdot D(\operatorname{sen} x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

$$m) f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot D(\ln x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

$$n) f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot D(\sqrt{x}) = \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$o) f'(x) = 4(x^2 - \sqrt{x} + \operatorname{sen} x)^3 \cdot \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x \right)$$

$$\begin{aligned} p) f'(x) &= \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \cdot D\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right) = \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x(1 - \operatorname{sen} x) - (1 + \operatorname{sen} x)(-\cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} = \\ &= \frac{\cos x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{2 \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} \end{aligned}$$

Ejercicio resuelto

Esta derivada se puede resolver más cómodamente transformando la función utilizando logaritmos:

$$\begin{aligned} D \left[\ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right] &\stackrel{(*)}{=} D [\ln(1 + \operatorname{sen} x) - \ln(1 - \operatorname{sen} x)] = \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \cos x - \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} (-\cos x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \\ &= \frac{\cos x - \cos x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x \operatorname{sen} x}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = \\ &= \frac{2 \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} \end{aligned}$$

$$(*) \left(\text{pues } \ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B \right)$$

$$q) f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+1}$$

$$\begin{aligned} q) f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \cdot D[x \cdot \sqrt{x+1}] = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \cdot \left(1 \cdot \sqrt{x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \cdot \frac{2(x+1) + x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{4\sqrt{x^2(x+1)}^3} \end{aligned}$$

También puedes resolverla teniendo en cuenta que:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2(x+1)}$$

Ejercicios propuestos

En la web  Ejercicios para repasar el cálculo de derivadas.

1 Utiliza las reglas de derivación para calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}}$

f) $f(x) = \ln \sqrt{e^{\operatorname{tg} x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = \log(\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2$

i) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen}^2 x$

j) $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x+1} \cdot \cos \sqrt{x-1}$

k) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x}$

l) $f(x) = \operatorname{sen}(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = \cos^2 \sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

2 Halla las derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$

b) $y = x \cos x$

c) $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^2 x + x$

3 Calcula $f'(1)$ siendo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{3x}}{2^5 \sqrt[3]{x^2}} \cdot e^4$$

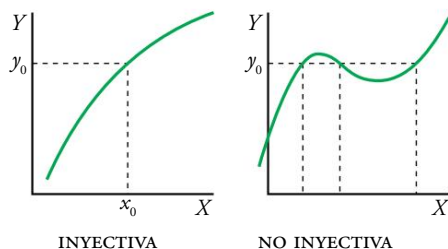
4 Calcula $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ siendo:

$$f(x) = (\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x) \cdot \operatorname{sen} 6x$$

5 Calcula $f'(0)$ siendo:

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

4 Derivada de una función conociendo la de su inversa



Hay funciones cuya derivada no es fácil de obtener directamente pero sí se conoce la derivada de su función inversa o recíproca. En este apartado, vamos a aprender a obtener la derivada de una a partir de la de la otra.

Empecemos recordando a qué se llama función inversa de otra.

■ Función inversa o recíproca de otra

Recuerda que una función f es inyectiva si cada valor de y corresponde a un único valor de x . Se llama **función inversa** de la función inyectiva f , y se designa f^{-1} , a la que cumple la siguiente condición:

$$\text{si } f(r) = s \text{ entonces } f^{-1}(s) = r$$

Es importante que tengas en cuenta lo siguiente:

- Las gráficas de una función y de su recíproca son simétricas respecto a la recta $y = x$.
- Entre una función f y su recíproca f^{-1} se cumplen las siguientes relaciones:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x. \text{ Es decir, } f^{-1}[f(x)] = x$$

$$x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) \xrightarrow{f} x. \text{ Es decir, } f[f^{-1}(x)] = x$$

- Si una función no es inyectiva no podemos hallar su inversa, pero podemos descomponerla en tramos en los que sea inyectiva, y así cada uno de ellos tendrá inversa.

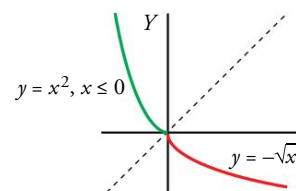
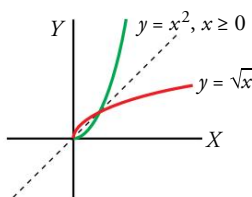
Ejemplos

- La función $y = x^2$ no es inyectiva, pero se puede descomponer en dos funciones:

$$y = x^2, x \geq 0$$

$$y = x^2, x \leq 0$$

cada una de las cuales sí es inyectiva y, por tanto, tiene inversa.



$$y = f(x) = x^2 \begin{cases} y = f_1(x) = x^2, x \geq 0 \rightarrow f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ y = f_2(x) = x^2, x \leq 0 \rightarrow f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$$

- La función recíproca de $y = \sqrt{x} + 1$, $x \in [0, 4]$ se obtiene así:

$$y = \sqrt{x} + 1 \xrightarrow[\text{x e y}]{\text{se cambian}} x = \sqrt{y} + 1 \xrightarrow{\text{se despeja y}} \sqrt{y} = x - 1 \rightarrow y = (x - 1)^2$$

Extremos del intervalo de definición de f^{-1} :

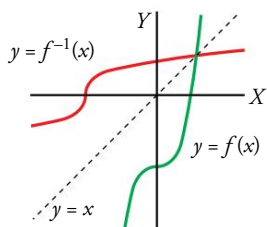
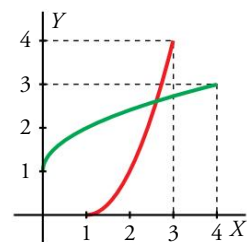
$$f(0) = \sqrt{0} + 1 = 1$$

$$f(4) = \sqrt{4} + 1 = 3$$

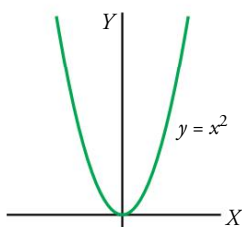
Por tanto:

$$f(x) = \sqrt{x} + 1, x \in [0, 4] \rightarrow$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2, x \in [1, 3]$$



Gráficas de funciones inversas



■ Obtención de $(f^{-1})'(x)$ conociendo $f'(x)$

Si conocemos la derivada de una función f y, a partir de ella, queremos obtener la derivada de su función recíproca, f^{-1} , procedemos del siguiente modo:

- Por ser f^{-1} recíproca de f , se cumple que $f[f^{-1}(x)] = x$.
- Derivando: $f'[f^{-1}(x)] \cdot (f^{-1})'(x) = 1$, por la regla de la cadena.
- Despejando:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Por ejemplo:

- $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f[f^{-1}(x)] = x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = x \xrightarrow{\text{Derivando}} 2\sqrt{x} \cdot D(\sqrt{x}) = 1 \rightarrow D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$

$$f[f^{-1}(x)] = x \Leftrightarrow \sin(\arcsin x) = x \xrightarrow{\text{Derivando}} \cos(\arcsin x) \cdot D(\arcsin x) = 1 \rightarrow D(\arcsin x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

¿Qué significa $\cos(\arcsin x)$? Es el coseno de un ángulo cuyo seno es x . Es decir, sabemos que $\sin \alpha = x$ y queremos calcular $\cos \alpha$. Pues hagámoslo:

$$\sin \alpha = x \text{ y como } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{Por tanto, } D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

■ Obtención de $(f^{-1})'(c)$ sin obtener previamente $(f^{-1})'(x)$

Calculemos, por ejemplo, $(\arcsin)' \left(\frac{1}{2} \right)$:

$$f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

$$\text{Calculamos } f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right): \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = a \rightarrow \sin a = \frac{1}{2}, a = \frac{\pi}{6}$$

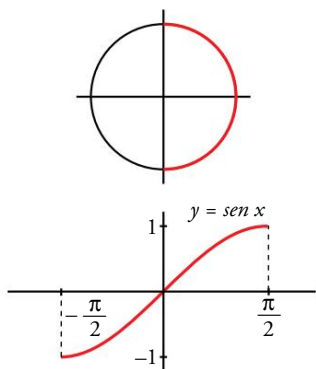
$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(\pi/6)} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\cos \pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(*) f'(x) = D(\sin x) = \cos x. \text{ Por tanto, } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Naturalmente, se puede llegar al mismo resultado conociendo la expresión de $(f^{-1})'(x)$. Veámoslo:

$$(f^{-1})'(x) = D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \rightarrow (f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para que $f(x) = \sin x$ sea inyectiva, la tomamos en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



En ese intervalo, $\cos x$ es positivo o 0. Por eso, al despejar $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ nos hemos quedado solo con el signo +.

■ Observa

No necesitamos conocer la expresión de $(f^{-1})'$ para calcular sus valores.

Ejercicios propuestos

1 Halla $(f^{-1})'(x)$ a partir de $f'(x)$:

a) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1, 3]$

b) $f(x) = x^3$

2 $f(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Halla $(f^{-1})'(\sqrt{3})$ de dos formas:

a) Obteniendo, previamente, $(f^{-1})'(x)$.

b) Directamente.

5 Derivada de una función implícita

¿Se puede poner y' en vez de $f'(x)$?

Utilizamos aquí, por primera vez, la expresión y' para designar la derivada de la función $y = f(x)$. Al utilizar esta nomenclatura se está identificando la variable y con la función f . Esto es correcto y se puede utilizar siempre que se tenga claro el significado.

(De esto se habla en la página 307 del libro de primer curso: ¿Es correcto poner y' ?)

Observa

Si ϕ'_x es el resultado de derivar ϕ suponiendo que y es una constante y ϕ'_y , suponiendo x como una constante:

$$y' = \frac{-\phi'_x}{\phi'_y}$$

Hay funciones que vienen dadas mediante expresiones $\phi(x, y) = 0$, en las cuales es difícil o imposible despejar la y . Por ejemplo:

$$y^3 - 7x^2 + 5y^2x + 17 = 0$$

En ellas, los valores de y quedan *implícitamente* dados por la expresión, pero no es posible obtener explícitamente una función del tipo $y = f(x)$. La derivada, y' , de la función, no es, sin embargo, difícil de calcular. Veámoslo sobre el ejemplo anterior:

Al derivar $y^3 - 7x^2 + 5y^2x + 17 = 0$, obtenemos:

$$3y^2y' - 14x + 5(2y y'x + y^2) = 0 \rightarrow 3y^2y' - 14x + 10xy y' + 5y^2 = 0$$

$$(3y^2 + 10xy)y' = 14x - 5y^2 \rightarrow y' = \frac{14x - 5y^2}{3y^2 + 10xy}$$

Observamos que y' viene dada en función de x y de y . Por tanto, para hallar el valor de la derivada en un punto, hemos de conocer su abscisa y su ordenada. Por ejemplo, sabiendo que la curva pasa por $(2, 1)$, obtenemos su derivada en ese punto:

$$y'(2, 1) = \frac{14 \cdot 2 - 5}{3 + 10 \cdot 2} = 1$$

Ejercicios resueltos

- 1 Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva dada implícitamente por la expresión $x^2 - x + \operatorname{tg}(x + y) = 1$ en el punto de abscisa $x = 0$ considerando:

$$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- 2 Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

en los puntos de abscisa $x = 8$.

Empezamos averiguando la ordenada del punto. Para ello, sustituimos x por 0 y obtenemos, sencillamente, $\operatorname{tg} y = 1 \rightarrow y = \frac{\pi}{4}$.

Por tanto, hemos de poner la recta tangente en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Necesitamos conocer su pendiente.

Derivamos la expresión: $2x - 1 + [1 + \operatorname{tg}^2(x + y)](1 + y') = 0$

Sustituimos $x = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$: $-1 + \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right](1 + y') = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -1 + (1 + 1)(1 + y') = 0 \rightarrow -1 + 2 + 2y' = 0 \rightarrow y' = -\frac{1}{2}$$

La pendiente de la recta tangente es $-\frac{1}{2}$. Su ecuación es: $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 0)$.

Obtención de las ordenadas de los puntos de abscisa $x = 8$:

$$\frac{8^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} \rightarrow y = \pm \frac{36}{10} = \pm 3,6$$

Para hallar la derivada podríamos despejar la y para, después, derivar. Pero parece más cómodo proceder como función implícita:

$$\frac{2x}{100} + \frac{2y y'}{36} = 0 \begin{cases} x = 8, y = 3,6 \rightarrow \frac{16}{100} + \frac{7,2y'}{36} = 0 \rightarrow y' = -0,8 \\ x = 8, y = -3,6 \rightarrow \frac{16}{100} - \frac{7,2y'}{36} = 0 \rightarrow y' = 0,8 \end{cases}$$

Hay dos rectas tangentes: $y = 3,6 - 0,8(x - 8)$ e $y = -3,6 + 0,8(x - 8)$.

Ejercicios propuestos

- 1 Halla la tangente (o las tangentes) a las curvas siguientes en el punto que se indica:

a) $3x^2 - 5xy + 2y^2x - y^3 - 27 = 0$, en $x_0 = 3$

b) $\operatorname{sen}(x^2y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16}$, en $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, en $x_0 = 5$

6 Derivación logarítmica

Recuerda

$$\ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$\ln(A)^B = B \ln A$$

En ocasiones, tomando logaritmos y aprovechando sus propiedades, se simplifica notablemente el cálculo de la derivada de una función. Veámoslo en el ejemplo siguiente: $f(x) = x^x$.

Esta expresión no es potencial, porque el exponente no es constante, ni exponencial, porque la base no es constante. Carecemos, pues, de reglas para hallar su derivada. Sin embargo, si tomamos logaritmos, obtenemos una función que sabemos derivar:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1) = x^x \ln x + x^x$$

Esta técnica de hallar la derivada tomando previamente logaritmos recibe el nombre de **derivación logarítmica**.

Es casi imprescindible recurrir a ella para poder derivar funciones cuya expresión es de la forma $\phi(x) = \alpha(x)^{\beta(x)}$. Veámoslo:

$$\ln \phi(x) = \beta(x) \ln \alpha(x)$$

Derivando:

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \beta'(x) \cdot \ln \alpha(x) + \beta(x) \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}$$

Se despeja $\phi'(x)$ y se sustituye $\phi(x)$ por su expresión:

$$\phi'(x) = \alpha(x)^{\beta(x)} \left[\beta'(x) \cdot \ln \alpha(x) + \beta(x) \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \right]$$

También recurriremos a esta técnica para demostrar la validez de algunas de las reglas de derivación que conoces.

Ejercicio resuelto

1 Hallar la derivada de:

a) $f(x) = x^{\sin x}$

b) $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x}}$

a) $\ln f(x) = (\sin x) \ln x \rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

Por tanto, $f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$.

b) Aunque se puede derivar directamente, en este caso resultará más cómodo si aplicamos la derivación logarítmica:

$$\ln f(x) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^2}{1-x} \right) = \frac{1}{3} [\ln x^2 - \ln(1-x)] = \frac{1}{3} [2 \ln x - \ln(1-x)]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{-1}{1-x} \right) = \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x} \rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x-2}{x^2-x}$$

Ejercicios propuestos

1 Halla la función derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x) = (\cos x + 1)^{x^2-1}$

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-1}} \sin^2 x$

c) $h(x) = (\cos x)^{e^{x^2}+1}$

7 Obtención razonada de las fórmulas de derivación

El orden en que iremos haciendo las sucesivas demostraciones es muy distinto del orden en que fueron presentadas las fórmulas que vamos a demostrar.

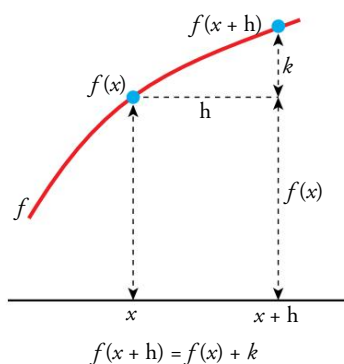
La secuencia que aquí seguimos permite, aplicando cada resultado en la obtención de los siguientes, simplificar notablemente algunas demostraciones.

DERIVADA DE LA SUMA DE DOS FUNCIONES: $\phi(x) = f(x) + g(x)$

Efectuamos la demostración basándonos en la definición de derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} &= \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ \phi'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA: $\phi(x) = g[f(x)]$



$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} &\stackrel{(1)}{=} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{g[f(x) + k] - g[f(x)]}{k} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$, en cuyo caso $k \rightarrow 0$, será:

$$\phi'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

(1) Multiplicamos y dividimos por $f(x+h) - f(x)$.

(2) Expresamos $\phi(x)$ como $g[f(x)]$ y, por tanto, $\phi(x+h) = g[f(x+h)]$.

(3) Suponemos que $f(x)$ cumple la siguiente condición:

Podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ para el cual se cumple que:

si $s \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, entonces $f(s) \neq f(x)$.

En tal caso, tomando $|h| < \varepsilon$ será $f(x+h) = f(x) + k$, o lo que es lo mismo: $f(x+h) = f(x) + k$, con $k \neq 0$.

Por tanto, $g[f(x+h)] = g[f(x) + k]$.

DERIVADA DE UN LOGARITMO NEPERIANO: $\phi(x) = \ln x, x > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} &= \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \\ &= \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Ahora vamos a tomar el límite cuando $h \rightarrow 0$.

Como $x > 0$, entonces $\frac{x}{h} \rightarrow \infty$.

Recordemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Aquí $\frac{x}{h}$ hace las veces de n .

$$\phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{\frac{x}{h}} \right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{1/x}$$

Si tenemos en cuenta que $\ln e^k = k \ln e = k$, resulta:

$$\phi'(x) = \frac{1}{x}$$

Hemos considerado $x > 0$, pero puedes observar en el margen la comprobación de que $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$.

Este resultado, junto con el de la función compuesta, permite utilizar la técnica de “la derivación logarítmica” (se toman logaritmos y, después, se deriva). Con esta técnica vamos a probar los siguientes resultados.

DERIVADA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES: $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$

Tomamos logaritmos: $\ln \phi(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$

Derivamos:

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Despejamos $\phi'(x)$:

$$\phi'(x) = \phi(x) \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \right] = f(x) \cdot g(x) \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \right] = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$\phi'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

DERIVADA DEL PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA FUNCIÓN: $\phi(x) = k f(x)$

Es consecuencia inmediata de la anterior, considerando k como una función cuya derivada es 0:

$$\phi'(x) = k' f(x) + k f'(x) = 0 + k f'(x) = k f'(x)$$

$$\phi'(x) = k f'(x)$$

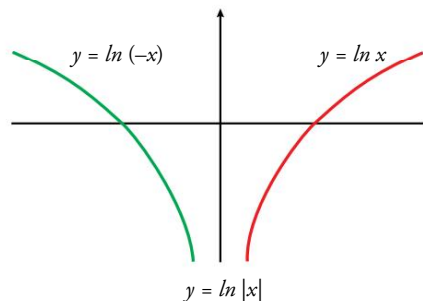
Observa

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0$$



DERIVADA DE UNA POTENCIA: $\phi(x) = x^k$

Tomando logaritmos y derivando:

$$\ln \phi(x) = k \ln x \rightarrow \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = k \cdot \frac{1}{x}$$

Despejamos $\phi'(x)$:

$$\phi'(x) = k \cdot \frac{1}{x} \cdot \phi(x) = k \cdot \frac{1}{x} \cdot x^k \rightarrow \phi'(x) = k x^{k-1}$$

DERIVADA DE UN COCIENTE: $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

Es consecuencia de la derivada de un producto y de que:

$$D\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\phi'(x) = D\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)$$

$$\phi'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

DERIVADA DE UN LOGARITMO DE BASE CUALQUIERA: $\phi(x) = \log_a x$

$$\text{Como } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad D(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot D(\ln x) \rightarrow \phi'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL: $\phi(x) = e^x$

$$\ln \phi(x) = x \rightarrow \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = 1 \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^x$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE CUALQUIERA: $\phi(x) = a^x$

$$\ln \phi(x) = x \ln a \rightarrow \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \ln a \rightarrow \phi'(x) = a^x \ln a$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN SENO: $\phi(x) = \text{sen } x$

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} =$$

$$= \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \cdot \text{sen} \frac{x+h-x}{2}}{h} = \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = 1$, al tomar límites cuando $h \rightarrow 0$ obtenemos la siguiente igualdad:

$$\phi'(x) = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Recuerda

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Recuerda

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{A-B}{2}$$

Secante, cosecante y cotangente

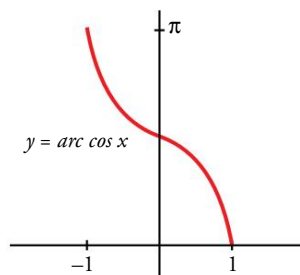
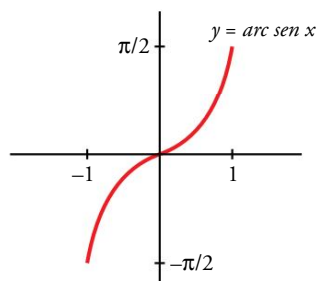
Dado un ángulo α :

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Ten en cuenta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$



DERIVADA DE LA FUNCIÓN COSENO: $\phi(x) = \cos x$

$$\phi(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\phi'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \phi'(x) = -\sin x$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN TANGENTE: $\phi(x) = \tan x$

$$\phi'(x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\phi'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO SEN: $\phi(x) = \arcsen x$

$$\phi(x) = \arcsen x \rightarrow \sin \phi(x) = x$$

$$\text{Derivamos: } \cos \phi(x) \cdot \phi'(x) = 1 \rightarrow \phi'(x) = \frac{1}{\cos \phi(x)}$$

¿Cuál es el coseno del ángulo cuyo seno es x ?

$$\sin^2 \phi(x) + \cos^2 \phi(x) = 1 \rightarrow \cos \phi(x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \phi(x)} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Por tanto: $\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Nos quedamos con el valor positivo de la raíz cuadrada porque sabemos que la función $\arcsen x$ es creciente.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO COSENO: $\phi(x) = \arccos x$

$$\phi(x) = \arccos x \rightarrow \cos \phi(x) = x$$

$$\text{Derivamos: } [-\sin \phi(x)] \cdot \phi'(x) = 1 \rightarrow \phi'(x) = \frac{-1}{\sin \phi(x)}$$

$$\sin^2 \phi(x) + \cos^2 \phi(x) = 1 \rightarrow$$

$$\sin \phi(x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \phi(x)} = \pm \sqrt{1 - x^2} \rightarrow \phi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

En este caso, nos quedamos con el valor negativo de la raíz porque sabemos que la función $\arccos x$ es decreciente.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO TANGENTE: $\phi(x) = \arctan x$

$$\phi(x) = \arctan x \rightarrow \tan \phi(x) = x$$

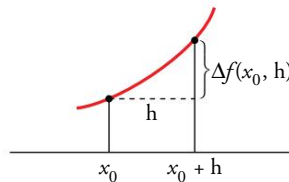
$$\text{Derivamos: } [1 + \tan^2 \phi(x)] \phi'(x) = 1 \rightarrow \phi'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 \phi(x)} \rightarrow \phi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

8 Diferencial de una función

Incremento y diferencial de una función en un punto

El **incremento de una función** f en x_0 , correspondiente a un incremento h de la variable independiente, es:

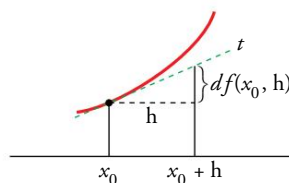
$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$



Su significado es el crecimiento de la función entre los puntos de abscisas x_0 y $x_0 + h$.

La **diferencial de una función** f en x_0 , correspondiente a un incremento h de la variable independiente, es:

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$



t es la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 . El significado de $df(x_0, h)$ es el crecimiento de la ordenada de la recta t entre x_0 y $x_0 + h$.

La diferencial como aproximación del incremento

La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor se ciñe a ella. Por esta razón, la diferencial $df(x_0, h)$ puede tomarse como una buena aproximación del incremento $\Delta f(x_0, h)$, en el mismo punto, x_0 , y para el mismo valor de h , cuando $|h|$ es pequeño.

Esto se resume en la siguiente proposición:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, h)}{df(x_0, h)} = 1$$

Demostración

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, h)}{df(x_0, h)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{f'(x_0) \cdot h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot f'(x_0) = 1 \end{aligned}$$

La derivada como cociente de diferenciales

Para la función identidad, $g(x) = x$, se tiene que $g'(x) = 1$ y que, por tanto:

$$dg(x) = g'(x) \cdot h = 1 \cdot h = h$$

Es decir, $dx = h$. Teniendo esto en cuenta, podemos poner:

$$df(x) = f'(x) dx \Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

La derivada se puede expresar como cociente de diferenciales.

Notación

Ponemos $\Delta f(x_0, h)$ porque el incremento de f depende tanto del punto x_0 como del incremento h de la variable independiente. Por lo mismo se pone $df(x_0, h)$.

Observa

La diferencial nos permite analizar en las cercanías de un punto una función cualquiera f a partir de una función lineal, ya que:

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

es una función lineal de x .

En la web

Ejemplo que muestra cómo la diferencial se aproxima al incremento.

Ejercicios resueltos

1 Obtener $df(x)$, siendo:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 9$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + \cos x}$

a) $df(x) = f'(x) dx = (2x - 3)dx$

b) $df(x) = \frac{2x - \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x^2 + \cos x}} dx$

2 Calcular el espacio recorrido por una partícula cuya posición viene dada por la ecuación:

$$s(t) = 2t^4 - t^3 + t^2$$

 s en centímetros, t en segundos, desde $t = 4$ hasta $t = 4,01$.

a) Exactamente.

b) Aproximadamente.

a) El espacio recorrido se obtiene calculando el incremento de la función posición entre los instantes $t = 4$ s y $t = 4,01$ s:

$$\Delta s = s(4,01) - s(4) = 468,73813102 - 464 = 4,73813102 \text{ cm}$$

b) Se puede obtener aproximadamente a partir de la diferencial, ds , tomando $t_0 = 4$, $dt_0 = h = 4,01 - 4 = 0,01$:

$$ds = s'(t) \cdot dt = (8t^3 - 3t^2 + 2t) \cdot dt$$

Para $t_0 = 4$ y $dt_0 = 0,01$: $ds = 472 \cdot 0,01 = 4,72 \text{ cm}$

Podemos apreciar que la aproximación es muy buena.

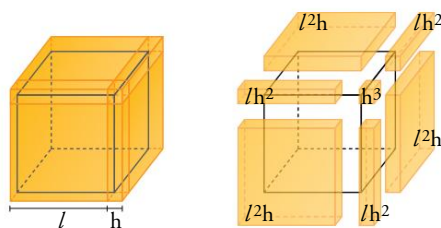
3 Calcular el aumento de volumen que experimenta un cubo de lado l sabiendo que cada lado aumenta h .Concretar el resultado para $l = 10 \text{ cm}$ y $h = 0,02 \text{ cm}$.Función: el volumen del cubo en función del lado $\rightarrow V = l^3$

Aumento:

$$\Delta V = (l + h)^3 - l^3 = (l^3 + 3l^2h + 3lh^2 + h^3) - l^3 = 3l^2h + 3lh^2 + h^3$$

Aumento aproximado: $dV = V'(l) \cdot h = 3l^2h$

Interpretación geométrica:

 ΔV está formado por los siete elementos que se desprenden del cubo en la segunda figura. dV está formada por las tres placas cuadradas.La diferencia $\Delta V - dV$ consta de los tres listones y el cubito. Para h pequeño, estos cuatro elementos tienen un volumen insignificante.Para $l = 10 \text{ cm}$, $h = 0,02 \text{ cm}$, obtenemos:

$$\Delta V = 10,02^3 - 10^3 = 6,012 \text{ cm}^3, \quad dV = 3 \cdot 10^2 \cdot 0,02 = 6 \text{ cm}^3$$

La diferencia, $0,012 \text{ cm}^3$, es insignificante.

En la web



Aplicación de la diferencial para hacer aproximaciones.

Ejercicios propuestos

1 Calcula Δy , dy , $\Delta y - dy$:

a) $y = x^2 - x$ para $x_0 = 3$, $dx_0 = 0,01$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ para $x_0 = 2$, $dx_0 = 0,1$

c) $y = \sqrt[3]{x}$ para $x_0 = 125$, $dx_0 = 1$

2 A una bola de bronce de 7 cm de radio se le da un baño de plata de 0,2 mm de grosor.

Calcula la cantidad de plata empleada (aproximadamente, a partir de la diferencial).

3 Calcula una aproximación de $\sqrt[3]{126}$ dando los siguientes pasos:

• Llama $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

• Obtén df para $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1$.

• Obtén $f(126) \approx f(125) + df(125)$ para $dx_0 = 1$.

4 Procediendo como en el ejercicio anterior, halla, aproximadamente:

a) $1,01^4$

b) $\sqrt{15,8}$

c) $\sqrt[3]{66}$

Ejercicios y problemas resueltos

1. Definición de función derivada

Hallar la función derivada de

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

utilizando la definición.

Función derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; f(x+h) = \sqrt{x+h+3}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h+3} - \sqrt{x+3}}{h} = \frac{0}{0}. \text{ Indeterminación.}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}$ para poder simplificar la fracción:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h+3})^2 - (\sqrt{x+3})^2}{h(\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Hazlo tú. Halla la función derivada de

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \text{ utilizando la definición.}$$

2. Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos

Estudiar la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 8, & x \leq -2 \\ 4 - x^2, & -2 < x < 2 \\ 4x - 8, & x \geq 2 \end{cases}$$

Representar las gráficas de f y f' .

• f está definida por funciones polinómicas en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$. Por tanto, f es continua y derivable en esos intervalos.

• f es continua en $x = -2$ y en $x = 2$, porque:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$$

Estudiamos su derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

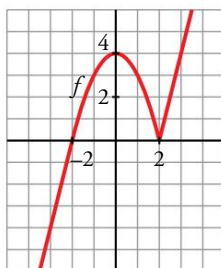
$$f'(-2^-) = f'(-2^+) = 4 \rightarrow f \text{ es derivable en } x = -2$$

$$f'(2^-) = -4, f'(2^+) = 4 \rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \rightarrow f \text{ no es derivable en } x = 2$$

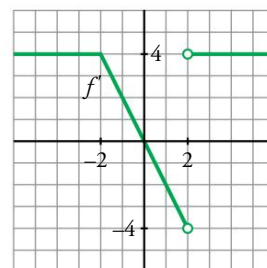
Hazlo tú. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representa las gráficas de f y f' .



f tiene un punto anguloso en $x = 2$.



f' no existe en $x = 2$.

3. Valor de un parámetro para que f sea derivable

Hallar el valor que ha de tener el parámetro m para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en $x = 1$, ha de ser continua en $x = 1$.

- Si f es continua en $x = 1$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3 - m$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - mx^2) = 3 - m \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{mx} = \frac{2}{m} \end{cases}$$

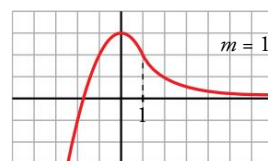
$$3 - m = \frac{2}{m} \rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \quad \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

f es continua en $x = 1$ si $m = 1$ o bien $m = 2$.

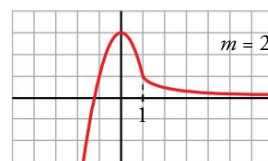
- f será derivable en $x = 1$ si $f'(1^-) = f'(1^+)$.

Para $m = 1$: $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 1 \rightarrow f'(1^-) = -2 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \rightarrow f'(1^+) = -2 \end{cases} \quad f \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } m = 1.$$



Para $m = 2$: $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$



$$f'(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x < 1 \rightarrow f'(1^-) = -4 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \rightarrow f'(1^+) = -1 \end{cases} \quad f \text{ no es derivable en } x = 1 \text{ si } m = 2.$$

Hazlo tú. Halla el valor que ha de tener a para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^4 - 2x^2 - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Función derivada

Hallar la función derivada de la siguiente función:

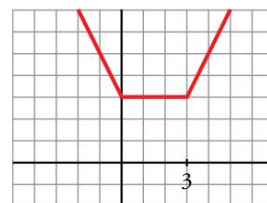
$$f(x) = |x - 3| + |x|$$

- Definimos f por intervalos teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} |x - 3| &= \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \\ |x| &= \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c|c} |x - 3| & |x| & |x - 3| + |x| \\ \hline -x + 3 & -x & -2x + 3 \\ \hline x - 3 & x & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



Hazlo tú. Calcula la función derivada de esta función y representa f y f' .

$$f(x) = |2 - x| + |x + 1|$$

- $f'(0^-) = -2$, $f'(0^+) = 0 \rightarrow f$ no es derivable en $x = 0$ porque $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

$$f'(3^-) = 0$$
, $f'(3^+) = 2 \rightarrow f$ no es derivable en $x = 3$ porque $f'(3^-) \neq f'(3^+)$.

Ejercicios y problemas resueltos

5. Reglas de derivación

Hallar la función derivada de estas funciones:

a) $y = \arcsen(2x\sqrt{1-x^2})$

b) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{\sen x \cdot \cos x}{(1-x)^2}}$

c) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Hazlo tú. Halla la función derivada de estas funciones:

a) $y = \arcsen\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

b) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot D(2x\sqrt{1-x^2}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} \cdot \left(2\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^2}} \cdot \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-2x^2} \cdot \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

b) Antes de derivar, aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\frac{\sen x \cos x}{(1-x)^2}\right)^{1/3} = \frac{1}{3} [\ln(\sen x) + \ln(\cos x) - 2 \ln(1-x)] \\ y' &= \frac{1}{3} \left[\frac{\cos x}{\sen x} - \frac{\sen x}{\cos x} + \frac{2}{1-x} \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{\cos^2 x - \sen^2 x}{\sen x \cos x} + \frac{2}{1-x} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{\cos 2x}{(1/2) \sen 2x} + \frac{2}{1-x} \right] = \frac{2}{3} \left(\cot g 2x + \frac{1}{1-x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot D\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = (1-x^2) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \\ &= (1-x^2) \cdot \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

6. Coincidencia en la derivada

Hallar la derivada de esta función:

$$y = f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

¿El resultado es la derivada de alguna función que conoces?

Justificar a qué se debe.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot D\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{2x^2+2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Observamos que la derivada de f es igual a la derivada de la función $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

Si dos funciones que no son iguales tienen igual derivada, difieren en una constante.

La función $f(x)$ no está definida en el punto $x = -1$. Sin embargo, podemos asegurar que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x = -1$.

Reflexionamos sobre la función $f(x)$ si $x \neq -1$.

- A la izquierda de $x = -1$: $f(-2) - g(-2) = \operatorname{arctg}(3) - \operatorname{arctg}(-2) \stackrel{(*)}{=} \frac{3\pi}{4}$

(*) El resultado obtenido con calculadora se divide por π obteniéndose $0,75 = 3/4$.

- A la derecha de $x = -1$: $f(0) - g(0) = \operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(0) = -\frac{\pi}{4}$

Por tanto, la función $f(x)$ será:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} g(x) + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x < -1 \\ g(x) - \frac{\pi}{4} & \text{si } x > -1 \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x < -1 \\ \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$



7. Obtención de $(f^{-1})'(x)$ conociendo $f'(x)$

Damos por sabido que la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{es } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Lo vimos en el Ejercicio resuelto 5).

A partir de este resultado, calcular la derivada de la inversa de $f(x)$.

Hazlo tú. Sabemos que:

$$f(x) = \ln(\ln x)^2 \text{ y que } f'(x) = \frac{2}{x \ln x}$$

Calcula $(f^{-1})'(x)$.

- Aplicamos a este caso la relación entre las derivadas $(f^{-1})'$ y f' :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-[f^{-1}(x)]^2}}} = \sqrt{1-[f^{-1}(x)]^2}$$

- Para seguir, hemos de obtener la expresión de $(f^{-1})(x)$ a partir de la de $f(x)$:

$$y = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[\text{la } x \text{ por la } y]{\text{intercambiamos}} x = \arctan \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \rightarrow \tan x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \tan^2 x = \frac{y^2}{1-y^2} \rightarrow (1-y^2) \tan^2 x = y^2 \rightarrow y^2(1+\tan^2 x) = \tan^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \rightarrow y = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}; \text{ es decir, } f^{-1}(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

Por tanto:

$$(f^{-1})'(x) = \sqrt{1-[f^{-1}(x)]^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+\tan^2 x - \tan^2 x}{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

8. Obtención de $(f^{-1})'(x_0)$ sin calcular $(f^{-1})'(x)$

Dada la función del ejercicio anterior

$$f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

cuya derivada se conoce:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Calcular $(f^{-1})'(0)$ y $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sin utilizar la función derivada de la inversa, $(f^{-1})'(x)$.

Volvemos a utilizar la recíproca para ayudarnos a hacer estos cálculos:

$$f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

- Para hallar $(f^{-1})'(0)$, calculamos primero $f^{-1}(0) = \frac{\tan 0}{\sqrt{1+\tan^2 0}} = \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$.

Por tanto:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(0)]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}} = 1$$

- Para hallar $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, calculamos primero $f^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$:

$$f^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3}}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \frac{1}{f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Habríamos llegado a los mismos resultados utilizando la derivada de la función inversa, $(f^{-1})'(x)$.

$$(f^{-1})'(x) = D\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \rightarrow \begin{cases} (f^{-1})'(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 0}} = 1 \\ (f^{-1})'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hazlo tú. Dada la función del ejercicio anterior, calcula $(f^{-1})'(0)$ sin utilizar la función derivada de la inversa $(f^{-1})'(x)$.

Ejercicios y problemas guiados

1. Obtención de los valores de dos parámetros para que la función sea derivable

Calcula los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{a}{x} + b \cdot e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Para que la función sea derivable, debe ser continua. Para ello, los parámetros a y b deben cumplir cierta condición. Se obtiene así una primera ecuación que los relaciona.
- Para que f sea derivable, a y b tienen que cumplir otra nueva ecuación.
- Ya tienes un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas a y b . Resuélvelo.
- Comprueba que la función así obtenida es continua y derivable en $x = 1$.

Solución: $a = \frac{5}{4}$; $b = -\frac{5}{4}$

2. Derivación implícita

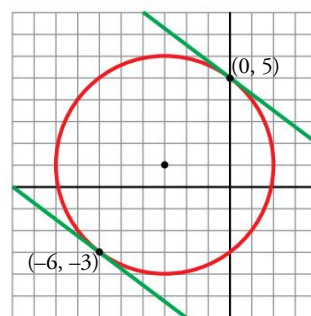
Halla los puntos de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$$

en los que su tangente tiene pendiente $-\frac{3}{4}$.
Representala.

- Deriva en implícita y sustituye y' por su valor, $-\frac{3}{4}$.
Obtendrás una relación lineal entre x e y (ecuación de una recta, r).
- Halla la intersección de r con la circunferencia. Obtendrás los puntos que pide el enunciado.
- Representala.

Solución: $(-6, -3)$, $(0, 5)$.



3. Derivación logarítmica

Utiliza la derivación logarítmica y las propiedades de los logaritmos para calcular las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log_x \operatorname{tg} x$

b) $y = (x+1)^{\operatorname{tg} x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt[4]{x+1}$

- a) Utiliza la definición de logaritmo para expresar la igualdad en forma exponencial.
Toma logaritmos y aplica la propiedad del logaritmo de una potencia para despejar la y .
Deriva la función obtenida.
- b) Toma logaritmos en los dos miembros y aplica la misma propiedad que en el apartado anterior.
Deriva la función implícita obtenida y despeja y' .
- c) Toma logaritmos como en los apartados anteriores y aplica la propiedad del logaritmo de un producto.
Expresa las raíces como potencias y aplica los logaritmos para “bajar” el exponente.
Deriva como en el apartado anterior.

Solución:

a) $y = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln x} \rightarrow y' = \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \frac{\ln \operatorname{tg} x}{x} \right)$

b) $y' = \left[\frac{\ln(x+1)}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x+1} \right] \cdot (x+1)^{\operatorname{tg} x}$

c) $y' = \frac{5x-1}{4(x^2-1)} \left[\sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt[4]{x+1} \right]$

Para practicar

Definición de derivada

- 1 Halla con calculadora el cociente incremental $\frac{\Delta f}{h}$ para $x_0 = 2$ y $h = 0,1$ de:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Compara resultados con las derivadas de estas funciones en el punto de abscisa 2.

- 2 Halla con calculadora el cociente incremental $\frac{\Delta f}{h}$ para $x_0 = \pi/3$ y $h = 0,01$ de:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = \cos x$ c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

Compara resultados con las derivadas de estas funciones en el punto de abscisa $\pi/3$.

- 3 Sabemos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

A partir de esta expresión, justifica la validez de esta otra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

- 4 Escribe la expresión de los siguientes límites (se supone que las funciones que intervienen son derivables):

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(2+x) - \phi(2)}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5) - f(5+x)}{x}$

- 5 El límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi + h) - \operatorname{sen} \pi}{h}$ es la derivada de la función *seno* en el punto de abscisa π , es decir, $\operatorname{sen}'(\pi)$. Por tanto, el límite es:

$$\operatorname{sen}'(\pi) = \cos(\pi) = -1$$

Calcula análogamente, es decir, a partir de las reglas de derivación que ya conoces, los siguientes límites:

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2+h} - e^2}{h}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 3x + 1) - 1}{x - 3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$

- 6 Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(2)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

- 7 Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Reglas de derivación

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

8 a) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

b) $y = \sqrt[3]{3x^2}$

9 a) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}$

b) $y = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2}$

10 a) $y = \frac{\ln x}{x}$

b) $y = 7e^{-x}$

11 a) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b) $y = \operatorname{sen} x \cos x$

12 a) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

b) $y = \ln(x^2 + 1)$

13 a) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

b) $y = \cos^2(2x - \pi)$

14 a) $y = \operatorname{sen}^2 x$

b) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

15 a) $y = \operatorname{sen} x^2$

b) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^2 + 1)$

16 a) $y = (2\sqrt{x} - 3)^7$

b) $y = \log_2 \sqrt{x}$

17 a) $y = \operatorname{sen}^2 x^2$

b) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$

18 a) $y = \cos^5(7x^2)$

b) $y = 3^x + 1$

19 a) $y = \sqrt[3]{(5x-3)^2}$

b) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x^2}{3}$

20 a) $y = \ln(2x - 1)$

b) $y = \operatorname{tg} \frac{x^2}{2}$

21 a) $y = \ln(x^2 - 1)$

b) $y = \operatorname{arc} \cos \sqrt{2x}$

22 a) $y = \ln \sqrt{1-x}$

b) $y = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$

23 a) $y = \log_3(7x + 2)$

b) $y = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{3}{x}\right)$

24 a) $y = e^{4x}$

b) $y = \ln \left(\ln \frac{1}{x}\right)$

25 a) $y = 2^x$

b) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

26 a) $y = 5\operatorname{tg}^3(3x^2 + 1)$

b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

27 a) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x^2}$

b) $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}$

Ejercicios y problemas propuestos

Otras técnicas de derivación

28 Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & \text{b) } y = \ln(x \operatorname{tg} x)^2 \\ \text{c) } y = \ln \left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2} \right) & \text{d) } y = \ln(2^x \cdot \operatorname{sen}^2 x) \end{array}$$

29 Calcula la derivada de estas funciones implícitas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + y^2 = 9 & \text{b) } x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9 \\ \text{c) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 & \text{d) } \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(y+3)^2}{14} = 1 \\ \text{e) } x^3 + y^3 = -2xy & \text{f) } xy^2 = x^2 + y \\ \text{g) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1 & \text{h) } 4x^2 + 4y^2 + 8x + 3 = 0 \\ \text{i) } x^2 + xy + y^2 = 0 & \text{j) } yx - x^2 - y = 0 \end{array}$$

30 Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^{3x} & \text{b) } y = x^{x+1} \\ \text{c) } y = x^{e^x} & \text{d) } y = (\ln x)^{x+1} \\ \text{e) } y = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^x & \text{f) } y = x^{\operatorname{tg} x} \end{array}$$

31 Determina la derivada de cada una de estas funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x & \\ \text{b) } y = (\operatorname{sen} x)^x & \\ \text{c) } 4x^2 + y^2 + 4x - 12y - 6 = 0 & \\ \text{d) } xy = e^x + y & \\ \text{e) } \sqrt{xy} = \ln y & \\ \text{f) } x^2 - y^2 + 3xy + 5 = 0 & \end{array}$$

32 Obtén la derivada de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado:

I) Utilizando las reglas de derivación que conoces.
II) Aplicando la derivación logarítmica.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^3 & \text{b) } y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ \text{c) } y = \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x & \text{d) } y = \sqrt{x^2+1} \sqrt[3]{x^2} \end{array}$$

33 Calcula el valor de la derivada en $x = 0$ de cada una de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } g(x) = e^{\operatorname{sen} f(x)} \text{ si } f(0) = 0 \text{ y } f'(0) = 1 & \\ \text{b) } h(x) = [\operatorname{sen} f(x)]^3 \text{ si } f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ y } f'(0) = 1 & \\ \text{c) } j(x) = \sqrt{\ln f(x)} \text{ si } f(0) = e \text{ y } f'(0) = 1 & \end{array}$$

Diferencial de una función

34 Determina la diferencial, $df(x)$, para cada una de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 & \text{b) } f(x) = e^{2x^2+1} \\ \text{c) } f(x) = \ln \frac{4}{x^2} & \text{d) } f(x) = \sqrt[3]{x^2+2} \end{array}$$

35 Halla Δy , dy y $\Delta y - dy$ en cada uno de estos casos:

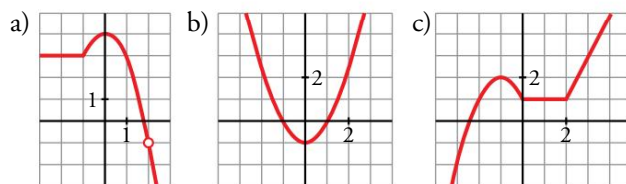
$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^2 - 3x + 1 \text{ para } x_0 = 2 \text{ y } dx_0 = 0,2 & \\ \text{b) } y = e^x \text{ para } x_0 = 2 \text{ y } dx_0 = 0,1 & \\ \text{c) } y = \sqrt[3]{x^2+2} \text{ para } x_0 = 5 \text{ y } dx_0 = 0,02 & \\ \text{d) } y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}} \text{ para } x_0 = 1 \text{ y } dx_0 = 0,1 & \end{array}$$

36 Calcula el valor aproximado de las siguientes expresiones utilizando el diferencial:

$$\text{a) } \frac{1}{4,001} \quad \text{b) } \frac{1}{2,01^3} \quad \text{c) } \log 10\,001$$

Derivabilidad

37 Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:



¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?

38 a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

39 Comprueba que la función $f(x)$ es continua pero no es derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

40 Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2+3x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} & \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 2x+2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2+8x & \text{si } x > 2 \end{cases} & \end{array}$$

41 Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

42 a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

43 Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

44 Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

45 Di si es derivable cada una de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Si es derivable, calcula su valor y, en caso contrario, di cuánto valen las derivadas laterales.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ en } x_0 = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } x_0 = 1$$

$$\text{c) } f(x) = |x| \text{ en } x_0 = 0$$

$$\text{d) } f(x) = |x^2 - x - 6| \text{ en } x_0 = -2 \text{ y } x_1 = 3$$

Para resolver

46 Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1$, halla:

$$\text{a) } (f \circ g)'(x) \quad \text{b) } (g \circ f)'(x)$$

$$\text{c) } (f \circ g')(x) \quad \text{d) } (f' \circ g)(x)$$

47 Dadas $f(x) = (x+1)^2$ y $g(x) = x^2$.

a) Calcula:

$$f'(x^2) \quad (f \circ g)'(x) \quad g'[f(x)] \quad (g \circ f)'(x)$$

b) Si h es una función cualquiera, halla en función de h' y de h las derivadas de:

$$f[h(x)] \quad f[x + h(x)] \quad g[f(x + h(x))]$$

48 a) Representa la función $f(x) = |x+1| + |x-3|$.

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

b) Representa $f'(x)$.

* Mira el Ejercicio resuelto 4.

49 Dada la función $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Halla $f'(x)$.

b) Halla $f''(x)$.

Representa gráficamente los resultados.

50 Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = |x-2|$$

$$\text{b) } y = |x^2 + 6x + 8|$$

$$\text{c) } y = x + |x-3|$$

$$\text{d) } y = x^2 + |x|$$

51 Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

52 Si $f(x) = x^2|x|$, halla f' , f'' y f''' .

53 Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2x(x-3)}{x^2-9} & \text{si } x \neq 0, x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

54 Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

55 Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

56 Averigua los puntos de derivada nula de estas funciones:

$$\text{a) } y = \frac{x}{(x+3)^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{16}{x^2(x-4)}$$

$$\text{c) } y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{d) } y = e^x(x-1)$$

$$\text{e) } y = x^2 e^x$$

$$\text{f) } y = \sin x + \cos x$$

57 Indica los puntos de derivada nula de estas funciones:

$$\text{a) } f(x) = (3x - 2x^2) e^x$$

$$\text{b) } y = \cos 2x - 2\cos x$$

$$\text{c) } y = \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$\text{d) } y = \sqrt{4x - x^2}$$

58 Dada $y = \sin x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por $(0, 0)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Ejercicios y problemas propuestos

59 Halla la derivada de orden n de estas funciones:

a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = x^n$

60 Calcula la derivada de orden 50 y 51 de esta función:

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

61 Halla la pendiente de la recta o rectas tangentes a estas funciones en el punto de abscisa que se indica en cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ en $x = 2$

b) $\cos(x+y) + \sin(x-y) = 0$ en $x = \frac{\pi}{4}$

c) $y = (\ln x)^{x+1}$ en $x = 1$ d) $y = (\arctg x)^{2x}$ en $x = 1$

e) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{81} = 1$ en $x = 7$ f) $y = (\sqrt{x})^{\ln x}$ en $x = e^2$

g) $y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$ en $x = \pi$ h) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$ en $x = 5$

62 Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = \sin 2x$ se anulan en el origen de coordenadas.

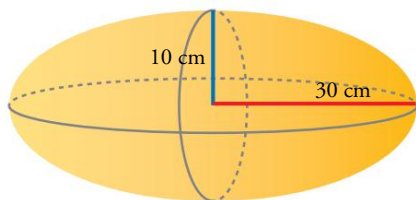
63 Calcula el valor aproximado de las siguientes expresiones utilizando el diferencial:

a) $\sqrt{122}$ b) $\sqrt{1370}$ c) $\log_2 130$
d) $\sqrt[4]{260}$ e) $\sqrt[3]{103825}$ f) $3^{4,001}$

64 Halla, aproximadamente (mediante diferenciales), el volumen de un cubo de 4,012 dm de lado.

65 Determina el aumento de volumen que experimenta un ortoedro de 15 dm de altura y cuya base es un cuadrado de 20 dm de lado sabiendo que aumenta 1 cm la longitud del lado. Hazlo de forma exacta y de forma aproximada (utilizando diferenciales).

66 a) Halla usando diferenciales el incremento de volumen que sufre el siguiente elipsoide al aumentar el radio de la sección circular en 1 mm.



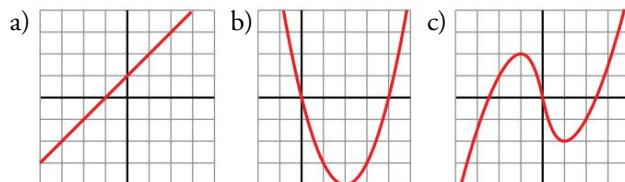
* Recuerda que en un elipsoide: $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

b) Calcula, también utilizando diferenciales, el incremento de volumen que sufre el elipsoide al aumentar el semieje mayor en 1 mm.

67 Prueba la igualdad $D\left[\arctg\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\right] = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

Cuestiones teóricas

68 Dibuja un boceto de la derivada de cada función:



69 ¿Cuántos puntos de derivada nula puede tener una función polinómica de tercer grado? ¿Es posible que no tenga ninguno? ¿Es posible que solo tenga uno?

70 Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.

71 Sea $f(x) = x^3$ y a un punto cualquiera. La función que mide la diferencia entre f y la tangente a la gráfica en el punto (a, a^3) es $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.

a) Prueba que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x - a} = 0$.

b) Prueba que si f es una función cualquiera, también se verifica el resultado anterior. Haz una gráfica explicativa.

72 ¿Verdadero o falso?

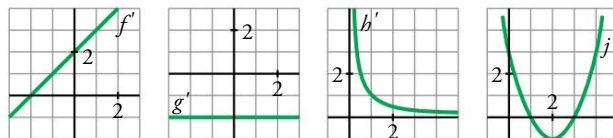
a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -f'(a)$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} = 2f'(a)$

c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = f'(a)$

73 Considera la función $f(x) = xg(x)$. Si $g(x)$ es continua en 0, prueba que $f(x)$ es derivable en 0 y calcula su derivada. (No supongas que $g(x)$ es derivable; puede no serlo).

74 Estas gráficas son las funciones derivadas de f , g , h y j :



a) ¿Cuáles de esas funciones (f , g , h y j) tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

d) ¿Alguna puede ser polinómica de tercer grado?

e) ¿Alguna de las funciones puede ser $y = \ln x$?

Para profundizar

75 Demuestra que f es derivable en $x = 0$ y que g no lo es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

76 Sean f y g dos funciones tales que $f(x) = x^2 + 1$ y $g'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(0) = 4$. Calcula:

- a) $(f \circ g)'(0)$ b) $(g \circ f)'(0)$
c) $(g^{-1})'(4)$ d) $(f^{-1})'(5)$

77 Las funciones siguientes:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

se denominan seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica.

Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades:

- a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
d) $\sinh' x = \cosh x$
e) $\cosh' x = \sinh x$
f) $\operatorname{tgh}' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

78 Sea $f(x) = \arccos \sqrt{x}$.

- a) Calcula a partir de su función inversa, la derivada de esta función.
b) Halla $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ sin utilizar $f'(x)$.
c) Comprueba el resultado de b) a partir del de a).

79 Prueba, utilizando la definición de derivada, que la siguiente función es derivable en $x = 1$ y no lo es en $x = -1$:

$$f(x) = (1-x) \sqrt{1-x^2}$$

80 Se dice que a es una raíz doble de la función polinómica f , cuando:

$f(x) = (x-a)^2 g(x)$, donde g es una función polinómica

- a) Prueba que si f tiene una raíz doble, a , entonces $f'(a) = 0$.
b) Recíprocamente, prueba que si a es raíz de f' y de f , entonces a es una raíz doble de f .

81 Halla la derivada n -ésima de las siguientes funciones:

- a) $y = e^{ax}$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = \ln(1+x)$

82 Halla la derivada de la siguiente función y comprueba que es una constante:

$$y = \arccos \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \text{con } 0 \leq x < \pi$$

Justifícalo teniendo en cuenta la fórmula de $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

- a) $y = (2x+2) \sqrt{x-1}$ b) $y = \arccos \operatorname{tg} \frac{x+3}{x-3}$
c) $y = \ln(\operatorname{sen} x)^2$ d) $y = \sqrt[3]{2^{x-1}}$
e) $y = (\operatorname{tg} x)^{1-x}$ f) $x^2 + y^2 - xy = 0$

2 Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ siendo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

3 Dada la función:

$$f(x) = |x| + |x^2 + 2x|$$

defínela por intervalos y obtén:

- a) $f'(x)$
b) $f''(x)$

Representa $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

4 Estudia la continuidad y la derivabilidad de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

Representa.

5 Halla a y b para que $f(x)$ sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Para los valores de a y b que has obtenido, estudia su derivabilidad.

6 Observando la gráfica de esta función f , estudia su derivabilidad.

Halla, si existen, $f'(-4)$, $f'(0)$ y $f'(3)$.

