Boletín 2 de derivadas (soluciones)

sábado, 4 de noviembre de 2023 12:24

① $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1 & \text{si } x\le 1 \\ 2bx-2 & \text{si } x>1 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si } x\le 1 \\ 2b & \text{si } x>1 \end{cases}$

Continua

$\lim_{x\to 1^-} (ax^2+bx-1) = a+b-1$
$\lim_{x\to 1^+} (2bx-2) = 2b-2$
$\Rightarrow a+b-1=2b-2$; $\boxed{a-b=-1}$

Derivable

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (2ax+b) = 2a+b$
$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2b = 2b$
$2a+b=2b$; $\boxed{2a-b=0}$

$\begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a-b=-1 \\ -2a+b=0 \end{cases}$

$-a=-1 \Rightarrow a=1$

$1-b=-1$

$\boxed{b=2}$

② $x=0$

Continuidad

$\lim_{x\to 0^-} \cos x = 1$
$\neq$
$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x}{\pi}+2\right) = 2$

$\Rightarrow$ en $x=0$ no es continua $\Rightarrow$ no es derivable.

$x=\pi/2$

Continuidad

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2x}{\pi}+2\right) = 3$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (2+\operatorname{sen} x) = 3$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

es continua en $x=\frac{\pi}{2}$

Derivabilidad

$f'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & x<0 \\ \frac{2}{\pi} & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}$ $\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0 \Rightarrow$ No es derivable en $x=\frac{\pi}{2}$

③ $f(x)=\begin{cases} \cos x & x\le 0 \\ a+x^3 & 0<x<1 \\ \frac{b}{2x} & x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \cos x & x\le 0 \\ 1+x^3 & 0<x<1 \\ \frac{2}{x} & x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & x<0 \\ 3x^2 & 0<x<1 \\ \frac{-2}{x^2} & x>1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} \cos x = 1$
$\parallel$
$\lim_{x\to 0^+} a+x^3 = a$

$a=1$

$\lim_{x\to 1^-} (a+x^3) = a+1 = 2$
$\lim_{x\to 1^+} \frac{b}{2x} = \frac{b}{2}$

$\frac{b}{2}=2 \Rightarrow b=4$

Derivabilidad (Solo estudio esto porque ya sé que es continua)

$\lim_{x\to 0^-} (-\operatorname{sen} x) = 0$
$\lim\ 3x^2 = 0$

$\Rightarrow f$ es derivable en $x=0$

$\lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3$
$\lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x^2} = -2$

$\Rightarrow$ No es derivable en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(-\operatorname{sen} x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2=0\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ es derivable en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l}x\to 1^-\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-2}{x^2}=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No es derivable en } x=1$$

4) $$f(x)=\begin{cases}3x+5 & x\le -1\\ 2 & -1<x\le 1\\ x^2-3x+1 & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3 & x<-1\\ 0 & -1<x<1\\ 2x-3 & x>1\end{cases}$$

Continuidad

$x=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+5)=2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} 2=2\\ f(-1)=2\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ continua en } x=-1$$

$x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} 2=2\\ \qquad\qquad \neq\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3x+1)=-1\end{array}\right\}\text{No es continua}\Rightarrow \text{No es derivable}$$

Derivabilidad

$x=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} 3=3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No es derivable en } x=-1\Rightarrow \boxed{f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{-1,1\}}$$

5) $$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ a+bx & 0<x\le 1\\ 3 & x>1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ 3x & 0<x\le 1\\ 3 & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x<0\\ 3 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

Continua

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} a+bx=a\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}(a+bx)=a+b\\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3=3\end{array}\right\}a+b=3\Rightarrow \boxed{b=3}$$

Derivabilidad

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0\\ \qquad\qquad \neq\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 3=3\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} 3=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=1$$

f es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$

6) $$f(x)=\begin{cases}\ln x & 0<x<1\\ ax^2+b & x\ge 1\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<x<1\\ 2a & x\ge 1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2+b)=a+b\end{array}\right\}\begin{array}{l}a+b=0\\ \boxed{b=-1/2}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(2a)=2a\end{array}\right\}2a=1\Rightarrow \boxed{a=1/2}$$

(7) $|x|<2 \Rightarrow$ puede tomar valores positivos y negativos entre -2 y 2

$|x|\geq 2 \Rightarrow$ puede tomar valores negativos menores e iguales que -2 y mayores e iguales que 2

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{si } x\leq -2\\ ax^2+b & \text{si } -2<x<2\\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{2}{x^3} & x\leq -2\\ 2ax & -2<x<2\\ -\frac{2}{x^3} & x\geq 2\end{cases}$$

Continua

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}\\ \lim_{x\to -2^+}(ax^2+b)=4a+b\end{array}\right\} 4a+b=\frac{1}{4} \Rightarrow 16a+4b=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}(ax^2+b)=4a+b\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}\end{array}\right\} 4a+b=\frac{1}{4}$$ (Igual que la anterior)

Derivable

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-}\frac{-2}{x^3}=\frac{1}{4}\\ \lim_{x\to -2^+}2ax=-4a\end{array}\right\} -4a=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{a=\frac{-1}{16}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}2ax=4a\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{-2}{x^3}=\frac{-1}{4}\end{array}\right\} 4a=\frac{-1}{4}$$ (Igual que la anterior)

$$16\left(\frac{-1}{16}\right)+4b=1 \Rightarrow -1+4b=1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

(8) $f(x)=x^2-2x+3 \quad g(x)=ax^2+b$

a) Para que sean tg en el pto $2 \Rightarrow$
- $f'(2)=g'(2) \to$ esto es porque al ser tg las rectas tg van a coincidir
- $f(2)=g(2) \Rightarrow$ por tienen que pasar por el mismo pto

$f'(x)=2x-2 \quad g'(x)=2ax$

$f'(2)=2 \quad g'(2)=4a \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow \boxed{a=1/2}$

$f(2)=4-4+3 \quad g(2)=4a+b \Rightarrow 3=4a+b \Rightarrow 3=2+b \Rightarrow \boxed{b=1}$

b) $f(x)=x^2-2x+3 \quad g(x)=\frac{x^2}{2}+1$

$f'(x)=2x-2 \quad g'(x)=x$

Con calcular una recta tg llegaría pero vamos a calcular las dos para que veais que es la misma.

$a=2$ | $a=2$
$f'(2)=2$ | $g'(2)=2$
$f(2)=3$ | $g(2)=3$

$\boxed{y-3=2(x-2)}$ Recta tg.

(9) $$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-2} & x\geq 2\\ x(x-2) & x<2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & x\geq 2\\ 2x-2 & x<2\end{cases}$$

a)

Continuidad

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=0\\ \lim x(x-2)=0\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x=2$$

Derivabilidad

$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\infty \Rightarrow$ Ya no es derivable.

$\lim_{x\to 2^-} \sqrt[3]{x-2} = 0$
$\lim_{x\to 2^+} x(x-2) = 0$
$f(2) = 0$

$\Rightarrow f$ es continua en $x=2$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \infty \Rightarrow$ Ya no es derivable.

b) $a=3$
$f(3)=3$
$f'(3)=4$

$\Rightarrow \boxed{y-3 = 4(x-3)}$

10 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-9}$ $\quad f'(x) = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}$ $\quad f''(x) = \frac{60x^2+180}{(x^2-9)^3}$

1) Dominio

$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow \mathbb{R}-\{\pm 3\}$

2) Ptos de corte

Eje x

$0 = \frac{x^2+1}{x^2-9} \Rightarrow 0 = x^2+1 \Rightarrow$ No hay ptos de corte

Eje y

$y = \frac{0^2+1}{0^2-9} = -\frac{1}{9} \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{9}\right)$ Pto de corte.

3) Monotonía

$f'(x) = \frac{-20x}{(x^2-9)^2} = 0 \Rightarrow -20x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

+	+	−	−
	−3	0	3

0: Max

$x=0 \Rightarrow y = \frac{0^2+1}{0^2-9} = -\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{\left(0, -\frac{1}{9}\right) \text{ MAX}}$

4) Curvatura

$f''(x) = \frac{60x^2+180}{(x^2-9)^3} = 0 \Rightarrow 60x^2+180=0 \Rightarrow$ No hay ptos de inflexión

+ ∪	− ∩	+ ∪
−3		3

5) Asíntotas

Verticales

$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+1}{x^2-9} = \frac{10}{0} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

$\boxed{x=-3}$ As. Vertical

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x^2-9} = \frac{10}{0} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

$\boxed{x=3}$ As. vertical.

Horizontales

$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-9} = 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ As. horizontal