

Integrais inmediatas

1 Obtén a integral indefinida en cada caso:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\int 3dx$ | b) $\int x^2 dx$ | c) $\int x^7 dx$ |
| d) $\int 3x^5 dx$ | e) $\int \frac{1}{x^3} dx$ | f) $\int \sqrt{x^3} dx$ |
| g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ | h) $\int \frac{5}{x^2} dx$ | i) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}} dx$ |
| j) $\int (3x^3 - 5x^2 + 2) dx$ | k) $\int \frac{1}{x} dx$ | l) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} dx$ |
| m) $\int \frac{1}{x-5} dx$ | n) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x-2} dx$ | o) $\int x^3 dx$ |
| p) $\int (\sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + 7) dx$ | q) $\int \left(\frac{4}{x} + \frac{6}{x^3} + e^x \right) dx$ | r) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{3} dx$ |
| s) $\int (1 + \sqrt[3]{x^2}) dx$ | t) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2} dx$ | u) $\int (2x - 4)(3x + 1) dx$ |
| v) $\int (2^x + 3^x) dx$ | w) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ | x) $\int \frac{6x + 6}{x^2 + 2x + 7} dx$ |

2 Obtén a integral indefinida en cada caso:

- | | | |
|-------------------------------------|--|--|
| a) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ | b) $\int \left(\frac{3-5x}{2} \right)^3 dx$ | c) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+1} dx$ |
| d) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ | e) $\int 7^{2x-5} dx$ | f) $\int \sqrt{3x+1} dx$ |
| g) $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} dx$ | h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | i) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt$ |
| j) $\int 2x(x^2+1)^{20} dx$ | k) $\int \frac{3}{s+1} ds$ | l) $\int \frac{x}{(x^2+3)^5} dx$ |
- m) $\int 5^{x^3-6x+1} \cdot (x^2-2) dx$
- n) Obter a única función $f(x)$ cuxa derivada é $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x + e^x + 1$ tal que $f(0) = 2$

Problemas de ABAU/PAU de Galicia [2021-2001]

3 (2022 Extraordinaria P4) — Dada a función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - a & \text{se } x > 1 \end{cases}$

- Calcule o valor do parámetro a para que a función $f(x)$ sexa continua en todo \mathbb{R} .
- Para $a=2$ calcule os extremos relativos da función $f(x)$ e represéntea.
- Calcule a área da rexión delimitada pola función $f(x)$, para $a=2$, e as rectas $Y=0$, $X=0$ e $X=2$.

4 (2022 Ordinaria P4) — Dada a función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

- Calcule o valor do parámetro " a " tendo en conta que a función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.
- Para $a = 6$, calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe OX .

5 (2021 Ord P3) — Un fabricante de automóviles fai un estudo sobre os beneficios, en miles de euros, ao longo dos dez últimos anos, e comproba que estes se axustan á función $B(t)=t^3-18t^2+81t-3$ se $0 \leq t \leq 10$, (t en anos). (a) Que beneficios obtivo a empresa o último ano do estudo? (b) Determine os períodos de crecemento e decrecemento dos beneficios. En que anos se producen os beneficios máximos e mínimos e a canto ascenden? (c) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$

6 (2020 Ord P4) — Dada a función $f(x)=-4x^2+12x-5$

- a) Realice a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo.
 b) Calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$, o eixe OX e as rectas $x=1$, $x=2$.

(modelo 2020) — **Considerase a función** $f(x)=\begin{cases} 9-2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 9-(x-4)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

- c) Representa a gráfica da función estudando previamente os puntos de corte cos eixes de coordenadas, os intervalos de crecemento e decrecemento, os extremos e concavidade ou convexidade .
 d) Calcula de forma exacta a área pechada por dita función e os dous eixes de coordenadas.

7 (2019 Xun B2) — Dada a función $f(x)=x^2-6x+8$ (a) Realiza a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo. (b) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica da función e os eixes de coordenadas.

8 (2019 Xull B2) — Considera a función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 7-x & \text{se } 4 < x \leq 7 \end{cases}$ (a) Representa a función estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremos relativos. ¿Para que valores de x é $f(x) \geq 0$? (b) Calcula a área do recinto limitado polos eixes e a parte da función tal que $f(x) \geq 0$

9 (2018 Xun A2) — (xuño 2018) Dada a función $f(x)=x^3-3x^2+2x$,

- a) Calcula a primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$.
 b) Estuda o crecemento e decrecemento e representa graficamente a función f.
 c) Calcula a área limitada pola curva $f(x)$ e o eixe X entre $x = 0$ e $x = 2$.

10 (2017 Xun B2) — Os beneficios dunha compañía en millóns de euros, nos seus primeiros sete anos, foron estimados pola función $B(x)=ax^3-3x^2+bx$, $0 \leq x \leq 7$, onde x indica o tempo transcorrido en anos, desde a súa fundación.
 (a) Calcula os valores de a e b sabendo que a compañía tivo uns beneficios máximos de 8 millóns de euros no segundo ano.
 (b) Supoñamos que $a = 1/4$ e $b = 9$. Determina cando a empresa non tivo beneficios. Calcula $\int_0^6 B(x)dx$.

11 (2017 Set) — Sexan as función $f(x)=x^2+2x-8$ e $g(x)=-x^2+4$. (a) Representa o recinto limitado polas gráficas de $f(x)$ e $g(x)$, estudando os puntos de corte cos eixes, máximos, mínimos e os puntos nos que se cortan ambas as funcións. (b) Calcula a área do devandito recinto.

12 (2003 Xun) — (a) Determina a función $f(x)$ se se sabe que pasa polo punto $(0, 1)$ e que a súa derivada é $f'(x)=x^3+2x$
 (b) Determina o punto da gráfica no que a recta tanxente ten pendente 0. ¿Que máis se pode afirmar dese punto? Xustifíquese a resposta.

13 (2003 Set) — Determinar os parámetros a, b e c na función polinómica $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, sabendo que ten un mínimo relativo no punto $(3, 0)$ e que a área, $\int_0^3 f(x)dx$, limitada pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe x é $\frac{27}{4}$.

14 (2002 Xun) — Dada a parábola $f(x)=x^2+bx+c$, calcular b e c se pasa polo punto $(0, 2)$ e ten un mínimo en $x = 1$.
 Calcular a área limitada por $f(x)$, o eixo x e as rectas $x=1$ e $y=-x+4$.

15 (2002 Set) — Dada a función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2-4x+8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ Calcula-la area limitada pola función e o eixo x.

16 (2001 Xun) — (a) Dada a función $f(x) = -x^2 + bx + c$, calcúlese os valores b e c se esa función pasa polo punto (1,4) e neste punto a ecuación da recta tanxente é $y = 4$. (b) Calcúlese a área comprendida entre a función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ e a recta $y = x + 1$.

Problemas complementarios

- 17** Calcula a área que determina a curva $y = -x^2 + 4$ co eixe X entre as abscisas -1 e 1.
- 18** Calcula a área que determina a curva $y = x^2 + x - 2$ co eixe X entre as abscisas -1 e 2.
- 19** Calcula a área do recinto limitado pola recta $y = x$ e a parábola $y = x^2$.
- 20** Dadas as parábolas $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ e $g(x) = -x^2 - x + 6$, atopa a área do recinto acoutado encerrado entre ambas.
- 21** Calcula a área do recinto limitado polas rectas $y = x$, $y = 2x$ e a parábola $y = x^2$.
- 22** Calcula a área do recinto limitado pola recta $y = 2 - x$ e a curva $y = x^2$.
- 23** Calcula a área da rexión do plano limitada polo eixe OX e a curva $y = x^3 - 9x$.
- 24** Calcula a área do recinto limitado polas parábolas $y = x^2 - 4x$, $y = \frac{-1}{2}x^2 + 2x$.
- 25** Calcula a área do recinto limitado polo eixe OX e a parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$.
- 26** Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x + y = 7$ e a gráfica da parábola $f(x) = x^2 + 5$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade)
- 27** Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y = -x^2 + 1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixe OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade)
- 28** Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$, a súa recta tanxente no punto (3, 4) e o eixe OX. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade)
- 29** Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -3x^2 + 3$ e a recta $y = -9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 30** Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no que a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 31** Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixos)
- 32** Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, e as rectas $y = 20$, $x - y + 15 = 0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 33** Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola $f(x) = 4x - x^2$ e as rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos correspondente a $x = 0$ e $x = 2$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade)
- 34** Dada a función $f(x) = ax^3 + bx + c$, determina a, b e c sabendo que $y = 2x + 1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente á abscisa $x = 0$ e que $\int_0^1 f(x) dx = 1$

35 Unha inmobiliaria está interesada en adquirir uns terreos que poden ser representados nun determinado plano como a superficie encerrada entre a parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ e a recta $g(x) = 2x$. (a) Fai a representación gráfica simultánea destas dúas funcións. (b) Se unha unidade da área deste plano equivale a 1 km^2 e o prezo do quilómetro cadrado é de 30 millóns de euros, ¿que importe debe pagar a inmobiliaria por eses terreos?

36 Un publicista deseña un cartel publicitario que ten a seguinte forma: base horizontal de 10 m de lonxitude e o resto do contorno limitado pola función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{se } 5 < x \leq 10 \end{cases}$

Debuxa o contorno correspondente ao cartel publicitario e calcula a súa área.

Problemas de ABAU/PAU de outras comunidades

37 (*Cantabria 2021 Modelo*) — Dadas las funciones $f(x) = x^{-6}x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - x$

- Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.
- Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
- Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.
- Calcular el área de la región anterior.

38 (*Asturias 2021 Ord.*) — Dada la función $f(x) = \frac{a \cdot x}{3 \cdot x^2 + 1}$, se pide:

- Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)$, donde F denota una primitiva de f .
- Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 1$.

39 (*Asturias 2021 Extraord.*) — Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

- Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.
- Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3,2$ y $x = -2$.

40 (*Asturias 2020 Ord.*) — Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

- Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot \ln(2)$, donde F denota una primitiva de f .
- Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 2$.

41 (*Asturias 2020 Extraord.*) — Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide:

- Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.
- Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$, Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.