

7

Límites de funciones. Continuidad

Los límites: básicos para el Análisis

El principal interés que albergan tanto el concepto como el cálculo de límites reside en su carácter de herramienta básica para el Análisis.

El proceso de paso al límite fue utilizado desde la antigüedad para resolver problemas que resultaban inaccesibles mediante los sencillos procedimientos de la aritmética, el álgebra o la geometría elemental. En un principio, y durante muchos siglos, su significado y su uso fueron meramente intuitivos. De ese modo, ya en el siglo III a. C., Arquímedes obtuvo la superficie de algunos recintos curvos.

El cálculo infinitesimal de los siglos XVII y XVIII siguió basado en una idea de los límites intuitiva y poco precisa. Fue en el siglo XIX (Cauchy, Weierstrass) cuando se perfiló la noción de límite de manera rigurosa. Para ello, fue necesario definir con rigor, también, la recta real y sus propiedades. De este modo se consiguió para el Análisis altas cotas de precisión, eficacia y sencillez.



Weierstrass, padre del Análisis moderno

Karl Weierstrass fue una de las personas más influyentes en el Análisis matemático moderno. Nació en Ostenfelde, Alemania, en 1815. Presionado por su padre, estudió derecho en Bonn con nulo aprovechamiento, ya que después de cuatro años no consiguió obtener el título. En 1839, a sus 24 años, entró en la Escuela de Magisterio de Münster para prepararse como profesor de enseñanza secundaria. Fue allí donde le empezaron a atraer las matemáticas por influencia de un buen profesor.

A partir de 1841 y durante 14 años dio clases en institutos, estando bastante aislado del mundo matemático, pues su sueldo era tan bajo que no podía permitirse el lujo de mantener una correspondencia científica. Weierstrass trabajó por su cuenta incesantemente, construyendo una matemática modelo de rigor, precisión y profundidad.

En 1854 la universidad de Königsberg le concedió, por sus trabajos en Análisis matemático, el título de doctor honoris causa, y en 1856 fue nombrado profesor de matemáticas en la Real Escuela Politécnica de Berlín, donde permaneció hasta su muerte en 1897.

Su influencia fue mucho más grande por sus excelentes cursos y textos, donde están incluidos sus resultados fundamentales, que por sus artículos de investigación, de los que publicó pocos. Entre sus alumnos hubo muchos matemáticos importantes, entre otros la famosa **Sofía Kovalévskaya**. Esta realizó trabajos de gran profundidad y fue la primera mujer que consiguió una plaza de profesora universitaria en Europa.



Karl Weierstrass (1815-1897).

Sofía Kovalevskaya

Es una de las mujeres más conocidas e interesantes en la historia de las matemáticas. Nació en Moscú, en el seno de una familia acomodada de la alta burguesía rusa. Eran descendientes de reyes, pero su bisabuelo, al casarse con una gitana, perdió el título hereditario de príncipe.

Sofía y su hermana formaban parte de un movimiento moscovita a favor de la emancipación de la mujer. Deseaban salir a estudiar a Alemania, cosa imposible en aquel entonces para una mujer soltera. Así que se pusieron en contacto con un joven paleontólogo del grupo, Vladimir Kovalevsky, y le propusieron que se casara nominalmente con una de ellas. Kovalevsky escogió a Sofía y así, ella y su hermana tuvieron libertad para salir de Rusia y estudiar, primero en Heidelberg y, luego, en Berlín.

En aquella época las mujeres no podían asistir a las clases públicas, pero Karl Weierstrass, profesor en la Escuela Politécnica de Berlín, estimó tan altamente el talento matemático de Sofía que decidió, entre los años 1870 y 1874, darle clases particulares, con las que Sofía se convirtió en una de las grandes figuras de su tiempo en Análisis matemático.

En 1874 la universidad de Göttingen, ante la insistencia de Weierstrass, le concedió el título de doctor (*in absentia*, es decir, a distancia, ya que, siendo mujer, el claustro no estaba dispuesto a hacerlo de otra forma). A pesar de su título y a pesar de la influencia de Weierstrass, ninguna universidad quiso contratar los servicios de una mujer como docente, por lo que Sofía regresó a Rusia. En 1884 fue invitada como conferenciante a la universidad de Estocolmo, y allí permaneció ligada a esta institución, de la que fue nombrada profesora en 1889.

Murió en Estocolmo en 1891. Vivió solo 41 años, dejando una importante labor matemática y varias obras literarias de gran valía.



Sofía Kovalevskaya (1850-1891).

Resuelve

Piensa y encuentra límites

1. Utiliza tu sentido común para asignar valor a los siguientes límites:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2)$ | b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$, $\lim_{x \rightarrow 2} x^3$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x + 5}$ |

2. Tanteando con la calculadora, da el valor de estos límites:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \cdot \ln(x - 3)$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$ |
|--|--|---|

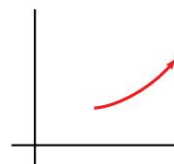
1 Idea gráfica de los límites de funciones

Empecemos revisando el significado de las expresiones $\lim_{x \rightarrow \square} = \diamond$ asociando cada uno de los casos que pueden darse con su representación gráfica.

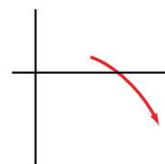
■ Límites cuando $x \rightarrow +\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

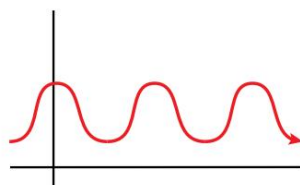


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

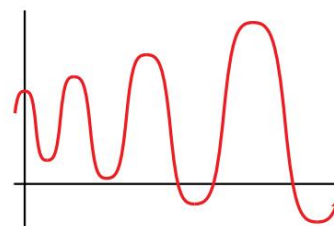


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

También puede ocurrir que el límite no exista. Veamos dos ejemplos:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ no existe}$$

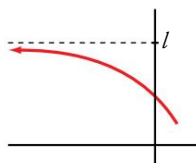


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ no existe}$$

■ Observa

Cuando $x \rightarrow -\infty$ también puede ocurrir que el límite no exista. Como ejemplos sirven los mismos que hemos usado para $x \rightarrow +\infty$ cambiando la orientación de las gráficas, haciendo que tiendan a $-\infty$.

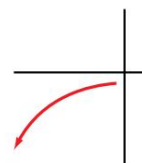
■ Límites cuando $x \rightarrow -\infty$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$



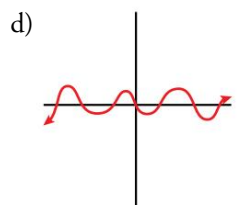
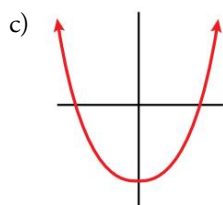
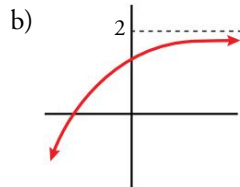
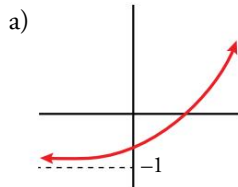
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ejercicios propuestos

1 Describe mediante un límite cada una de las siguientes ramas:



2 Asigna $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ a cada una de las siguientes funciones conocidas (dibuja esquemáticamente su gráfica):

- a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = -x^3$ e) $f(x) = \sin x$ f) $f(x) = \tan x$

3 Dibuja, en cada caso, una función que cumpla:

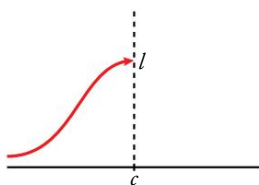
- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Límites cuando $x \rightarrow c$. Límites laterales

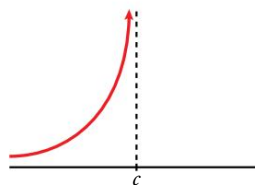
Límite por la izquierda de c :

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

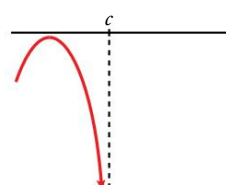
x se acerca a c tomando valores menores que c .



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$$

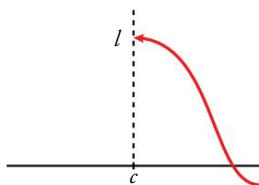


$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$$

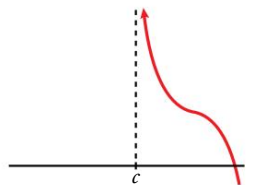
Límite por la derecha de c :

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

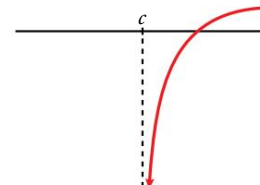
x se acerca a c tomando valores mayores que c .



$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$



$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$$



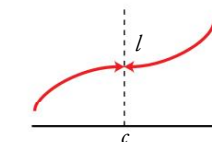
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

Si $f(x)$ está definida a la izquierda y a la derecha de c , para que exista $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ es necesario que tenga límites finitos a los dos lados, y coincidan:

Límite en c :

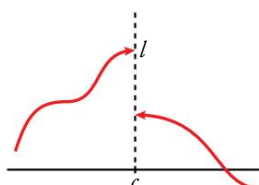
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

x se acerca a c por cualquiera de los lados, indistintamente.

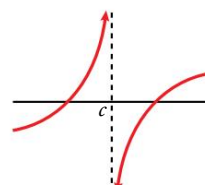


$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \end{array} \right\} \text{Entonces } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l.$$

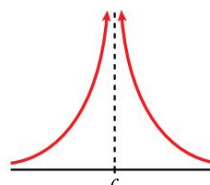
No existe límite en estos casos:



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ no existe}$$



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ no existe}$$



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ no existe}$$

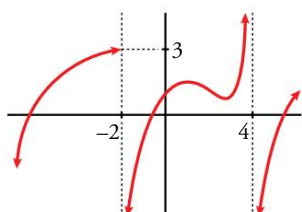
Observa

Si $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$, no decimos que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$; decimos que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ no existe. Solo existe cuando tiene límites laterales finitos y coincidentes.

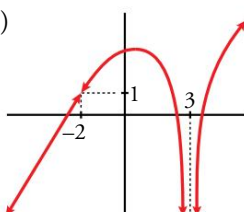
Ejercicios propuestos

4 Describe con límites las siguientes ramas:

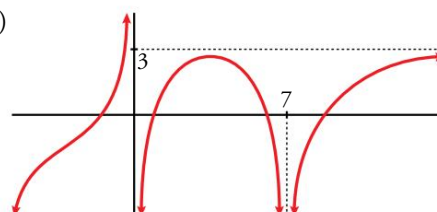
a)



b)



c)



5 Representa una curva que cumpla las seis condiciones siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ no existe}$$



En la web



Ejercicios para practicar la asignación de límites a partir de gráficas.

2 Un poco de teoría: aprendamos a definir los límites

En matemáticas, para dar pasos firmes, es necesario que las bases estén bien asentadas. Y la base de esta unidad es el concepto de límite. Hasta ahora hemos manejado visiones intuitivas, interpretaciones gráficas, pero... ¿cómo definir rigurosamente un límite?

Vamos a definir algunos de los límites que hemos visualizado en páginas anteriores y a analizar detenidamente los aspectos claves de estas definiciones. Si en cursos próximos (es decir, en la universidad) sigues estudiando matemáticas, afianzarás estas definiciones y aprenderás a deducir rigurosamente todas las propiedades de los límites a partir de ellas.

En este nivel nos conformaremos con asomarnos someramente al proceso de enunciar con precisión.

■ Cómo definir con precisión que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

La idea es que $f(x)$ “se acercará mucho” a l cuando x “se haga muy grande”. Dicho con más precisión:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que $f(x)$ esté tan próximo a l como queramos sin más que darle a x valores suficientemente grandes.

Vamos a intentar hacerlo aun mejor:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow$ Dado un número positivo ε (arbitrariamente pequeño), podemos encontrar un h (tan grande como sea necesario) tal que:

$$\text{si } x > h \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Veamos un caso concreto. Vamos a demostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+10}{x-1} = 5$:

Tomamos $\varepsilon > 0$ (e imaginamos ε muy pequeño). ¿Cómo tiene que ser x para que la distancia de $f(x)$ a 5 sea menor que ε ?

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{5x+10}{x-1} - 5 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{5x+10-5x+5}{x-1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{15}{x-1} < \varepsilon$$

(*) Hemos quitado el valor absoluto porque para valores grandes de x , $\frac{15}{x-1} > 0$.

$$\frac{15}{x-1} < \varepsilon \Leftrightarrow x-1 > \frac{15}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{15}{\varepsilon} + 1. \text{ Es decir, } h = \frac{15}{\varepsilon} + 1.$$

Por ejemplo, si $\varepsilon = 0,001 \rightarrow h = \frac{15}{0,001} + 1 = 15\,001$.

Esto quiere decir que “si $x > 15\,001$, entonces $\frac{5x+10}{x-1}$ dista de 5 menos de una milésima” (haz la prueba con la calculadora y dale a x el valor 15 002).

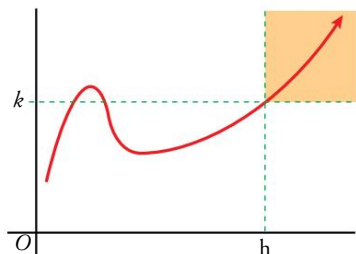
Ejercicio propuesto

1 Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-20}{x-100} = 3$, aplica lo que acabamos de ver para calcular h en función de ε .

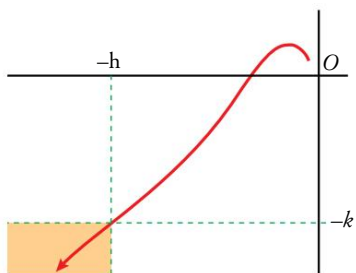
Averigua después para qué valor de h se verifica que “si $x > h$, entonces $|f(x) - 3| < 0,01$ ”.

Definición precisa de otros límites

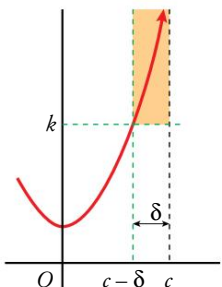
Ya hemos dicho que solo pretendemos asomarnos al proceso de definir con precisión los límites. Ampliemos nuestro horizonte definiendo algunos límites más, a modo de ejemplos:



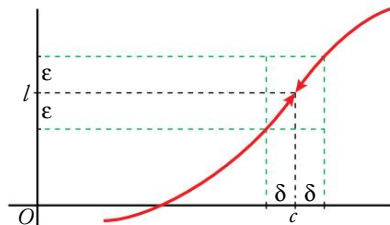
Cuanto más grande sea k , más grande debemos tomar h .



Cuanto más grande sea k , más grande debemos tomar h .



Cuando más grande sea k , más pequeño hemos de tomar δ .



Cuando más pequeño sea ε , más pequeño hemos de tomar δ .

Cuando $x \rightarrow +\infty$ la función tiende a $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que $f(x)$ sea tan grande como queramos sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

Dicho con más precisión:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número h (tan grande como sea necesario) tal que:

$$\text{si } x > h, \text{ entonces } f(x) > k$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$ la función tiende a $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ Podemos conseguir que $f(x)$ sea “tan negativo” como queramos sin más que tomar x “tan negativo” como sea necesario.

Con más precisión:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número h (tan grande como sea necesario) tal que:

$$\text{si } x < -h, \text{ entonces } f(x) < -k$$

Cuando $x \rightarrow c^-$ la función tiende a $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c **por la izquierda** es $+\infty$ si al acercarse x a c tomando valores menores que c , $f(x)$ toma valores tan grandes como se quiera.

$\Leftrightarrow$ Dado un número k , podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } c - \delta < x < c, \text{ entonces } f(x) > k$$

Cuando $x \rightarrow c$ la función tiende a l

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \Leftrightarrow$ Si queremos que $f(x)$ sea muy próximo a l , podremos conseguirlo sin más que darle a x valores tan próximos a c como sea necesario.

$\Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } x \neq c \text{ y } c - \delta < x < c + \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Ejercicio propuesto

2 Define, acompañado de un dibujo, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$

3 Sencillas operaciones con límites

Operaciones con límites finitos

Observa estos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2} = 3 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+12}{2x^2+7} = \frac{1}{2}$$

¿No parece razonable, sin más operaciones, hacer lo siguiente?:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{x-2} - \frac{x^2-4x+12}{2x^2+7} \right) = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

Estaremos aplicando esta propiedad:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

válida siempre que estos dos últimos límites existan y sean finitos.

Parece, pues, razonable, admitir los siguientes resultados:

Si existe y es finito el $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = a$ y existe y es finito el $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = b$, entonces se cumplen las siguientes relaciones (todas ellas valen para $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow c^-$, $x \rightarrow c^+$ y $x \rightarrow c$):

$$1. \lim_{x \rightarrow \square} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) + \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = a + b$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \square} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) - \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = a - b$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \square} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = a \cdot b$$

$$4. \text{ Si } b \neq 0, \lim_{x \rightarrow \square} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \square} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = \frac{a}{b}$$

$$5. \text{ Si } f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow \square} [f(x)^{g(x)}] = \left[\lim_{x \rightarrow \square} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = a^b$$

$$6. \left. \begin{array}{l} \text{Si } n \text{ es impar} \\ \text{o} \\ \text{Si } n \text{ es par y } f(x) \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \square} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \square} f(x)} = \sqrt[n]{a}$$

$$7. \text{ Si } \alpha > 0 \text{ y } f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow \square} [\log_{\alpha} f(x)] = \log_{\alpha} \left[\lim_{x \rightarrow \square} f(x) \right] = \log_{\alpha} a$$

En rigor, todas estas propiedades deberían ser demostradas, pero esa tarea está muy por encima de lo que se pretende en este curso.

Ejercicio propuesto

1 Todas estas propiedades que acabamos de presentar son muy sencillas y razonables. Y se pueden enunciar en los siguientes términos:

1. El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.

Haz otro tanto con las propiedades 2 a 7 y reflexiona sobre las restricciones que se imponen en algunas de ellas, de modo que las veas razonables (por ejemplo: ¿por qué $b \neq 0$ en la propiedad 4?, ¿por qué $f(x) > 0$ en la propiedad 5?, ...).

Algunas operaciones con límites infinitos

Del mismo modo que se manejan de forma obvia las operaciones con límites finitos, hay muchas operaciones en las que intervienen funciones con límites infinitos cuyo resultado es también obvio. Por ejemplo:

Si $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \square} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

Se expresa así: $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$

Ponemos, a continuación, algunos resultados de operaciones en las que intervienen funciones con límites infinitos. No trates de memorizarlos. Mira bien cada uno de ellos, haz algunas pruebas, ponte algunos ejemplos y acaba viéndolos tan razonables que los recuerdes cuando te los encuentres.

SUMAS

$$(+\infty) + (l) = (+\infty)$$

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$$

$$(-\infty) + (l) = (-\infty)$$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$$

$$-(-\infty) = (+\infty)$$

PRODUCTOS

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$$

$$\text{Si } l > 0, \begin{cases} (+\infty) \cdot (l) = (+\infty) \\ (-\infty) \cdot (l) = (-\infty) \end{cases}$$

$$\text{Si } l < 0, \begin{cases} (+\infty) \cdot (l) = (-\infty) \\ (-\infty) \cdot (l) = (+\infty) \end{cases}$$

COCIENTES

$$\frac{(l)}{(\pm\infty)} = (0)$$

$$\frac{(l)}{(0)} = (\pm\infty), \text{ si } l \neq 0$$

$$\frac{(\pm\infty)}{(0)} = (\pm\infty)$$

$$\frac{(0)}{(\pm\infty)} = (0)$$

POTENCIAS

$$(+\infty)^{(+\infty)} = (+\infty)$$

$$(+\infty)^{(-\infty)} = (0)$$

$$\text{Si } l > 0, (+\infty)^{(l)} = (+\infty)$$

$$\text{Si } l < 0, (+\infty)^{(l)} = (0)$$

$$\text{Si } l \neq 0, (l)^{(0)} = (1)$$

$$\text{Si } l > 1, \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (+\infty) \\ (l)^{(-\infty)} = (0) \end{cases}$$

$$\text{Si } 0 < l < 1, \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (0) \\ (l)^{(-\infty)} = (+\infty) \end{cases}$$

Nota histórica

Lee lo que decía, en el siglo VII, el matemático indio Brahmagupta a propósito de una expresión del tipo $\frac{(a)}{(0)}$:

“... cuanto más disminuye el divisor, tanto mayor es el cociente.

Si el divisor se hace extremadamente pequeño, el cociente se hace extremadamente grande.

Pero mientras pueda decirse que es de tal o tal otra magnitud, todavía no se ha llegado a la magnitud extrema, pues siempre puede darse un número mayor que él. El cociente, por lo tanto (cuando el divisor se reduce al mínimo posible, es decir, a cero), se hace indefiniblemente grande y puede llamarse, con razón, infinito”.

Es esta la forma de razonar que te sugerimos (“si el divisor se hace extremadamente pequeño, el cociente se hace extremadamente grande”). Ayúdate de la calculadora cuando lo necesites, pero llega a convicciones claras.

Ejercicio propuesto

2 Si, cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow 4$, $h(x) \rightarrow -\infty$, $u(x) \rightarrow 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \rightarrow +\infty$ a las expresiones siguientes:

- | | | | | |
|------------------|------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| a) $f(x) - h(x)$ | b) $f(x)^{f(x)}$ | c) $f(x) + h(x)$ | d) $f(x)^x$ | e) $f(x) \cdot h(x)$ |
| f) $u(x)^{u(x)}$ | g) $f(x)/h(x)$ | h) $[-h(x)]^{h(x)}$ | i) $g(x)^{h(x)}$ | j) $u(x)/h(x)$ |
| k) $f(x)/u(x)$ | l) $h(x)/u(x)$ | m) $g(x)/u(x)$ | n) $x + f(x)$ | ñ) $f(x)^{h(x)}$ |
| o) $x + h(x)$ | p) $h(x)^{h(x)}$ | q) x^{-x} | r) $f^2(x) + h^2(x)$ | s) $f^2(x) - h^2(x)$ |

4 Indeterminaciones

Con la expresión $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$ estamos diciendo que, con seguridad, la suma de dos funciones que tienden a $+\infty$, cualesquiera que sean, es otra función que también tiende a infinito. ¿Qué resultado podemos aventurar para $(+\infty) - (+\infty)$?

Veamos, con los siguientes ejemplos, que puede ocurrir cualquier cosa:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ g(x) = x^2 + 5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ h(x) = x^2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = (+\infty) - (+\infty) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - f(x)] = (+\infty) - (+\infty) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - h(x)] = (+\infty) - (+\infty) \end{array}$$

Las expresiones anteriores son del tipo $(+\infty) - (+\infty)$. Sus límites son:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - (x^2 + 5)] \stackrel{(*)}{=} +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 5) - x^3] \stackrel{(*)}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 5) - x^2] = 5$$

(*) Pues x^3 crece mucho más rápidamente que x^2 .

Como hemos visto, $(+\infty) - (+\infty)$ ha significado, según los casos, $(+\infty)$, $(-\infty)$ o 5. Es decir, con solo saber que dos funciones tienden a infinito, no podemos saber a qué tiende su diferencia.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, ¿cuánto vale $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$?

Para contestar a la pregunta, no queda más remedio que analizar más a fondo cada caso concreto.

Indeterminaciones

Las indeterminaciones más importantes son:

$\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$	$\frac{(0)}{(0)}$
$(+\infty) - (+\infty)$	$(\pm\infty) \cdot (0)$
$(+\infty)^{(0)}$	$(0)^{(0)}$
$(1)^{(+\infty)}$	$(1)^{(-\infty)}$

Una **indeterminación** es el reconocimiento de que con solo conocer los límites de las funciones que intervienen no podemos asignar límite al resultado de la operación. Hay que efectuar una investigación más profunda que nos permita llegar al valor de dicho límite.

En las próximas páginas aprenderemos algunos métodos para resolver los casos más frecuentes de indeterminación. Los más importantes son:

$$\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)} \quad \frac{(0)}{(0)} \quad (+\infty) - (+\infty) \quad (\pm\infty) \cdot (0) \quad (+\infty)^{(0)} \quad (0)^{(0)} \quad (1)^{(+\infty)} \quad (1)^{(-\infty)}$$

Ejercicios propuestos

1 Para $x \rightarrow 4$ se dan los siguientes resultados:

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad g(x) \rightarrow 4, \quad h(x) \rightarrow -\infty, \quad u(x) \rightarrow 0$$

¿Cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones cuando $x \rightarrow 4$? En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo y, si no lo es, di cuál es el límite:

- | | |
|----------------------|------------------|
| a) $f(x) + h(x)$ | b) $f(x)/h(x)$ |
| c) $f(x)^{-h(x)}$ | d) $f(x)^{h(x)}$ |
| e) $f(x)^{u(x)}$ | f) $u(x)^{h(x)}$ |
| g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ | h) $g(x)^{f(x)}$ |

5 Comparación de infinitos. Aplicación a los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Si $x \rightarrow +\infty$, es claro que tanto $2x$ como x^2 tienden a $+\infty$. También es claro que x^2 tiende a $+\infty$ “mucho más deprisa” que $2x$. Diremos, pues, que x^2 es un **infinito de orden superior** a $2x$.

¿Para qué sirve esto? Para saber que, cuando compiten el uno con el otro, “gana” el que más puede:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = +\infty$$

Generalizando, si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ y $g(x) \rightarrow \pm\infty$, se dice que $f(x)$ es un **infinito de orden superior** a $g(x)$ si:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0$$

Si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow l \neq 0$, entonces $f(x)$ y $g(x)$ son **infinitos del mismo orden**.

■ Aplicación a los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Es fácil comprobar las siguientes afirmaciones:

- Dadas **dos potencias** de x , la de mayor exponente es un infinito de orden superior:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{7x^3} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{4/3}}{5x} = +\infty$$

- Dadas **dos funciones exponenciales** de bases mayores que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{1000 \cdot 1,5^x} = +\infty$$

- Cualquier **función exponencial** de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier **potencia**:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1,2^x}{1000 \cdot x^{20}} = +\infty$$

- Tanto las **funciones exponenciales** de base mayor que 1 como las **potencias** de x son infinitos de orden superior a cualquier **función logarítmica**.

- Dos **polinomios del mismo grado** son infinitos del mismo orden:

$$7x^5 + 3x^4 + 1000 \quad \text{y} \quad x^5 - 10x^4 - 2000 \quad \text{son infinitos del mismo orden.}$$

- Dos **exponenciales de la misma base** son infinitos del mismo orden:

$$100 \cdot 2^x \quad \text{y} \quad 0,01 \cdot 2^x \quad \text{son infinitos del mismo orden.}$$

- Si en una suma hay **varios sumandos** infinitos, el orden de la suma es el del sumando de mayor orden:

$$3x^4 - 5x^3 + 7 \quad \text{es un infinito del mismo orden que} \quad x^4.$$

$$x^{20} + 7 \cdot 1,1^x \quad \text{es un infinito del mismo orden que} \quad 1,1^x.$$

■ Recuerda

Cuando $x \rightarrow +\infty$ hay tres grandes familias de funciones infinitas (que tienden a $\pm\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$):

- Potencias de exponente positivo:
 $x^3, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^5}, \dots$
- Exponenciales de base mayor que 1:
 $1,5^x; 2^x; e^x, \dots$
- Logarítmicas de base mayor que 1:
 $\log_{1,5} x, \log_{10} x, \ln x, \dots$

■ Toma nota

Estos resultados son sencillos, importantes y muy útiles para el cálculo de límites.

Revísalos con mucha atención y familiarízate con ellos.

Ejercicios propuestos

- 1 Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos ($\pm\infty$) cuando $x \rightarrow +\infty$:

- a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ b) $0,5^x$ c) $-1,5^x$
d) $\log_2 x$ e) $\frac{1}{x^3 + 1}$ f) $\sqrt{x}$
g) 4^x h) 4^{-x} i) -4^x

- 2 a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$$\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1,5^x \quad 4^x$$

- b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1,5^x}$$

6 Cálculo de límites cuando $x \rightarrow +\infty$

Recuerda

Cuando $x \rightarrow +\infty$, el protagonismo de una función polinómica lo desempeña su término de mayor grado.

En la web



Ejemplos y ejercicios sobre el cálculo de límites de cocientes de polinomios.

Cociente de polinomios

El cálculo de límites de fracciones algebraicas (cocientes de dos polinomios) se resuelve con toda sencillez si prestamos atención a los términos de mayor grado del numerador y del denominador.

$$f(x) = \frac{ax^p + a'x^{p-1} + \dots}{bx^q + b'x^{q-1} + \dots} \text{ se comporta como } \frac{a}{b} x^{p-q}.$$

- Si $p > q$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ (el signo del límite depende de los signos de a y b).
- Si $p = q$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{b}$
- Si $p < q$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Por ejemplo:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x - 1}{10x^2 - 7x + 3} = +\infty$, pues el grado del numerador es mayor que el del denominador: el infinito del numerador es de orden superior al del denominador.

Razonadamente:

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^3}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{10 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{(+\infty)}{(10)} = +\infty$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 - 5x^2 - 1}{6x^3 - 7x^2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x - 3}{-5x^2 + 2} = 0$



4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4 + 5x}{6(1 - x^3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4}{-6x^3} = -\infty$



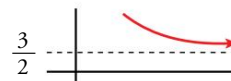
Cociente de otras expresiones infinitas

La regla anterior también es válida cuando en el numerador, en el denominador o en ambos, hay expresiones radicales. Para aplicarla, tendremos que tener en cuenta que:

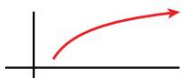
- $\sqrt[p]{ax^n + \dots}$ se comporta como $\sqrt[p]{a} \cdot x^{n/p}$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
- $\sqrt[p]{ax^n + \dots}$ no tiene límite cuando $x \rightarrow +\infty$ si a es negativo y p es par, pues no está definido para valores grandes de x .

Por ejemplo:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$



2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 - 2x}}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5}x^{3/2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5}}{2} x^{1/2} = +\infty$



Diferencia de expresiones infinitas

Estudiaremos tres casos, cada uno algo más complicado que el anterior.

I. Cuando se aprecia a simple vista que las expresiones cuya diferencia se nos propone son infinitos de orden distinto, podemos atribuirles, directamente, límite $+\infty$ o $-\infty$. Por ejemplo:

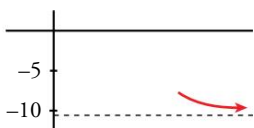


$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3 - 5x} - \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x - 1} \right) = +\infty \text{ Porque el minuendo es de grado } 3/2 \text{ y el sustraendo es de grado } 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x-5)^4}{x^2 - 1} - 1,5^x \right) = -\infty \text{ Porque una exponencial con base mayor que } 1 \text{ es un infinito de orden superior a una potencia.}$$

II. Cuando puede efectuarse la operación

Si el límite no se aprecia a simple vista, intentaremos efectuar la diferencia indicada y, después, calcularemos el límite. Por ejemplo:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x}{x + 3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x - 2x(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-11x}{x + 3} = -11$$

III. Cuando hay radicales cuadráticos

Si en el minuendo, $f(x)$, en el sustraendo, $g(x)$, o en ambos, hay una raíz cuadrada, la operación no es inmediata. Entonces se procede multiplicando y dividiendo por $f(x) + g(x)$, con lo que desaparece la diferencia de raíces, que obstaculizaba el cálculo del límite.

$$f(x) - g(x) = \frac{[f(x) - g(x)][f(x) + g(x)]}{f(x) + g(x)} = \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) + g(x)}$$

Por ejemplo:



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x) - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En la web



Ejemplos de cálculo de límites indeterminados del tipo $(\infty) - (\infty)$.

Ejercicios propuestos

1 Sin operar, di el límite, cuando $x \rightarrow +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$

b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$

f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

2 Calcula el límite, cuando $x \rightarrow +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2}$

b) $\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x + 5}{2} - \frac{x^2 - 2}{x}$

d) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

e) $2x - \sqrt{x^2 + x}$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$



En la web

Ejemplos y ejercicios sobre el cálculo de límites de una potencia.

Límite de una potencia

El límite de una potencia, en muchos casos, se puede calcular sin más que conocer los límites de la base y del exponente. Por ejemplo:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{x-3} = +\infty$, pues es del tipo $(+\infty)^{(+\infty)}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^x = +\infty$, pues es del tipo $(2)^{(+\infty)}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^x = 0$, pues es del tipo $\left(\frac{1}{2}\right)^{(+\infty)} = \frac{1}{(2)^{(+\infty)}}$.

Sin embargo, cuando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)}$ es una indeterminación del tipo $(1)^{(+\infty)}$, que hay que estudiar en cada caso.

Límites inmediatos relacionados con el número e

Si recuerdas del año anterior la definición del número e como límite de la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, los siguientes resultados te parecerán evidentes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

Basándonos en ellos, obtenemos estos otros límites:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = e^{-1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e$, pues haciendo $2x = y$ queda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^a = e^a$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{-a}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax+b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^b = e^a \cdot 1 = e^a$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x/k}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/k}\right)^{x/k}\right]^k = e^k$

No lo olvides

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax+b} = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

Ejercicios propuestos

3 Halla los siguientes límites cuando $x \rightarrow +\infty$:

- a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$ b) $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$ c) $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{-5x}$
- d) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$ e) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$ f) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{-x}$
- g) $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$ h) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$ i) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-5x}$

4 Calcula estos límites cuando $x \rightarrow +\infty$:

- a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ b) $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$
- c) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$ d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5$
- e) $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$ f) $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

■ Expresiones del tipo $(1)^{(+\infty)}$. Regla práctica

Estas indeterminaciones se resuelven relacionándolas con el número e . En ocasiones, no veremos de forma inmediata esta relación, por lo que te damos aquí una regla práctica para deshacer tal indeterminación:

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

En la web



Ejercicios para practicar la resolución de límites indeterminados del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Demostración

$$f(x)^{g(x)} \stackrel{(1)}{=} \left\{ 1 + [f(x) - 1] \right\}^{g(x)} \stackrel{(2)}{=}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x) - 1}} \right)^{g(x)} \stackrel{(3)}{=}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x) - 1}} \right)^{\frac{1}{f(x) - 1} \cdot [f(x) - 1] \cdot g(x)} \stackrel{(4)}{=}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x) - 1}} \right)^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right]^{[f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

(1) Para poner la base de la forma $1 + \frac{1}{\phi(x)}$

$$(2) f(x) - 1 = \frac{1}{\frac{1}{f(x) - 1}}$$

Si $f(x) \rightarrow 1$, entonces $\frac{1}{f(x) - 1} \rightarrow \infty$.

(3) Multiplicamos y dividimos el exponente por $f(x) - 1$ para que la expresión adopte la forma:

$$\left\{ \left[1 + \frac{1}{\phi(x)} \right]^{\phi(x)} \right\}^{\dots}$$

(4) Si $\phi(x) \rightarrow +\infty$, entonces:

$$\left[1 + \frac{1}{\phi(x)} \right]^{\phi(x)} \rightarrow e$$

Ejercicio resuelto

1 Calcular este límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x - 1}$$

• Como es del tipo $(1)^{(+\infty)}$, podemos aplicar la regla anterior:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} - 1 \right) \cdot (3x - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 3}{x^2 + 2} \right) \cdot (3x - 1)} = e^3$$

• Vamos a resolverlo de nuevo dando todos los pasos, como si no tuviéramos la “regla práctica”.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x - 1} &= \left(1 + \frac{x - 3}{x^2 + 2} \right)^{3x - 1} = \left(1 + \frac{1}{(x^2 + 2)/(x - 3)} \right)^{3x - 1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{(x^2 + 2)/(x - 3)} \right)^{\frac{x^2 + 2}{x - 3} \cdot \frac{x - 3}{x^2 + 2} \cdot (3x - 1)} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{(x^2 + 2)/(x - 3)} \right)^{\frac{x^2 + 2}{x - 3}} \right]^{\frac{x - 3}{x^2 + 2} \cdot (3x - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^3 \end{aligned}$$

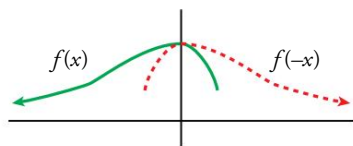
Ejercicio propuesto

5 Resuelve estos límites aplicando la regla anterior. Después, resuelve también uno de ellos dando todos los pasos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 5}{3x - 1} \right)^{5x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2} \right)^{2x - 1}$

7 Cálculo de límites cuando $x \rightarrow -\infty$



Para calcular límites cuando $x \rightarrow -\infty$, tendremos en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

Por tanto, calcularemos el $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ de la expresión que resulta de cambiar x por $-x$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x + 3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x)^2 - 5(-x) + 3] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5x + 3) = +\infty \end{aligned}$$

Observa que, para calcular el límite, sería suficiente con haber hecho el cambio en el término de mayor grado, que es el único que influye en el resultado final. (Incluso se puede realizar mentalmente observando si el exponente es par o impar y, por tanto, si la potencia va a ser positiva o negativa).

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3(-x)^3 + \dots] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + \dots) = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^4 - 11x^2 + 1} = +\infty$$

Pues la mayor potencia, x^4 , es par, y su coeficiente, 5, positivo.

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-4x^3 + 3x^2 + 5x} = +\infty$$

Pues la mayor potencia, x^3 , es impar, y su coeficiente, -4 , negativo: $- \cdot - = +$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^3 + 7x^2 + 8} \text{ no existe}$$

Pues el radicando se hace negativo cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{(1)}{(+\infty)} = 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = (e^{-1})^{-1} = e$$

Familias de funciones infinitas

En el margen del epígrafe 7.5 veíamos tres familias de funciones infinitas para $x \rightarrow +\infty$. ¿Lo son también para $x \rightarrow -\infty$? Sí, pero con algunos cambios:

- Las potencias de exponente positivo, cuidando que en las raíces de índice par el radicando no sea negativo para $x \rightarrow -\infty$.

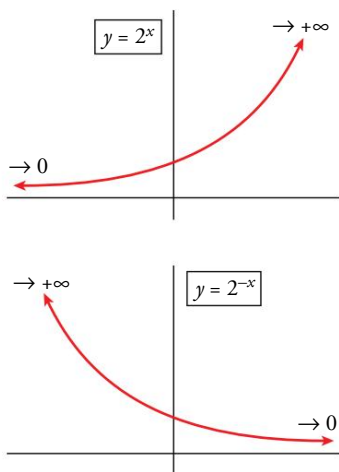
$$x^3, \sqrt{-x}, \sqrt[3]{x^2}, \dots$$

- Exponenciales de base menor que 1.

$$0,7^x; \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}, \dots$$

- Logaritmos de base menor que 1.

$$\log_{0,7} x, \log_{1/e} x = \log_e \frac{1}{x} = \ln \frac{1}{x}, \dots$$



En la web

Ejercicios de repaso sobre límites de funciones cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Ejercicio resuelto

1 Hallar el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes expresiones:

$$a) \frac{3x^3 + 2x - 1}{10x^2 - 7x + 3} = A$$

$$b) \frac{-3x^3 - 5x^2 + 3}{6x^3 - 7x^2} = B$$

$$c) \frac{\sqrt{5x^3 - 2x}}{2x + 5} = C$$

$$d) \left(\sqrt{-3x^3 + 5} - \frac{4x^2 - 3}{x + 2} \right) = D$$

$$e) \left(\sqrt{-3x^3 + 5} + \frac{4x^2 - 3}{x + 2} \right) = E$$

$$f) (\sqrt{x^2 - x} - x) = F$$

$$g) (\sqrt{x^2 + x} + x) = G$$

$$h) \left(1 + \frac{3}{2x} \right)^{5x} = H$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 - 2x - 1}{10x^2 + 7x + 3} = -\infty$$

Se podría haber dado el límite directamente observando que el numerador es de grado mayor que el denominador ($\pm\infty$) y que el numerador es negativo y el denominador positivo.

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 3}{-6x^3 - 7x^2} = -\frac{1}{2}$$

c) No existe.

Observa que el radicando, $5x^3 - 2x$, toma valores negativos cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^3 + 5} - \frac{4x^2 - 3}{-x + 2} \right) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

e) Es una indeterminación del tipo $(+\infty) + (-\infty)$. Para resolverla, observamos que el primer sumando es de grado $3/2$, y el segundo sumando, de grado 1. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow -\infty} E = +\infty$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = +\infty$, pues es una expresión del tipo $(+\infty) - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty)$.

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} G = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = -\frac{1}{2} \quad (\text{Ver página 215}).$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{2x} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{2x}{3}} \right)^{\frac{2}{3}x} \right]^{-\frac{3}{2} \cdot 5} = e^{-\frac{15}{2}}$$

Ejercicios propuestos

1 Sin operar, di el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes expresiones:

$$a) x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$$

$$b) x^2 + 2^x$$

$$c) x^2 - 2^x$$

$$d) x^2 - 2^{-x}$$

$$e) 2^{-x} - 3^{-x}$$

$$f) \sqrt{x^5 - 1} - 5^x$$

$$g) 2^x - x^2$$

$$h) x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$$

$$i) \sqrt[3]{x+2} - x^2$$

$$j) 3^{-x} - 2^{-x}$$

2 Calcula el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes expresiones:

$$a) \frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2}$$

$$b) \frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2}$$

$$c) \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$d) 2x + \sqrt{x^2 + x}$$

$$e) \sqrt{x^2 + 2x} + x$$

$$f) \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x}$$

$$g) \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{5x+3}$$

$$h) \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x-1}$$

8 Límite de una función en un punto. Continuidad

Vamos a recordar y sintetizar algunos resultados que ya conocemos:

■ Límite en un punto y límites laterales

$f(x)$ es una función definida a la izquierda y a la derecha de c .

Si existen los límites laterales y coinciden

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

entonces decimos que el límite de $f(x)$ existe y es igual a l :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

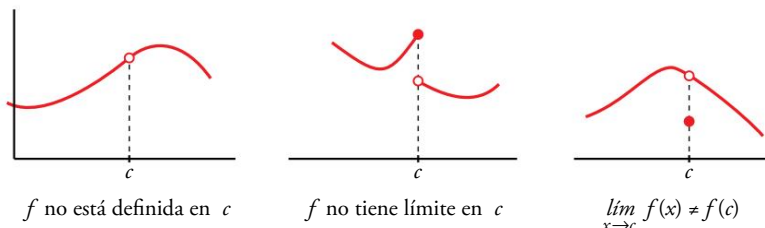
■ Continuidad en un punto

f es **continua** en c si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Es decir, si f es continua en c , se cumplen las tres condiciones siguientes:

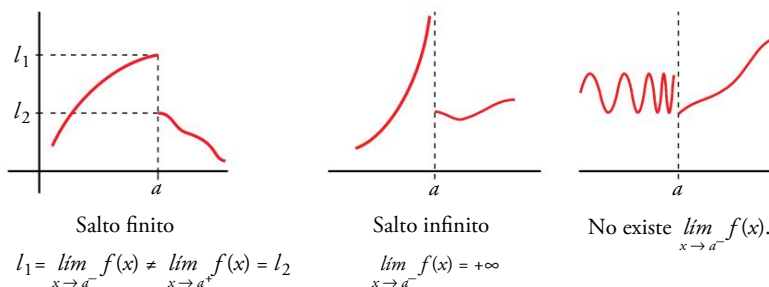
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es finito.
- f está definida en c . Es decir, existe $f(c)$.
- El límite de $f(x)$ en c coincide con el valor de f en c .

Por tanto, una función puede dejar de ser continua en un punto por no cumplir alguna de esas condiciones:



Cuando una función es discontinua en c pero existe el límite en dicho punto, se dice que la discontinuidad es **evitable**.

En los demás casos, la discontinuidad es **inevitable**. Puede deberse a un **salto finito** (los dos límites laterales son finitos, pero distintos), un **salto infinito** (uno de los dos límites laterales, o ambos, son infinitos), o bien carecer de límites laterales. Por ejemplo:



Atención

Observa que en la definición de límite en c no hay ninguna referencia al valor de la función en c , $f(c)$. Es decir, para la definición de límite en c no importa que f no esté definida en c o, si lo está, cuál es su valor.

La continuidad de las funciones reales y los errores en la medida

Las funciones que se refieren a fenómenos reales relacionan, frecuentemente, causas con efectos.

En una función $P = f(T)$, que relacione la temperatura en un autoclave con la presión dentro de este, la temperatura es la causa y la presión es el efecto.

Que f sea continua significa que a “pequeñas variaciones” en la causa corresponden “pequeñas variaciones” en el efecto.

Puesto que toda medida que tomemos en una magnitud real es aproximada (nunca exacta), la continuidad permite aproximarnos tanto como deseemos al valor del efecto (presión) sin más que controlar, tanto como sea necesario, el valor de la causa (temperatura). Una discontinuidad en la función traería como consecuencia la imprevisibilidad en los efectos, puesto que la causa siempre estará sometida a la imprecisión de la medida.

En la web



Actividad interactiva para reforzar conceptos relacionados con la continuidad.

9 Cálculo de límites cuando $x \rightarrow c$

■ Límites en puntos donde la función es continua

Parece razonable decir que $\lim_{x \rightarrow 4} (x+1)^2 = 5^2 = 25$. Sí, parece lo más adecuado, pero ¿cuál es el fundamento teórico que nos permite hacer esto? Veámoslo:

$(x+1)^2$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ y, por supuesto, en $x = 4$. Por tanto, el límite de la función en $x = 4$ coincide con el valor de la función en $x = 4$.

En general, esto le ocurre a todas las funciones elementales (todas las que manejamos habitualmente) en todos los puntos en los que están definidas.

Si $f(x)$ es una función habitual dada por su expresión analítica y está definida en el punto $x = c$, entonces:

para hallar $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ calcularemos, sencillamente, $f(c)$

■ Funciones definidas a trozos. Límites en el punto de ruptura

Veamos cómo se calcula el límite en $x = c$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < c \\ f_2(x), & x > c \end{cases} \text{ en donde } f_1(x) \text{ y } f_2(x) \text{ son funciones continuas.}$$

Si $f_1(x)$ es continua en c , existe $\lim_{x \rightarrow c^-} f_1(x) = f_1(c)$ y, por tanto, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f_1(c)$.

Análogamente, existe $\lim_{x \rightarrow c^+} f_2(x) = f_2(c)$ y, por tanto, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f_2(c)$.

Por consiguiente:

- Si $f_1(c) = f_2(c)$, el límite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es ese valor.

En tal caso, si la función estuviera definida en $x = c$ (bien porque f_1 rige para $x \leq c$ o bien f_2 es para $x \geq c$), entonces $f(x)$ sería continua en c .

- Si $f_1(c) \neq f_2(c)$, no existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

Ejercicio resuelto

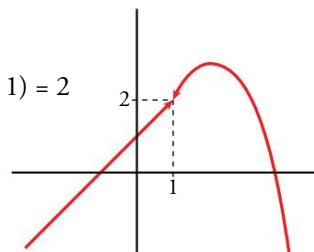
- 1 Calcular, si existe, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x - 1) = 2$$

Como los límites laterales coinciden, existe el $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y es igual a 2.



Ejercicios propuestos

- 1 Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+2x}{x-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

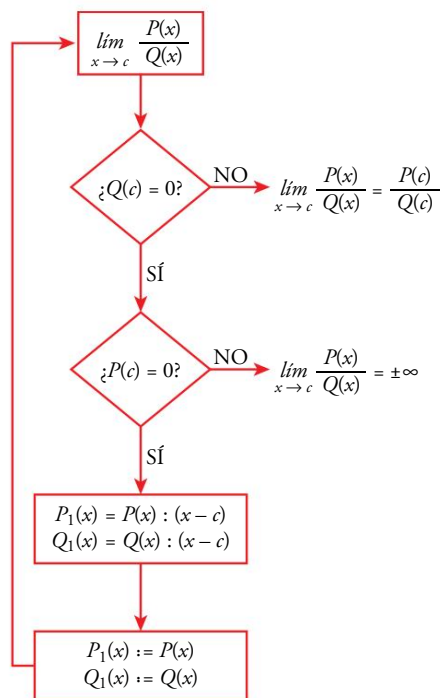
c) $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \sin 2x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} e^{3x+4}$

- 2 Halla el límite cuando $x \rightarrow 5$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x \leq 5 \\ x - 4, & x > 5 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 5 \\ \frac{(x-1)^2}{2}, & x \geq 5 \end{cases}$

Acaso te resulte útil el siguiente organigrama que ya conoces del curso pasado:



La expresión $:=$ significa “se pone en lugar de”.

En la web

Ejercicios para **repasar** el cálculo de límites de cocientes de polinomios.

En la web

Ejemplos y ejercicios de límites en los que aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$.

¿Por qué?

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}} \text{ no existe.}$$

¿Por qué? Si $x \rightarrow 2^-$ es $x < 2$ y en tal caso $x - 2 < 0$, mientras que $x^2 > 0$ y $(x + 3)^3 > 0$. Por tanto, cuando $x \rightarrow 2^-$ el radicando es negativo. La raíz sexta no existe.

Ejercicios propuestos

3 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

4 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

Indeterminaciones cuando $x \rightarrow c$

En el cálculo de límites los casos más difíciles (y más interesantes) son, como ya sabemos, aquellos en los que se presenta algún tipo de indeterminación. Veamos los más importantes.

Cocientes de polinomios, indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

• Si $Q(c) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$ (no es indeterminación).

• Si $Q(c) = 0$, pueden darse dos casos:

— $P(c) = 0$. Entonces la fracción puede simplificarse dividiendo numerador y denominador entre $x - c$, y se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P_1(x)(x - c)}{Q_1(x)(x - c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

— $P(c) \neq 0$. Entonces el límite es $\pm\infty$. Puede ser distinto el límite a la izquierda y a la derecha de c . Para averiguarlo, se recomienda obtener con la calculadora el resultado del cociente para valores de x próximos a c por uno y otro lado.

Veamos algunos ejemplos:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x^2 + 5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{x^2 + 5} = \frac{-4}{9}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{4}{0} = \pm\infty$ (En este caso es $-\infty$ a la derecha de 1 y $+\infty$ a la izquierda).

Otros cocientes, indeterminación $\frac{0}{0}$

Veamos otras expresiones en las que también se presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \frac{0}{0}$

Para poder resolver esta indeterminación, hemos de reducir a índice común las dos raíces:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \frac{\sqrt[3]{(x - 2)x}}{\sqrt{(x - 2)(x + 3)}} = \frac{\sqrt[6]{(x - 2)^2 x^2}}{\sqrt[6]{(x - 2)^3 (x + 3)^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x - 2)(x + 3)^3}}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x - 2)(x + 3)^3}} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

■ Diferencias, indeterminación $(+\infty) - (+\infty)$

La mejor forma de deshacer estas indeterminaciones es efectuar la operación (resta) y estudiar la expresión resultante. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x^2 - 6}{x(x-3)} - \frac{1}{x-3} \right] &= (+\infty) - (+\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x^2 - 6}{x(x-3)} - \frac{x}{x(x-3)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6 - x}{x(x-3)} = \frac{(0)}{(0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

■ Indeterminaciones $(1)^{(+\infty)}$

Tanto el proceso que seguimos en la página 217 como la regla a la que se llega son aplicables al caso de límites cuando $x \rightarrow c$.

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

Ejercicio resuelto

1 Calcular este límite:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x^2 - 4x - 10}{x - 4} \right)^{\frac{1}{x-6}}$$

- Comprobamos que la base tiende a 1 y el exponente a infinito. Es, por tanto, una indeterminación del tipo $(1)^{(+\infty)}$. Podemos aplicar la regla:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x^2 - 4x - 10}{x - 4} \right)^{\frac{1}{x-6}} &= (1)^{(+\infty)} = e^{\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x^2 - 4x - 10}{x - 4} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-6}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 4} \cdot \frac{1}{x-6}} = e^{7/2}\end{aligned}$$

- También podemos calcular el límite razonadamente:

$$\frac{x^2 - 4x - 10}{x - 4} = 1 + \left(\frac{x^2 - 4x - 10}{x - 4} - 1 \right) = 1 + \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 4} = 1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 4}}$$

Tenemos la expresión $1 + \frac{1}{\phi(x)}$, siendo $\phi(x) \rightarrow +\infty$. Hemos de hallar, por tanto, el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \left[\left(1 + \frac{1}{(x-4)/(x^2-5x-6)} \right)^{\frac{x-4}{x^2-5x-6}} \right]^{\frac{x^2-5x-6}{x-4} \cdot \frac{1}{x-6}}$$

Calculamos el límite del exponente:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 4} \cdot \frac{1}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \cdot \frac{1}{x-6} = \frac{7}{2}$$

El límite pedido es: $e^{7/2}$

Ejercicios propuestos

5 Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

6 Calcula: $\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

10 Una potente herramienta para el cálculo de límites

Regla de ¿L'Hôpital?

De la lectura inicial de la unidad 9, se deduce que sería más justo darle a esta regla el nombre de Johann Bernoulli.

La regla de L'Hôpital, que ya conoces del curso pasado, utiliza la derivación para hallar límites de cocientes. Y, con un poco de habilidad, se puede hacer extensiva a otros tipos de límites (productos, potencias...).

REGLA DE L'HÔPITAL. RESUMEN PRÁCTICO

Los límites del tipo $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\square$ es $-\infty$, $+\infty$ o un número, si dan lugar a una indeterminación del tipo $\frac{(0)}{(0)}$ o $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, pueden obtenerse derivando numerador y denominador y calculando (si existe) el límite del cociente de sus derivadas.

A veces, después de este primer paso, se llega a otra indeterminación, por lo que se puede repetir el proceso.

Hay expresiones del tipo $(\infty) - (\infty)$, $(1)^{(\infty)}$, ... que, con cierta habilidad, se pueden poner en forma de cociente para que se les pueda aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejercicios resueltos

1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$

Es una indeterminación del tipo $\frac{(0)}{(0)}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x + 2}{2x - 1} = \frac{14}{3} \rightarrow \text{El límite buscado es } \frac{14}{3}.$$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3-x)e^x - 2x - 3}{x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3-x)e^x - 2x - 3}{x^2} &= \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + (3-x)e^x - 2}{2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - e^x + (3-x)e^x}{2} = \frac{-1-1+3}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

H $\rightarrow$ Aplicando la regla de L'Hôpital.

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^3} &= \frac{(\infty)}{(\infty)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \ln 3}{3x^2} = \frac{(\infty)}{(\infty)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^2}{6x} = \frac{(\infty)}{(\infty)} \stackrel{\text{H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x (\ln 3)^3}{6} = \frac{+\infty}{6} = +\infty \end{aligned}$$

Vemos así, mediante la regla de L'Hôpital, que una función exponencial es un infinito de orden superior a una función potencia.

4 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 5}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{3}{2}$$

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Ejercicios resueltos

6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(5^{1/x} - 1)$

Transformamos el producto en cociente $\left(A \cdot x = \frac{A}{1/x}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x(5^{1/x} - 1) &= (+\infty) \cdot (0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{1/x} - 1}{1/x} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot \ln 5}{-1/x^2} = \ln 5\end{aligned}$$

7 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

Para poner $(\cos 2x)^{3/x^2}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos neperianos:

$$\begin{aligned}A &= (\cos 2x)^{3/x^2} \rightarrow \ln A = \frac{3}{x^2} \cdot \ln(\cos 2x) = \frac{3 \ln(\cos 2x)}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(\cos 2x)}{x^2} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{(-\sin 2x) \cdot 2}{\cos 2x}}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \operatorname{tg} 2x}{x} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3(1 + \operatorname{tg}^2 2x) \cdot 2}{1} = -6 \\ \lim_{x \rightarrow 0} [\ln f(x)] &= -6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-6}\end{aligned}$$

¿Por qué hemos tomado $\ln$ y no logaritmos de otra base? Porque los $\ln$ son los que tienen una derivada más sencilla.

8 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) &= (\infty) - (\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \frac{(0)}{(0)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{0}{1+1+0} = 0\end{aligned}$$

9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - 1)^{2/(x+1)}$

Tomamos logaritmos:

$$\begin{aligned}A &= (2^x - 1)^{2/(x+1)} \rightarrow \ln A = \frac{2 \ln(2^x - 1)}{x+1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln A &= \frac{(+\infty)}{(+\infty)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \frac{2^x \ln 2}{2^x - 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{2^x - 1} = 2 \ln 2 = \ln 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln A &= \ln 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} A = 4\end{aligned}$$

Ejercicio propuesto

1 Hallar los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 + \cos x)}{x \cos x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2^{1/x})x$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$

h) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$

11 Continuidad en un intervalo

Una función se dice que es continua en un intervalo (finito o infinito) de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto del intervalo.

Las funciones elementales que utilizamos habitualmente son continuas en todos los puntos en los que están definidas. Por ejemplo, las funciones polinómicas, las trigonométricas *seno* y *coseno* o las exponenciales son continuas en todo $\mathbb{R}$; las funciones $\log_a x$ son continuas en $(0, +\infty)$; la función $\sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty)$; etcétera.

Podemos, no obstante, construir funciones discontinuas en uno o más puntos. Por ejemplo:

$$y = \begin{cases} f_1(x) & x \leq a \\ f_2(x) & x > a \end{cases}$$

Las funciones definidas a trozos presentan discontinuidades en los puntos de empalme, salvo que en ellos los límites laterales coincidan. Es decir, salvo que $f_1(a) = f_2(a)$.

La siguiente función es discontinua en todos sus puntos. Se llama “función de Dirichlet” y, ciertamente, no tiene nada de elemental.

$$y = D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad de una función en un intervalo, atenderemos a todo lo ya dicho y estudiaremos en detalle la continuidad en los puntos conflictivos.

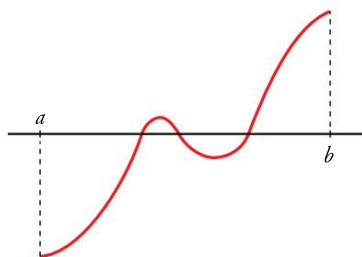
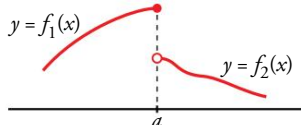
Existe una serie de importantes teoremas relativos a funciones continuas en un intervalo. Con ellos, el hecho de que una función sea continua nos asegura poder realizar ciertas afirmaciones sobre algunos comportamientos, obvios pero importantes, de la función que se estudia. Vamos a verlos.

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces, con seguridad, corta al eje X en ese intervalo. Es decir:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Como tal teorema, habría que demostrarlo, pero, a pesar de lo evidente que es el resultado, la demostración es sumamente complicada, superando el nivel de este curso.



Ejercicio resuelto

1 Probar que la ecuación

$$x^3 - 3x + 40 = 0$$

tiene alguna raíz real.

Aproximar su valor hasta las décimas.

Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x + 40$, continua por ser polinómica. Calculamos el valor de f en distintos puntos para encontrar dos con distintos signos. Así encontramos que $f(-4) = -12$, $f(-3) = 22$.

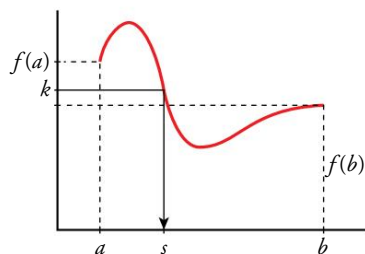
Es decir, f es continua en $[-4, -3]$ y signo de $f(-4) \neq$ signo de $f(-3)$.

Por tanto (teorema de Bolzano), existe un $c \in (-4, -3)$ tal que $f(c) = 0$.

c es una raíz de la ecuación.

Tanteando con valores decimales, obtenemos: $f(-3,8) = -3,472$; $f(-3,7) = 0,447$. Por tanto, podemos asegurar que hay una raíz de la ecuación en el intervalo $[-3,8; -3,7]$ y que el número $-3,7$ se aproxima en menos de una décima a una raíz de la ecuación dada.

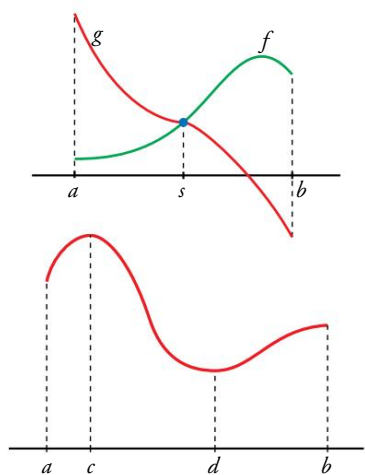




En la web



Ejemplo interactivo para reforzar el teorema de Darboux.



Consecuencias del teorema de Bolzano

Teorema de los valores intermedios (Darboux)

Si f es continua en $[a, b]$, entonces toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Es decir, cualquiera que sea el número k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un número s , $a < s < b$, tal que $f(s) = k$.

El teorema de los valores intermedios es una consecuencia inmediata del teorema de Bolzano. Veamos otra:

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces existe un número $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = g(s)$.

Teorema de Weierstrass

Si f es continua en $[a, b]$, entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo. Es decir, existen sendos números, c y d , del intervalo $[a, b]$ para los cuales se cumple que:

$$\text{cualquiera que sea } x \in [a, b] \text{ es } f(d) \leq f(x) \leq f(c)$$

Por tanto, todos los valores de $f(x)$ están comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Ejercicio resuelto

- 1 Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$g(1) = e^{-1} = 1/e \approx 0,37$$

$$f(1) < g(1)$$

$$f(2) = \ln 2 \approx 0,69$$

$$g(2) = e^{-2} \approx 0,14$$

$$f(2) > g(2)$$

Como ambas son continuas en todo su dominio de definición y, más concretamente, en el intervalo $[1, 2]$, podemos asegurar que se cortan en algún punto comprendido entre 1 y 2.

Ejercicios propuestos

- 1 Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz la ecuación siguiente:

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$$

Busca los intervalos entre -4 y 3 . Comprueba que $f(1,5) < 0$ y tenlo en cuenta.

- 2 Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.

- 3 Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:

a) $x^2 - 1$ en $[-1, 1]$

b) x^2 en $[-3, 4]$

c) $\frac{1}{x-1}$ en $[2, 5]$

d) $\frac{1}{x-1}$ en $[0, 2]$

e) $\frac{1}{1+x^2}$ en $[-5, 10]$

f) e^{-x} en $[0, 1]$

Ejercicios y problemas resueltos

1. Operaciones con límites

Si $f(x) \rightarrow -2$, $g(x) \rightarrow -\infty$, $h(x) \rightarrow 0$, $u(x) \rightarrow +\infty$ y $v(x) \rightarrow 0,4$ cuando $x \rightarrow +\infty$, calcular el límite de las siguientes funciones cuando $x \rightarrow +\infty$:

- a) $f(x) - g(x)$ b) $f(x)/u(x)$
c) $u(x) \cdot f(x)$ d) $v(x)^{g(x)}$
e) $u(x)/h(x)$

Hazlo tú. Siendo f , g , h , u y v las funciones anteriores, calcula el límite de estas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$:

- a) $v(x)^{u(x)}$ b) $u(x)^{g(x)}$ c) $g(x) \cdot u(x)$

Aplicamos los resultados de las operaciones con límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = (-2) - (-\infty) = -2 + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{u(x)} \right] = \frac{(-2)}{(+\infty)} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [u(x) \cdot f(x)] = (+\infty) \cdot (-2) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [v(x)^{g(x)}] = (0,4)^{(-\infty)} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{u(x)}{h(x)} \right] = \frac{(+\infty)}{(0)} = \pm\infty$

Para saber si es $+\infty$ o $-\infty$ hay que conocer las funciones $u(x)$ y $h(x)$ y estudiar el signo del cociente para valores de x muy grandes.

2. Indeterminaciones

Si $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow -\infty$, $h(x) \rightarrow 0$ y $j(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$, identificar las indeterminaciones y asignar el límite en los otros casos.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)]$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) \cdot h(x)]$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/h(x)]$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)^{g(x)}]$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [j(x)^{g(x)}]$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{(+\infty)}{(-\infty)}$ Indeterminación. No podemos saber cuál es el límite de ese cociente sin conocer las funciones f y g . Puede ser finito o infinito.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) \cdot h(x)] = (-\infty) \cdot (0)$ Indeterminación

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right] = \frac{(+\infty)}{(0)} = \pm\infty$

Aunque no podemos saber si el límite es $+\infty$ o $-\infty$ sin conocer la función h , este caso no es una indeterminación porque solo puede darse uno de esos dos resultados.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)^{g(x)}] = (+\infty)^{(-\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [j(x)^{g(x)}] = (1)^{(-\infty)}$ Indeterminación

3. Comparación de infinitos

Comparar los órdenes de infinito y asignar límite a estas expresiones:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (10x^2 - \sqrt{x^5 - 1})$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + 1)}{10x^2 - 5}$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{\log(x^3 + 1)}$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - 3^x}{2^{x+5}} \right)$

Hazlo tú. Comparando los órdenes de infinito, asigna límite a estas expresiones:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{10x^2 - 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (10x^2 - \sqrt{x^5 - 1}) = -\infty$

Porque el minuendo es de menor grado que el sustraendo.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + 1)}{10x^2 - 5} = 0$

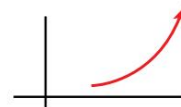
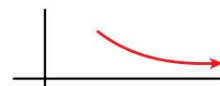
Porque cualquier potencia es un infinito de orden superior a cualquier función logarítmica.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{\log(x^3 + 1)} = +\infty$

Porque toda función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier función logarítmica.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - 3^x}{2^{x+5}} \right) = -\infty$

Porque entre dos funciones exponenciales de base mayor que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior.



4. Cálculo de límites

Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{\ln(7x^2)} \right)^{\ln x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x}{e^x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+1}{2x} \right)^{1/(x-2)}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3} = \frac{(0)}{(0)} \text{ Indeterminación. Multiplicamos numerador y denominador primero por } \sqrt{x+1} + 2 \text{ y después por } \sqrt{x+6} + 3:$$

$$\frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3} = \frac{x-3}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\text{Por tanto: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{\ln(7x^2)} \right)^{\ln x} = (1)^{(+\infty)} \text{ Indeterminación}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{\ln(7x^2)} \right)^{\ln x} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{\ln 7 + 2 \ln x} - 1 \right) \ln x} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x - \ln 7 - 2 \ln x}{\ln 7 + 2 \ln x} \right) \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln 7 \cdot \ln x}{\ln 7 + 2 \ln x}} = e^{\frac{-\ln 7}{2}} \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x}{e^x} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}. \text{ Hay una indeterminación que resolvemos comparando los}$$

órdenes de los infinitos del numerador y del denominador. Entre dos funciones exponenciales de base mayor que 1, la que tenga mayor base es un infinito de orden superior. En este caso la base mayor está en el denominador. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x}{e^x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+1}{2x} \right)^{1/(x-2)} = \left(\frac{7}{4} \right)^{\pm\infty}. \text{ Estudiamos los límites laterales de } \frac{1}{x-2} \text{ en } x=2:$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{(+)}{(-)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{(+)}{(+)} = +\infty$$

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3x+1}{2x} \right)^{1/(x-2)} = \left(\frac{7}{4} \right)^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x+1}{2x} \right)^{1/(x-2)} = \left(\frac{7}{4} \right)^{+\infty} = +\infty \end{cases} \text{ No existe límite.}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = \frac{(+\infty)}{(-\infty)}$$

Dividimos numerador y denominador entre e^x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{e^x} + 1}{\frac{e^{-x}}{e^x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^{2x}} + 1}{\frac{1}{e^{2x}} - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \frac{(0)}{(0)} \text{ Indeterminación}$$

$$\text{Definimos la función en intervalos y simplificamos: } \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \begin{cases} -(x+1), & x < 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Hallamos los límites laterales: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \end{cases} \text{ No existe límite.}$$

Hazlo tú. Calcula los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x} \right)^{2x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1-3x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x-3} - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Ejercicios y problemas resueltos

5. Regla de L'Hôpital

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\arctg(e^x) - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$

Hazlo tú. Calcula estos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = (\infty) - (\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [1/(1+x)]}{\ln(1+x) + [x/(1+x)]} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)^2}{[1/(1+x)] + [1/(1+x)^2]} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x^2} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \cos x^2} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/e^x} = (\infty)^{(0)}$. Tomamos logaritmos.

$\ln \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \ln(\ln x) = \frac{(\infty)}{(\infty)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x \ln x)}{e^x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x e^x} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/e^x} = e^0 = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\arctg(e^x) - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = (+\infty) \cdot (0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(e^x) - (\pi/2)}{1/x} = \frac{(0)}{(0)} \text{ H}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 e^x}{1+e^{2x}} = \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2xe^x - x^2 e^x}{2e^{2x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - x^2}{2e^x} = \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2-2x}{2e^x} = \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \text{ H} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2e^x} = 0$

6. Continuidad en un punto

a) Estudiar la continuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

b) Clasificar sus discontinuidades, si las hay, y representar los resultados obtenidos.

a) Definimos la función por intervalos para prescindir del valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-2}{x} & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \\ \frac{x+2}{x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Para $x < -2$, $f(x)$ es continua porque lo es $\frac{-x-2}{x}$.

Para $x > -2$, $f(x)$ no es continua en $x = 0$ porque no existe $f(0)$.

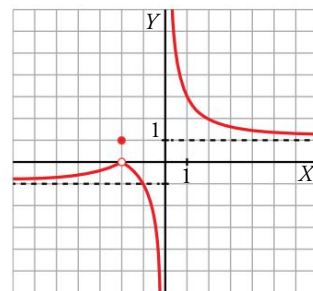
Para $x = -2$, estudiamos la continuidad:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x-2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Por tanto, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0.$$

Como $f(-2) = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2) \rightarrow f(x)$ no es continua en $x = -2$.

b) En $x = 0$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm \infty$.

En $x = -2$ hay una discontinuidad evitable porque existe límite pero no coincide con el valor de la función en ese punto.



Hazlo tú. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ y clasifica sus discontinuidades.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

7. Función continua

Hallar a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x - ax}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Hazlo tú. Determina los valores de a y de b para los que $f(x)$ es continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(ax) & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

8. Teorema de Bolzano

- a) ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo?
- b) Demostrar que la función anterior y $g(x) = 2x - 1$ se cortan en, al menos, un punto.

Hazlo tú. Prueba que las gráficas de las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

9. Teorema de los valores intermedios

Dada la función

$$f(x) = x^3 + x - 5$$

prueba que existe un valor c tal que $f(c) = 20$.

Si $x \neq 0$, $f(x)$ es una función continua porque las funciones que intervienen en su definición lo son. Y $f(x)$ será continua en $x = 0$ si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Comprobemos esto último:

$$f(0) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + b) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - ax}{x^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - a}{2x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Si } a \neq 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1-a}{0} = \pm \infty \\ \text{Si } a = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - a}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Si $a = 1$ y $b = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por tanto, para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$, deben ser $a = 1$ y $b = 0$.

- a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, ya que el denominador no se anula para ningún valor de x .

Como $f(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$, no se puede aplicar el teorema de Bolzano porque no existe ningún intervalo $[a, b]$ en el que se verifique signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$.

- b) Si $f(x)$ y $g(x)$ se cortan, entonces:

$$f(x) = g(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 2x - 1 \rightarrow \frac{1}{1+x^2} - 2x + 1 = 0$$

$$\text{Definimos la función } F(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2x + 1 = \frac{-2x^3 + x^2 - 2x + 2}{1+x^2}.$$

$F(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ porque su denominador nunca se anula.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$, la función $F(x)$ cambia de signo en al menos un $x \in \mathbb{R}$ por lo que, según el teorema de Bolzano, existirá al menos un punto $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(c) = 0$. Y esto nos asegura que existirá al menos un punto $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = g(c)$, y, por tanto, $f(x)$ y $g(x)$ se cortarán en, al menos, un punto c .

f , por ser una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Tanteando, observamos que $f(2) = 5$ y $f(3) = 25$.

Según el teorema de los valores intermedios, f toma todos los valores entre 5 y 25. Como 20 está comprendido entre $f(2) = 5$ y $f(3) = 25$, existirá un número $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 20$.

Ejercicios y problemas guiados

1. Cálculo de límites

Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\lg x}$$

a) Comprueba que hay una indeterminación del tipo $\frac{(\infty)}{(\infty)}$ entre dos infinitos del mismo orden.

El límite del cociente está determinado por los coeficientes de los términos de mayor grado en el numerador y denominador.

b) Se trata de una indeterminación del tipo $(1)^{(\infty)}$. Justifica por qué se puede aplicar la regla práctica para este tipo de indeterminaciones y obtén el límite.

c) • Es una indeterminación del tipo $(\infty)^{(0)}$. Toma logaritmos neperianos y utiliza las propiedades del logaritmo de una potencia y de un cociente.

• Expresa el producto obtenido como cociente para conseguir una indeterminación $\frac{(\infty)}{(\infty)}$.

• Aplica la regla de L'Hôpital y recuerda que el resultado es el logaritmo neperiano del límite buscado.

Solución: a) -1 b) e^8 c) 1

2. Límite finito

Calcular el valor de a para que el siguiente límite sea finito y obtener ese límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$$

• Comprueba que hay una indeterminación del tipo $(\infty) - (\infty)$ y conviértela en otra del tipo $\frac{(0)}{(0)}$ para poder aplicar la regla de L'Hôpital.

• Determina cuál ha de ser el valor de a para poder seguir.

• Con el valor de a obtenido, aplica de nuevo la regla de L'Hôpital.

Solución: $a = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) = \frac{-1}{2}$

3. Función continua

Estudiar la continuidad de esta función según los valores de a :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - ax + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• Razona si la función es continua para $x \neq 1$.

• Estudia la continuidad en $x = 1$. Recuerda la definición de función continua en un punto y calcula $f(1)$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

• Observa que tanto los límites por la izquierda como por la derecha de 1 dependen de a . ¿Cuál debe ser el valor de a para que exista el límite?

• Discute la continuidad de $f(x)$ según el valor de a que has obtenido.

Solución: Si $a = 4$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; si $a \neq 4$, $f(x)$ es discontinua en $x = 1$, tiene un salto finito.

4. Continuidad en un punto

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2 - 2)/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua?

b) Hallar el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de la función.

a) Comprueba si existe límite cuando $x \rightarrow 0$ estudiando los límites laterales.

b) • Observa cómo está definida la función para valores “muy grandes” positivos y “muy grandes” negativos.

• Para calcular los límites ten en cuenta la tendencia de e^x y de $\ln x$ en el infinito.

Solución:

a) No.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Para practicar

Límites cuando $x \rightarrow \pm \infty$

1 Calcula estos límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}) \end{array}$$

2 Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5^x + 1) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-3x} \end{array}$$

3 Calcula el límite de estas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2} & \text{b) } g(x) = \frac{x + \log x}{\log x} \\ \text{c) } h(x) = \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} & \text{d) } i(x) = \frac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} \\ \text{e) } j(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}} & \text{f) } k(x) = \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}} \\ \text{g) } l(x) = 2^x - 3^x & \text{h) } m(x) = \frac{x^2}{x - 3} - \frac{x^2}{5 - x} \end{array}$$

4 Calcula estos límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x + 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1,5^x - x^3) \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x^2}{x - 3}\right) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2}\right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}) \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1,2^x - \frac{3x^2}{x + 1}\right) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x-1} \end{array}$$

5 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{x^2} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x-1} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)^{x+2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2}\right)^{\frac{x+1}{3}} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3x-2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 3}{x + 2}\right)^{x^2-5} \end{array}$$

6 Halla estos límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}) & \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) & \end{array}$$

7 Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1} & \text{b) } g(x) = \frac{x^2 + 2x}{\log x^2} \\ \text{c) } h(x) = \sqrt{3x^2 + 2} - 5x & \text{d) } i(x) = x^2 - \sqrt{x^4 - 1} \\ \text{e) } j(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} & \text{f) } k(x) = \frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \end{array}$$

8 Calcula el límite de estas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Límites en un punto

9 Sabiendo que:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 2} p(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 2} q(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 3 & \lim_{x \rightarrow 2} s(x) = 0 \end{array}$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{p(x)} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} [s(x)]^{p(x)} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} |s(x) \cdot q(x)| & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} |p(x) - 2q(x)| \end{array}$$

10 Calcula estos límites. Si alguno es infinito, calcula los límites laterales:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{3x^2 + 5x + 2}{9x^2 - 4} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} \end{array}$$

11 Calcula y representa los resultados obtenidos.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] & \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x - 2} \right] & \end{array}$$

12 Calcula y estudia los límites laterales cuando sea necesario.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} \right) & \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2} \right) & \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right] & \end{array}$$

Ejercicios y problemas propuestos

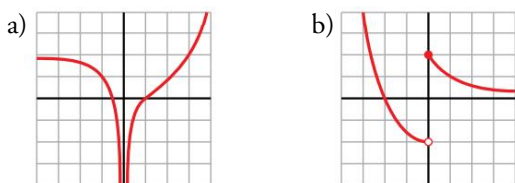
13 Calcula.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2-x-1}{7-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

14 Aplica la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-3x-4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x+x^3)}{x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-b^x}{x}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{1 - \cos x}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$
 i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \right)$
 k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$ l) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

15 Observa las gráficas y di, en cada caso, cuál es el límite cuando $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$.



Continuidad

16 Estudia la continuidad de las siguientes funciones y dibuja su gráfica:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

17 Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio. Representa las para el valor de k obtenido:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+kx & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
 b) $g(x) = \begin{cases} kx^2-3 & \text{si } x \leq 2 \\ e^{x^2-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

18 Calcula el valor de a y b para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

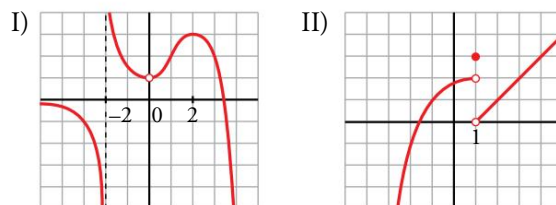
19 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2+1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4+\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 b) $g(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2+1 & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$
 c) $h(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ -1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$
 d) $i(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4} & \text{si } x \neq -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = -2 \end{cases}$

20 Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$
 b) $g(x) = \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$

21 a) ¿En qué puntos son discontinuas las siguientes funciones?:



b) Di cuál es el límite por la derecha y por la izquierda en los puntos de discontinuidad.

Para resolver

22 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3+x^2-3}{5x^3-2x^2} \right)^{1-x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3} \right)^{\frac{x+1}{2}}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{13-x^2}-3}{x-2}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\operatorname{sen} x - x + 1 - \cos x}$

23 Calcula estos límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg}(x)) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{\cotg 3x} \end{array}$$

24 Sabiendo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + a}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $(-1, +\infty)$, halla el valor de a .

25 El rendimiento físico de un deportista, durante 60 minutos, varía con el tiempo según esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -t(t-a) & \text{si } 0 \leq t < 15 \\ 3,5a + 5 & \text{si } 15 \leq t < 30 \\ 100 - bt & \text{si } 30 \leq t \leq 60 \end{cases}$$

Calcula a y b para que la función rendimiento sea continua.

26 Sabemos que la función $f(x) = \frac{3x-4}{x^3 + bx^2 + 8x - 4}$ es discontinua en $x = 2$. Calcula b y estudia el comportamiento de la función en las proximidades de los puntos de discontinuidad.

27 Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}$ con $a \neq 0$, calcula los valores de a y b para que la función pase por el punto $(2, 3)$ y el $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$.

28 Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua. ¿Alguna es continua en todo $\mathbb{R}$?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \ln k & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

29 Halla el valor de b para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

30 Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{e^x - 1} - \frac{k}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

31 ¿Existe algún valor de k para el que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sin x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin^2 x}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

32 Determina dónde son continuas las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x}{\ln(x-2)} & \text{b) } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - x} - 6} \\ \text{c) } h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} & \text{d) } i(x) = \frac{1}{1 - \cos^2 x} \end{array}$$

33 Estudia la continuidad de $f(x)$ según los distintos valores de m .

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

34 a) Calcula el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \sin x}{x^2}$ sea finito.

b) Halla el límite para ese valor de a .

35 Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{2 - |x|}$ y clasifica sus discontinuidades.

36 Estudia la continuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

37 Halla el valor de t para que la siguiente función sea continua en $x = 2$. Représentalas en el caso $t = 2$ y di qué tipo de discontinuidad tiene:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - t & \text{si } x \leq 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

38 Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{|x|}{x+1} & \text{b) } g(x) = |x-3| - |x| \\ \text{c) } h(x) = |2x-1| + x & \text{d) } i(x) = \frac{x+1}{|x|} \end{array}$$

39 Estudia la continuidad en $x = 0$ de esta función:

$$f(x) = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

Ejercicios y problemas propuestos

40 Se define la función f del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

41 a) Comprueba que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x)] = 0$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln(x)]$.

42 Al estudiar el tamaño de una bacteria, los investigadores han comprobado que su diámetro (en micras) varía con el tiempo según esta función:

$$D(t) = \begin{cases} \sqrt{t+a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \frac{-3 + \sqrt{3t-15}}{t-8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

a) Analiza si es posible encontrar un valor de a para el cual el crecimiento se mantenga continuo.

b) Estudia cuál será el diámetro de una bacteria si la observamos al cabo de varias semanas.

43 El precio de compra de un producto varía según el número de unidades encargadas y esto queda reflejado en la siguiente función:

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compra un número muy grande de unidades?

Cuestiones teóricas

44 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en $[0, 1]$ y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

45 Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.

46 Sea la función $f(x) = x^2 + 1$. ¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo $[1, 5]$? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

47 Si $f(x)$ es continua en $[1, 9]$, $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que la función $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 9]$?

48 De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y que para $0 < x \leq 1$ es:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

49 ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

a) Si una función no está definida en $x = 3$, puede ocurrir que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

b) Si $f(x)$ es una función continua tal que $f(x) < 0$ si $x < 3$ y $f(x) > 0$ si $x > 3$, no es posible que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

c) La ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz real.

d) Si sabemos que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$, podemos asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ se cumple que $f(c) = 7$.

e) La ecuación $\sin x + 2x - 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz real.

f) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$, $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un punto c de dicho intervalo en el que se cortan las gráficas de f y g .

g) Si $f(x)$ y $g(x)$ no son continuas en un punto x_0 de su dominio, la función $f(x) + g(x)$ puede ser continua en ese punto.

h) La función $y = \tan x$ no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

50 Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$

51 Estudia los valores que pueden tomar a y b para que la función $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-2x}$ tenga una discontinuidad evitable.

Para profundizar

52 Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x^3 - \operatorname{sen} x & \text{b) } g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1} \\ \text{c) } h(x) = \frac{\operatorname{Ent}(x)}{x} & \text{d) } i(x) = \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x} \end{array}$$

* $\operatorname{Ent}(x)$ es la función **parte entera** de x .

53 Calcula, si es posible, el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua en $x = 0$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

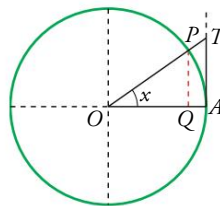
$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } h(x) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

54 Halla el valor de a y de b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$ y pase por el punto $(1, -2)$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| \leq 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

55 En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo $\widehat{AOP}$ de x radianes. Observa que: $\overline{PQ} = \operatorname{sen} x$, $\overline{TA} = \operatorname{tg} x$ y $\widehat{PA} = x$.



Como $\overline{PQ} < \widehat{PA} < \overline{TA} \rightarrow \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$

A partir de esa desigualdad, prueba que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

56 Aplica el resultado anterior para calcular los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

57 Supongamos que f es continua en $[0, 1]$ y que $0 < f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$. Prueba que existe un número c de $(0, 1)$ tal que $f(c) = c$.

Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2 + 1)} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{1}{1-x}} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (1/3)x^3}{x - \operatorname{tg} x} \end{array}$$

2 a) Estudia la continuidad de $f(x) = \frac{9 - x^2}{x^2 + 3x}$ y justifica qué tipo de discontinuidad tiene.

b) Halla sus límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) Representa la información obtenida en a) y en b).

3 a) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4 Determina a y b para que la siguiente función sea continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - a}{b \operatorname{sen} x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} x$$

demuestra que existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = f(c + 1)$.

6 Sea la función definida por esta expresión:

$$f(x) = x + e^{-x}$$

Demuestra que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.