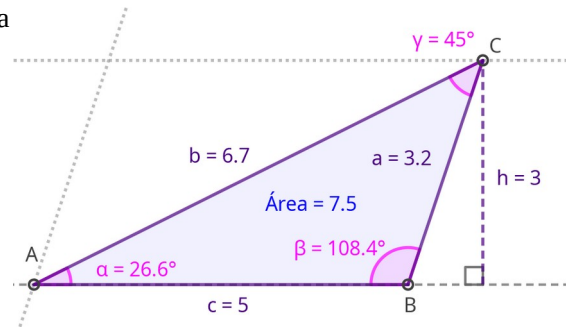


1 - Triángulos rectángulos y Teorema de Pitágoras

- Habitualmente nombramos cada vértice de un triángulo con una letra mayúscula y el lado opuesto con la misma letra minúscula. Los ángulos los nombramos igual que el vértice ó con letras griegas.
- Los ángulos de un triángulo siempre suman 180 grados.
- La suma de la longitud de dos de sus lados siempre es mayor que la del lado restante.
- El perímetro es la longitud de su contorno
- Su área es la mitad que la de un paralelogramo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$



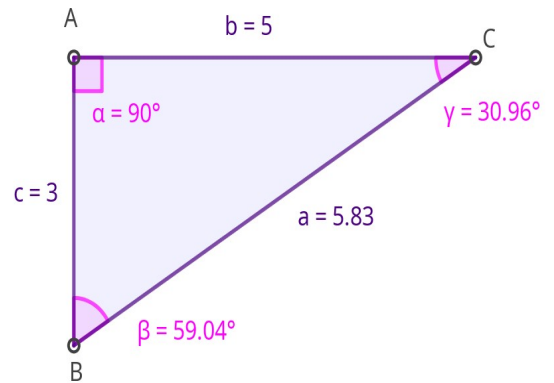
1.1) Tipos de triángulos: (un triángulo es un polígono de 3 lados)

- Según la longitud de sus lados: escaleno, isósceles y equilátero
- Según la amplitud de sus ángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo

1.2) Triángulos rectángulos y Teorema de Pitágoras.

Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos es de 90°. Entonces tenemos que:

- Los otros dos ángulos suman 90° y son complementarios entre sí.
- Los lados que forman el ángulo de 90° se llaman catetos.
- El lado opuesto al ángulo de 90° es la hipotenusa.
- El teorema de Pitágoras nos dice: $a^2 = b^2 + c^2$



1.3) Aplicaciones geométricas del Teorema de Pitágoras.

Con el Teorema de Pitágoras podemos resolver los siguientes tipos de problemas:

- Obtener la diagonal de cuadrados y rectángulos.
- Obtener el valor de la altura de algunos triángulos y usar el dato par calcular su área. Idem para la apotema.
- Relacionar los valores de las diagonales y el lado de un rombo.
- Saber si un triángulo es rectángulo ó no; además determinar si un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo. Si **a** es el lado de más longitud del triángulo y **b** y **c** son los menores, entonces:

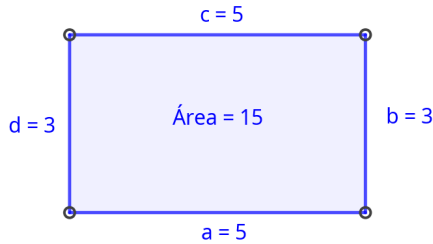
Triángulo acutángulo	Triángulo rectángulo	Triángulo obtusángulo
$a^2 < b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 > b^2 + c^2$

2 - Áreas de figuras planas

2.1) Perímetros y áreas elementales

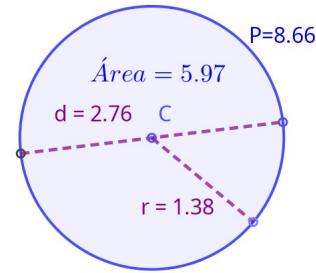
Cuadrado y rectángulo

Rectángulo: $P=2a+2b$ y $A=a \cdot b$



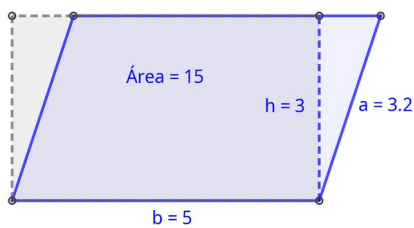
En el cuadrado, al ser $a=b$ queda: $P=4a$ y $A=a \cdot a = a^2$

Circunferencia (ó círculo): $P=2 \cdot \pi \cdot R = \pi \cdot d$ y $A=\pi \cdot R^2$

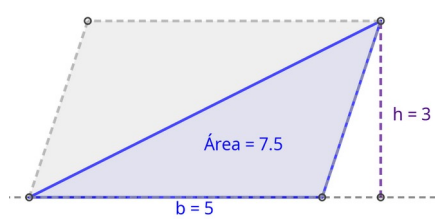


2.2) Perímetros y áreas derivadas de las anteriores:

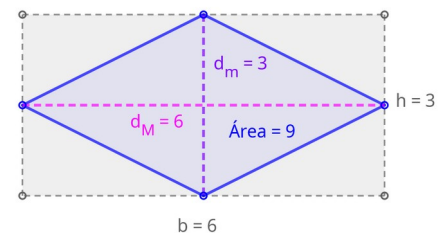
Paralelogramos: se pueden transformar en un rectángulo, así que su área es base por altura: $A=a \cdot h$
(donde h es la altura)



Triángulo: es la mitad de un paralelogramo: $A=\frac{1}{2}b \cdot h$
(donde h es la altura)

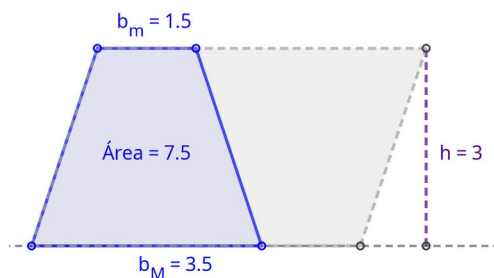


Rombos: equivalen a medio rectángulo, por lo que se suele trabajar con las diagonales: $A=\frac{1}{2}d_M \cdot d_m$
(donde d_M y d_m son las diagonales del rombo)



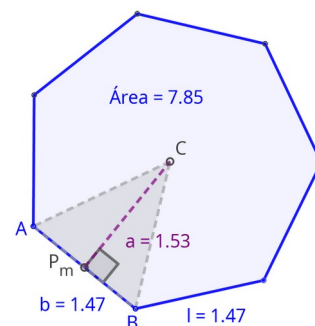
Trapecios: uniendo dos trapecios iguales obtenemos un paralelogramo, así que su área es la mitad de la de un rectángulo: $A=\frac{1}{2}(b_M+b_m) \cdot h$

(donde b_M y b_m son los lados paralelos del trapecio y h es la altura)



Polígonos regulares: se pueden descomponer en varios triángulos iguales. Su área es un múltiplo del área de ese triángulo: $A=n \cdot \frac{b \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$

(donde n es el n.º de lados, b ó l la longitud del lado y a es la apotema. La apotema es la altura del triángulo ABC)



3 - Figuras semejantes

3.1) Semejanza

Dos figuras geométricas F_1 y F_2 son **semejantes** cuando tienen la misma forma y solo se diferencian en su tamaño.

Es decir, que una figura es el resultado de ampliar o reducir la otra **multiplicando todas sus medidas por un mismo número k** llamado **razón de semejanza**. Gráficamente equivale a *hacer zoom*.

◦ Las medidas de F_1 son las medidas de F_2 multiplicadas por k , pero los ángulos son iguales.

3.2) Propiedades de las figuras semejantes

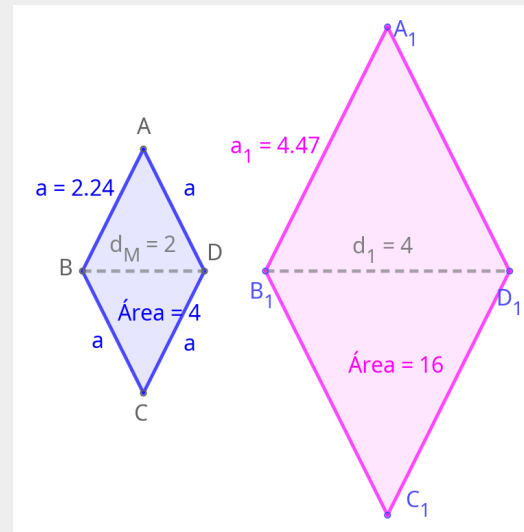
Si F_1 y F_2 son semejantes se cumplen las siguientes propiedades:

1 - Hay una correspondencia entre cada punto de F_1 y F_2 . En particular hay una correspondencia entre los vértices, entre los lados, entre las diagonales y entre los ángulos.

Para destacar la correspondencia se nombran estos elementos con letras relacionadas.

Ejemplo: Dados estos dos rombos, al vértice A del rombo 0 le corresponde el vértice A_1 del rombo 1, a la diagonal BD le corresponde la diagonal B_1D_1 , etc

Correspondencia entre Rombo 0 y Rombo 1	
Rombo 0	Rombo 1
A	A_1
B	B_1
a	a_1
BD	B_1D_1
\hat{A}	\hat{A}_1
...	...



2 - Las razones entre lados correspondientes de F_2 y F_1 forman proporción, es decir, sus lados son proporcionales, y el valor k de ese cociente es la **razón de semejanza**.

La distancia entre dos puntos cualquiera de F_1 se multiplica por k en F_2 . La razón dice cuantas veces es más grande F_2 que F_1 .

Como la razón entre los lados es $k = \frac{a_1}{a} = \frac{4,47}{2,24} = 2$ y la de las diagonales también es $k = \frac{B_1D_1}{BD} = \frac{4}{2} = 2$ entonces la razón de semejanza es $k=2$. El rombo 1 es el doble de grande que el rombo 0.

3 - Los ángulos correspondientes son iguales: si **hacemos zoom a una figura, los ángulos no cambian**.

4 - El área de las figuras se multiplica por k^2 : si el área de F_1 es A_1 y la de F_2 es A_2 , entonces $A_2 = k^2 \cdot A_1$

El área del rombo 0 es $A=4$; como la razón de semejanza es $k=2$, entonces el área del rombo 1 será $A_2 = k^2 \cdot A = 4 \cdot 4 = 16$

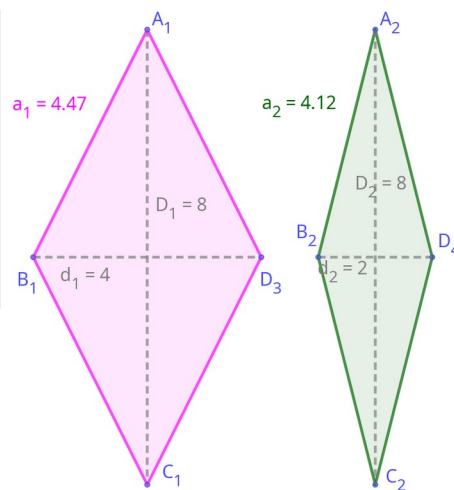
◦ El volumen de cuerpos semejantes se multiplica por k^3 : si los volúmenes son V_1 y V_2 , entonces $V_2 = k^3 \cdot V_1$

Si alguna de estas propiedades **no se cumple**, entonces las figuras **no serán semejantes**.

Ejemplo: En estos dos rombos se puede ver que los ángulos A_1 y A_2 no parecen iguales, por lo que las figuras no serían semejantes.

La razón entre los lados es $k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{4,12}{2,24} = 1,08$, pero la razón de las

diagonales menores es $\frac{d_1}{d_2} = \frac{4}{2} = 2$ entonces las longitudes correspondientes no son proporcionales y **las figuras no son semejantes.**



Ejercicios

4 -

Ej. 1 Hallar el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales son 2 y 4 cm.

Ej. 2 Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 12 y 8 cm y altura 5 cm.

Ej. 3 Calcula el perímetro y el área de un rectángulo de 3 cm de alto y 5 cm de diagonal.

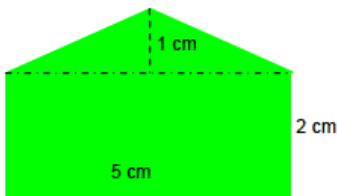
Ej. 4 Calcula el perímetro y área de un triángulo rectángulo de hipotenusa 13m y cateto 5m

Ej. 5 Calcula el área de un triángulo equilátero de perímetro 90 cm.

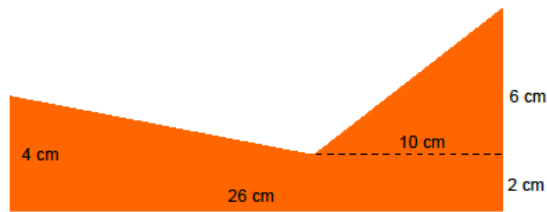
Ej. 6 Calcular el perímetro y el área de un triángulo isósceles de base 6m y lado 12m

Ej. 7 Determina el área de las siguientes figuras compuestas:

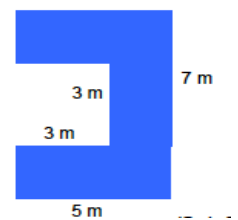
a)



b)



c)



Ej. 8 Calcular el área de un hexágono regular de 6 m de lado.

Ej. 9 Hallar el área de la siguiente señal de tráfico, si su altura es 90 cm y su lado mide 37 cm.



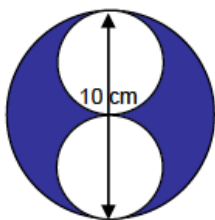
Ej. 10 Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular cuyo apotema mide 16,2 cm y el radio 20 cm.

Ej. 11 Medir, por medio de una cinta métrica, el perímetro de la circunferencia de un objeto cilíndrico (p.ej. una lata de conservas). A continuación, medir con una regla su diámetro. Finalmente, dividir el perímetro entre el diámetro.

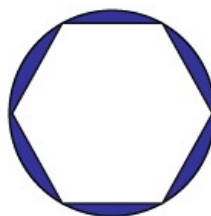
Ej. 12 Calcula el área de una circunferencia de radio 6m.

Ej. 13 Hallar el área de los siguientes recintos sombreados, sabiendo que la circunferencia exterior mide en todos los casos 10 cm de diámetro:

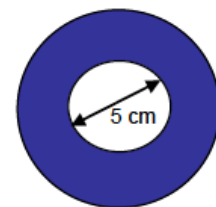
a)



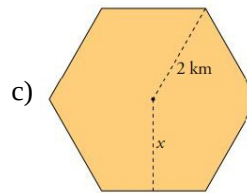
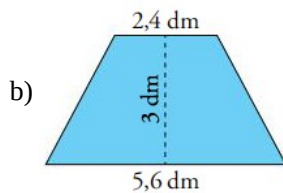
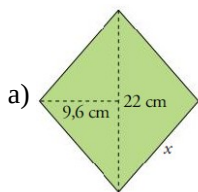
b)



c)



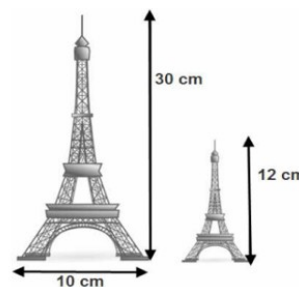
Ej. 14 Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras



Ej. 15 Una fotografía de 7,5 cm de ancho y 10 cm de largo se reduce a un ancho de 6 cm. Determina el largo de la foto reducida y la razón de semejanza.

Ej. 16 En una tienda de souvenir venden reproducciones de la Torre Eiffel de diferentes tamaños.

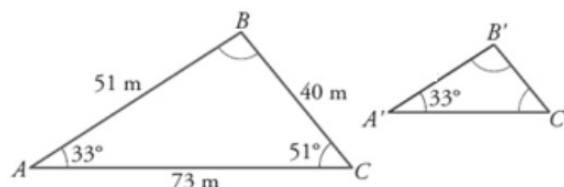
- a) Calcula la razón de semejanza.
- b) ¿Cuánto mide el lado de la base de la pequeña?
- c) Si el lado de la base de la auténtica Torre Eiffel es 108 metros, ¿cuál es su altura?



Ej. 17 Dos figuras F1 y F2 de áreas 7 cm^2 y 63 cm^2 son semejantes.

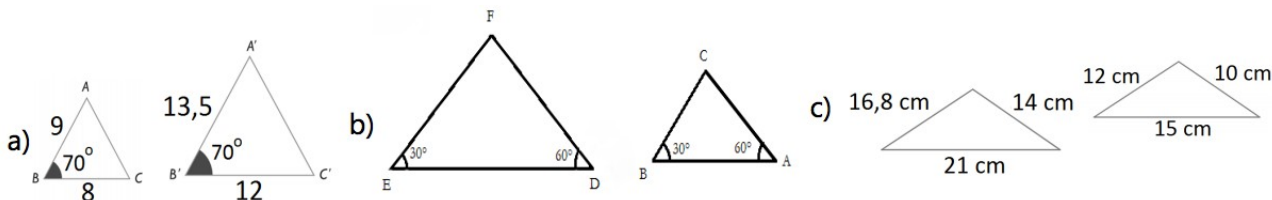
- a) Calcula su razón de semejanza.
- b) Si el perímetro de F2 es 12 cm ¿cuál es el perímetro de F1?

Ej. 18 Calcula los lados y ángulos que faltan en los siguientes triángulos sabiendo que son semejantes y la razón de semejanza es 0,8.



Ej. 19 ¿Son semejantes un triángulo isósceles y un triángulo equilátero? Razona tu respuesta.

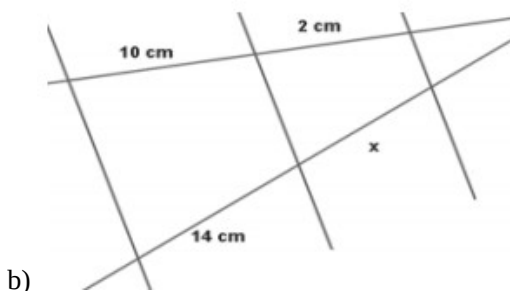
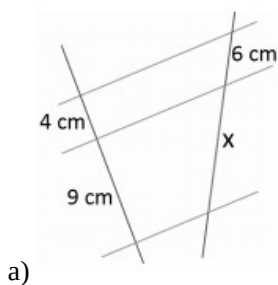
Ej. 20 Averigua si las siguientes parejas de triángulos son semejantes:



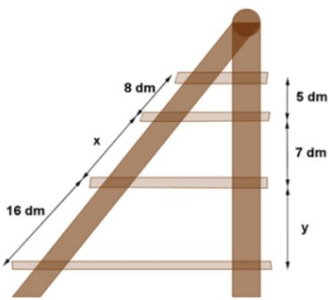
Ej. 21 La distancia real, en línea recta, entre dos pueblos de Pontevedra es de 18 km. ¿qué distancia, en cm, habrá entre ellos en un mapa a escala 1:600 000?

Ej. 22 ¿qué distancia real medida en km hay entre dos ciudades que están separadas por 12 cm en un mapa a escala 1:500 000?

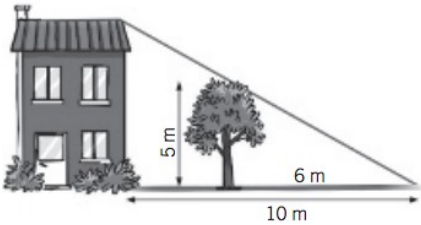
Ej. 23 Calcula las medidas desconocidas en las siguientes figuras:



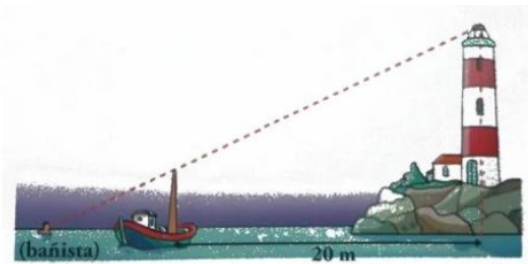
Ej. 24 Las baldas de la repisa que se ve en la figura son paralelas. Calcula las longitudes de x e y .



Ej. 26 Un árbol mide 5 m de altura y a las seis de la tarde proyecta una sombra de 6 m. ¿Qué altura tendrá el edificio si a la misma hora proyecta una sombra de 10 m?

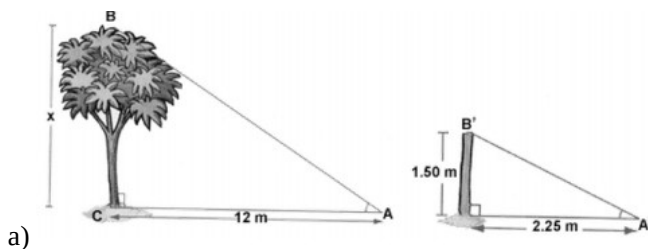


Ej. 28 El bañista se encuentra a 5 metros del barco. La borda del barco está a un metro sobre el nivel del mar. El mástil del barco sobresale 3 m de la borda. El bañista ve alineados el extremo del mástil y el foco del faro. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra el faro?

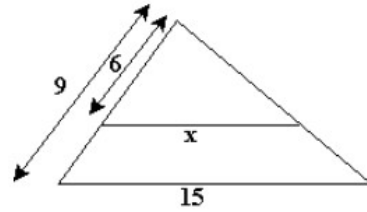


Ej. 30 Una señal de tráfico de 2 m produce una sombra de 1,2 m. A esa misma hora, un árbol proyecta una sombra de 3 m. ¿Qué altura tiene el árbol.

Ej. 31 Calcula la altura de los árboles (x) usando semejanzas:

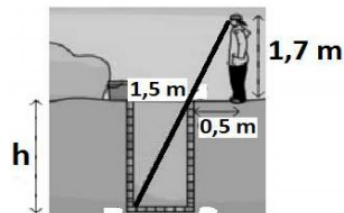


Ej. 25 Dada la siguiente figura:

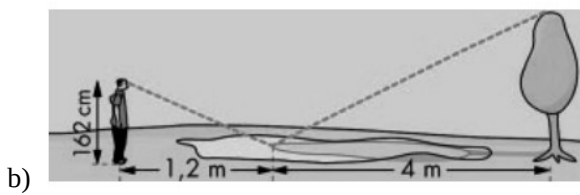
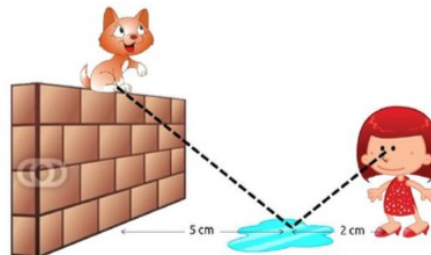


- Explica por qué son semejantes los triángulos
- Calcula la razón de semejanza
- Calcula el valor de x

Ej. 27 Calcula la profundidad del pozo (h) usando semejanzas:



Ej. 29 El gato de Ana se ha subido a un muro y ella quiere saber si se hará daño al bajar (puede saltar como mucho 2 m). Si ve a su gato reflejado en un charco que está a 2 m de ella y a 5 m de él, sabiendo que hasta sus ojos Ana mide 1,5 m. ¿A qué altura está el gato? ¿Podrá saltar sin hacerse daño?



Ej. 32 Laura, que mide 1,5 m va a un concierto de rock, y 80 cm delante de ella, está Daniel, que mide 1,65 m. Calcula la altura del escenario si Laura ve el borde del mismo justo por encima de Luis y Luis se encuentra a 20 m del escenario.

