

UD 2 Derivadas - Vídeo 2 - Derivabilidad

domingo, 5 de noviembre de 2023 13:56

2. DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PTO

Sea $f(x)$ una función, para que $f(x)$ sea derivable en un pto $x=a$ tiene que suceder estas dos cosas:

1) $f(x)$ tiene que ser continua en el pto $x=a$

2) Los límites laterales de la función derivada, tienen que coincidir:

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = f'(a^+)$$

Ejemplo

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Estudiar si $f(x)$ es derivable en $x_0 = 0$

Continuidad

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 3x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x_0 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 3) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ NO es derivable en } x_0 = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Continuidad

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 - x + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 3x + 3) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 3x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 3x + 1) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 6x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x - 3) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists f'(x) \text{ en el pto } x=1$$

c) $f(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Calcular m y n para que sea derivable

Continuidad

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx^2 + nx - 3) = m + n - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2nx - 4) = 2n - 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m + n - 3 = 2n - 4 \\ m - n = -1 \end{array}$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2mx + n & \text{si } x < 1 \\ 2n & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2mx + n) = 2m + n \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2n) = 2n \end{array} \right\} 2m + n = 2n \Rightarrow \boxed{2m - n = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} m - n = -1 \\ 2m - n = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -m + n = 1 \\ 2m - n = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 1 - n = -1 \\ 2 = n \end{array} \right\} \boxed{m = 1}$$