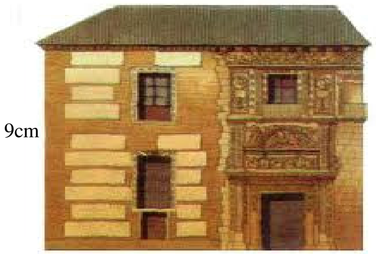
SEMEJANZA

4º E.S.O. Opción B

FIGURAS SEMEJANTES

Dos figuras son **semejantes** cuando sólo difieren en tamaño. Los segmentos correspondientes son proporcionales. Cada longitud de una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo llamado **razón de semejanza**.



$$\frac{9}{6}=1,5 \qquad \frac{15}{10}=1,5 \qquad \frac{12}{8}=1,5 \qquad \text{razón de semejanza}=1,5$$

FIGURAS SEMEJANTES

En las cercanías de la Torre Eiffel hay puestos en los que venden reproducciones suyas. Hay dos que miden 30cm y 12cm de altura.

a) ¿Son semejantes?¿Cuál es la razón de semejanza?
b) El lado de la base de la mayor es 10cm. ¿Cuál es la base de la menor?
c) Si el lado de la base de la auténtica es 108m, ¿cuál es su altura?

a) Son semejantes porque tienen la misma forma. La razón de semejanza es: $\frac{30}{12}=2,5$

b) $\frac{10}{30}=\frac{x}{12}\rightarrow x=\frac{12\cdot 10}{30}=4\text{cm}$

c) $\frac{30}{10}=\frac{\text{altura}}{108}\rightarrow \text{altura}=\frac{30\cdot 108}{10}=324\text{m}$

MEDIDA DE FIGURAS SEMEJANTES. ESCALAS.

La razón de semejanza que se utiliza en la representación mediante modelos, planos o mapas de magnitudes reales es la **escala**.

Ejemplo: La distancia entre dos ciudades es de 100 kilómetros. Si en un mapa aparecen separadas 10 centímetros, ¿cuál es la escala del mapa?

100 km = 10 000 000 cm → 10 cm mapa = 10 000 000 cm realidad

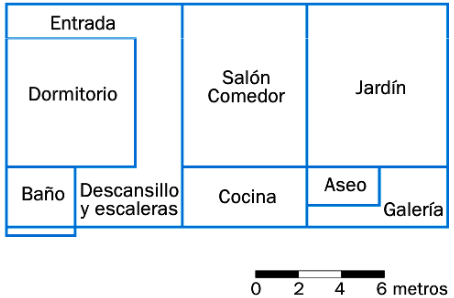
$$\text{escala}\rightarrow \frac{10}{10\ 000\ 000}=\frac{1}{1\ 000\ 000}$$

Se dice que la escala es de 1:1000000
Significa que 1 cm en el mapa equivalen a 1000000 cm en la realidad.

MEDIDA DE FIGURAS SEMEJANTES. ESCALAS.

La razón de semejanza que se utiliza en la representación mediante modelos, planos o mapas de magnitudes reales es la **escala**.

Ejemplo: El siguiente plano viene con la escala gráfica. Pásala a escala numérica sabiendo que la barra negra mide 1’5 cm.

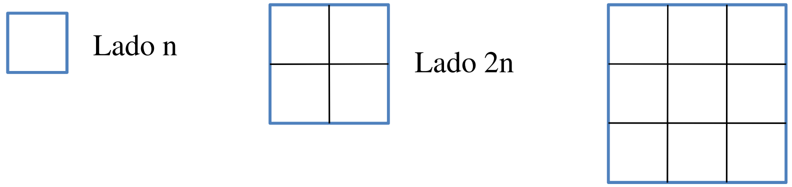


$$\text{escala}: 1\,\text{cm} \rightarrow 2\,\text{m} = 200\,\text{cm} \rightarrow \frac{1}{200}$$

La escala es 1:200

MEDIDA DE FIGURAS SEMEJANTES. ÁREAS Y VOLÚMENES.

Si k es la razón de semejanza de dos figuras, entonces **la razón de sus áreas** es k^2, y **la de sus volúmenes** es k^3.



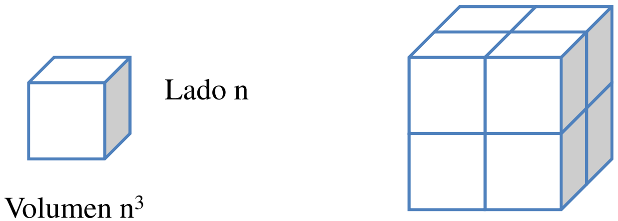
Lado n | Lado 2n | Lado 3n

Área n^2 | Área $(2n)^2 = 4n^2$ | Área $(3n)^2 = 9n^2$

$$\boxed{\text{Lado } k \cdot n \rightarrow \text{Área } (k \cdot n)^2 = k^2 \cdot n^2}$$

MEDIDA DE FIGURAS SEMEJANTES. ÁREAS Y VOLÚMENES.

Si k es la razón de semejanza de dos figuras, entonces **la razón de sus áreas** es k^2, y **la de sus volúmenes** es k^3.



Lado n

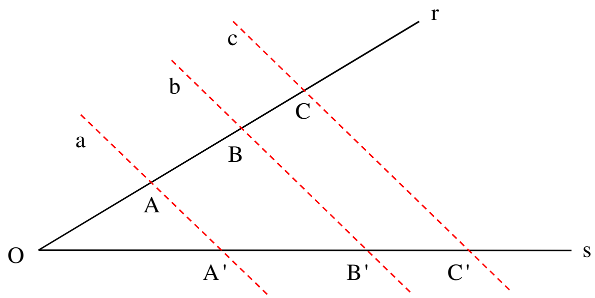
Volumen n^3

Lado 2n

Volumen $(2n)^3 = 8n^3$

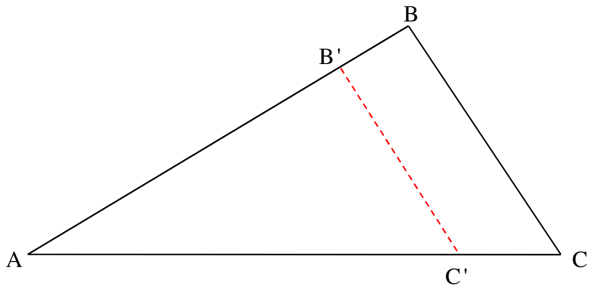
$$\boxed{\text{Lado } k \cdot n \rightarrow \text{Volumen } (k \cdot n)^3 = k^3 \cdot n^3}$$

TEOREMA DE TALES



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES



$\hat{A} = \hat{A}'$ $\qquad \hat{B} = \hat{B}'$ $\qquad \hat{C} = \hat{C}'$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Dos triángulos que están en posición de Tales son semejantes.

TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES

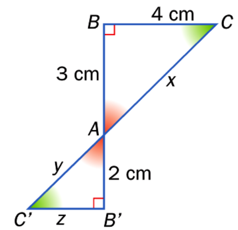
Calcula los lados desconocidos de los triángulos de la figura.

Solución:

Por el teorema de Pitágoras, $x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

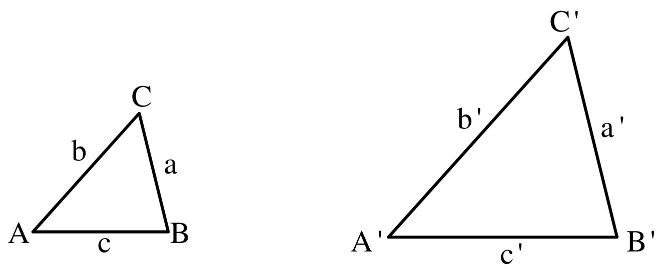
Como el vértice A es compartido y los segmentos BC y $B'C'$ son paralelos, los triángulos están en posición de Tales y por tanto:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{4}{z} \Rightarrow z = \frac{8}{3} \text{ cm} \qquad \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} = \frac{10}{3} \text{ cm}$$



SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

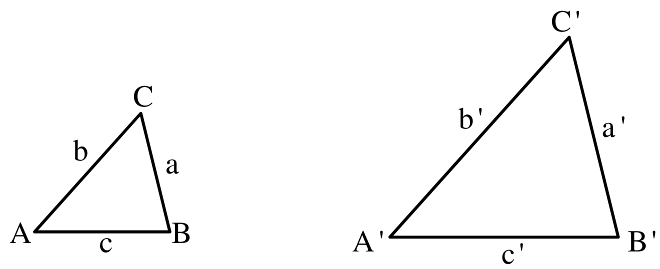
1º - Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si tienen los tres ángulos iguales.



$\hat{A} = \hat{A}'$ $\qquad \hat{B} = \hat{B}'$ $\qquad \hat{C} = \hat{C}'$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

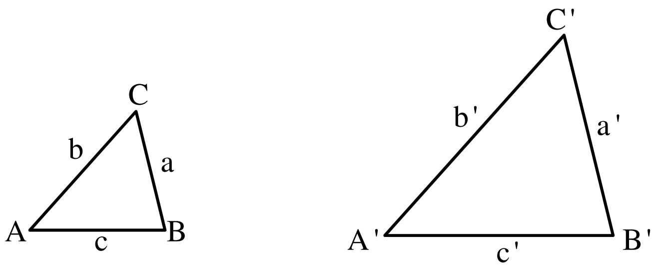
2º - Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si tienen sus lados homólogos proporcionales.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

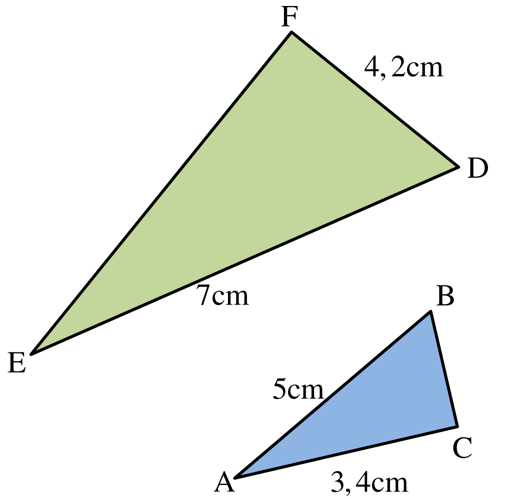
3º - Dos triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \qquad \hat{C} = \hat{C'}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Ejemplo: Calcula la longitud de los lados BC y EF sabiendo que son semejantes.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EF}}$$

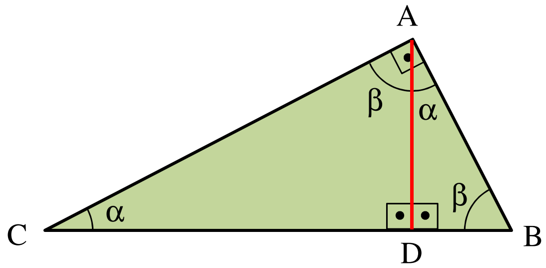
$$\frac{5}{7} = \frac{\overline{BC}}{4,2} = \frac{3,4}{\overline{EF}}$$

$$\overline{BC} = \frac{4,2 \cdot 5}{7} = \frac{21}{7} = 3\text{cm}$$

$$\overline{EF} = \frac{3,4 \cdot 7}{5} = \frac{23,8}{5} = 4,76\text{cm}$$

CONSECUENCIAS DE LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA

Cuando se traza la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo los triángulos en que se divide son semejantes.

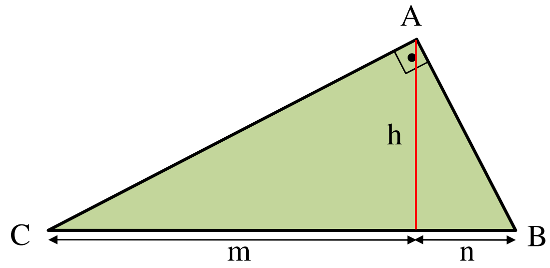


$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Los triángulos ABC, ACD y ADB son semejantes por tener los tres ángulos iguales.

CONSECUENCIAS DE LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA

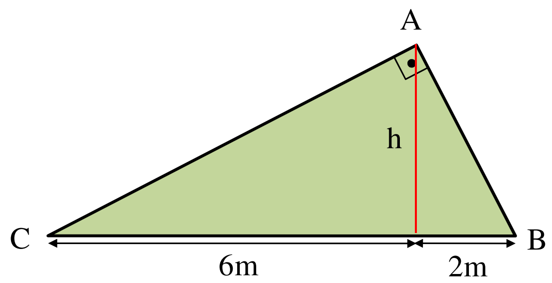
Teorema de la altura: El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma.



$$h^2 = m \cdot n$$

CONSECUENCIAS DE LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA

Ejemplo: Hallar la altura del triángulo:



$$h^2 = 2 \cdot 6 = 12$$

$$h = \sqrt{12} = 3,46\,\text{m}$$