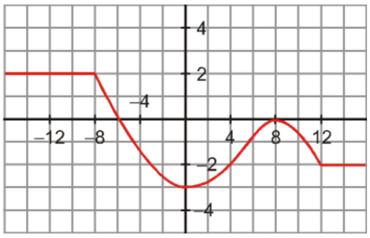
1. Observa la gráfica de la función (EMPIEZA Y ACABA EN DONDE SE VE) y responde:



a) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

b) ¿Cuál es el dominio de definición? ¿Y el recorrido?

c) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos.

d) Halla la TVM de la función en el intervalo [0, 4]

a) Eje X: (-6,0) ; (8,0) Eje Y: (0,-3)

b) Dom f: [-16, 16] Recorrido ó Im f: [-3, 2]

c) Crece en (0,8) ; Decrece en (-8,0) U (8,12) ; Es constante en los demás puntos.

d) TVM [0,4] = $\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{-2-(-3)}{4} = \frac{1}{4}$

2. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-5}{2x^2-6x}$ b) $y = \sqrt{-x^2+5x-6}$

a) **Buscamos los puntos donde se anula el denominador para sacarlos del dominio, pues en esos puntos no existe la función (en la calculadora daría error).**

$2x^2 – 6x = 0$; $x(2x – 6) = 0$; $\begin{cases} x=0 \\ 2x-6=0 ;\ x=3 \end{cases}$ Dom f = R – {0,3}

b) **Para que la raíz exista tiene que ocurrir que el radicando sea ≥ 0**

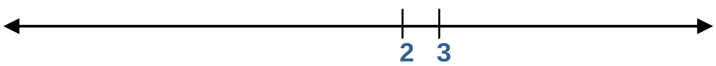
Resolvemos la inecuación de 2º grado $-x^2 + 5x – 6 \geq 0$

Para ello resolvemos primero la ecuación de 2º grado asociada: $-x^2 + 5x – 6 = 0$

OJO! PARA RESOLVER LA ECUACIÓN SE LE PUEDE CAMBIAR EL SIGNO A TODO, PERO DESPUÉS DEBEMOS VOLVER A LA EXPRESIÓN INICIAL PARA RESOLVER LA INECUACIÓN.

$-x^2 + 5x – 6 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Ahora situamos estos dos valores en la recta numérica, lo que nos origina 3 intervalos en los que hay que ver si se cumple la inecuación $-x^2 + 5x – 6 \geq 0$



Ahora podemos proceder de estas dos formas:

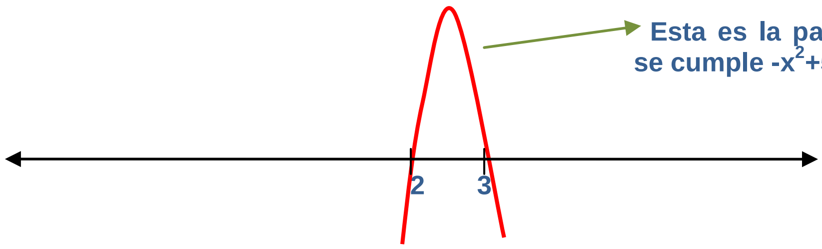
1ª) Tomar un valor en cada intervalo formado, (-∞, 2) , (2,3) , (3, +∞) y sustituir en $-x^2 + 5x – 6$.

Si el resultado es ≥ 0 como indica la inecuación, entonces ese intervalo formará parte del dominio, pues el radicando de la raíz será positivo y por tanto existirá dicha raíz.

Por ejemplo $f(0) = -6 < 0$
$f(2.5) = f(5/2) \geq 0$
$f(4) < 0$

Por tanto la solución es **Dom f = [2,3]**

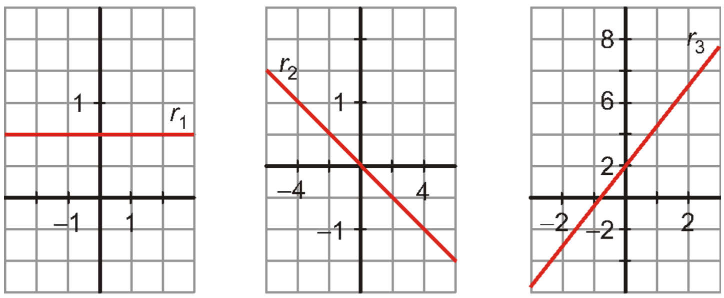
2ª) Esta forma de solucionar es más rápida, y solo se reduce a pensar en la gráfica de la función del radicando $-x^2 + 5x - 6$ (es una parábola invertida) y ver cuándo es positiva o cero, es decir, cuando va por encima del eje X. Si consideramos la recta real como el eje X:



Esta es la parte positiva, donde se cumple $-x^2+5x-6 \geq 0$

Por tanto la solución es Dom f = [2,3]

3. Observando las gráficas, indica cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas y halla la ecuación de cada una de ellas:



r_1: Función constante. Ecuación $y = 2/3$; Pendiente m=0 ; Ordenada en el origen n= 2/3

r_2 : Función de proporcionalidad con pendiente negativa. Ecuación $y = -\frac{1}{4}x$; m= -1/4 ; n=0

r_3 : Función lineal. y= mx +n → $y = 2x + 2$

n=2 pues es el punto de corte con el eje Y. → y = mx + 2

Hallemos la pendiente. m = 2/1 (suponiendo que pase por el (-1,0))

4. Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ x^2 + 3x & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

.

Representamos la parábola $y= x^2 + 3x$ entre los valores x= -3 y x= 1.

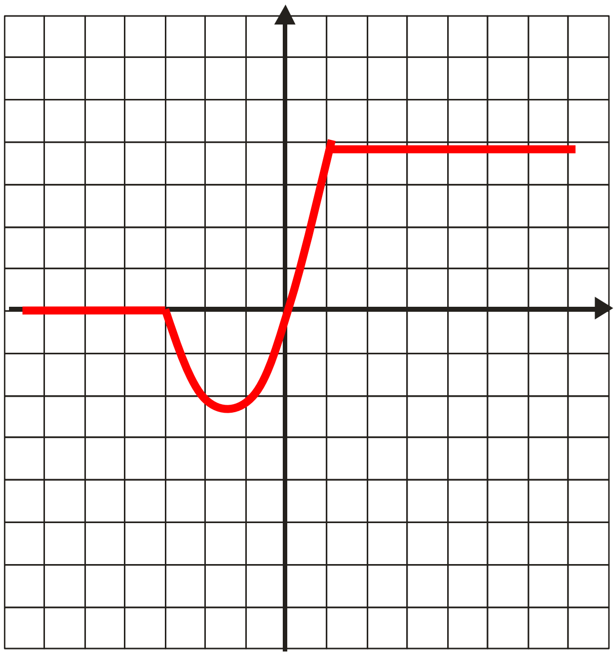
Hallamos el vértice: $x_v = -b/2a = -3/2$ → $y_v = (-3/2)^2 + 3.(-3/2) = 9/4 - 9/2 = -9/4$ → V (- 3/2, - 9/4)

Hacemos una tabla de valores con puntos cercanos al vértice y simétricos a él. También le damos los valores x= -3 y x= 1 para saber dónde empieza y acaba la parábola.

x	y
-3/2	-9/4
-1	-2
-2	-2
0	0
-3	0
1	4

Como ya tenemos los puntos de corte con los ejes no tenemos que hallarlos.

Las rectas de ecuaciones y=0 e y=4 son constantes, y por lo tanto horizontales.



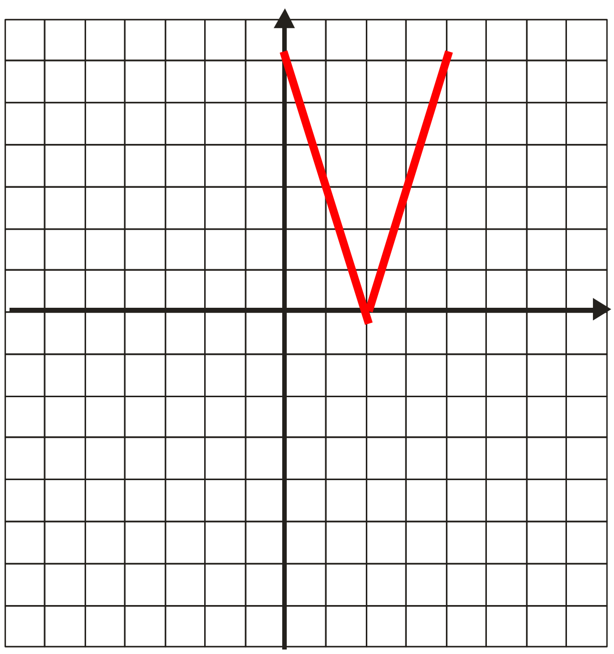
5. Representa la siguiente función, expresándola previamente como una función a trozos:

$$y = |3x - 6|$$

$$y = |3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & si\ 3x - 6 \geq 0 \\ -3x + 6 & si\ 3x - 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x + 6 & si\ x < 2 \\ 3x - 6 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Para hallar los valores de x que cumplen cada tramo de la función resolvemos la inecuación de primer grado 3x – 6 ≥ 0. Para ello despejamos x como si de una ecuación se tratara, teniendo cuidado de cambiar el sentido de la desigualdad si multiplicamos por un número negativo. En este caso no se da esa circunstancia.

x	y
2	0
3	3
0	6



6. Representa las siguientes funciones, indicando sus características principales: (1,5 PUNTOS)

a) $y = -\sqrt{x+5}$ b) $y = -2 + \frac{1}{x}$ c) $y = \log_5 x$

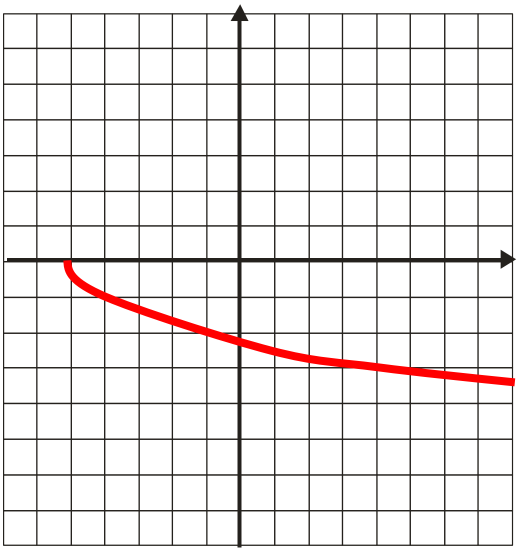
a) $y = -\sqrt{x+5}$

x	y
-5	0
-4	-1
-1	-2
0	$-\sqrt{5}$
4	-3
11	-4

Función radical

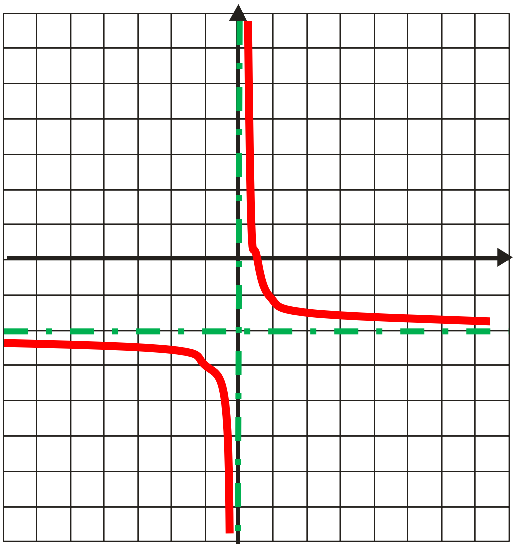
- Su dominio está formado por los valores de x que hacen el radicando positivo o nulo, es decir, hay que resolver la inecuación $x+5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5 \rightarrow$ Dom f = [-5, +∞)

- Es continua en todo su dominio.
- Es decreciente.



b) $y = -2 + \frac{1}{x}$

x	y
1	-1
-1	-3
1/2	0
-1/2	-4
2	- 3/2
- 2	- 5/2



Función de proporcionalidad inversa

- Su dominio está formado por los valores de x que no anulan el denominador. Para hallarlo igualamos el denominador a cero, y sacamos del dominio los valores que resuelvan la ecuación:

  $x = 0 \rightarrow$ En este caso es inmediato Dom f = R – {0}
- Es decreciente
- Continua salvo en x=0
- Asíntota horizontal y = -2
- Asíntota vertical x = 0

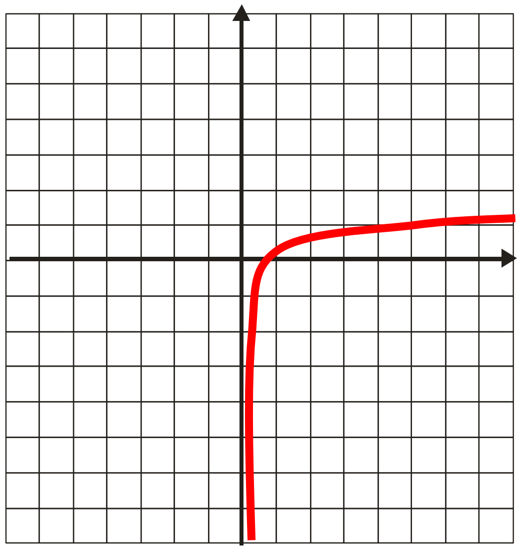
c) $y = \log_5 x$

x	y
1	0
5	1
25	2
1/5	- 1
1/25	- 2

$y = 5^x$

x	y
0	1
1	5
2	25
-1	1/5
- 2	1/25

Función logarítmica de base 5
- Es la inversa de la función exponencial $y = 5^x$
- Solo hay logaritmo de números positivos →Dom f = (0, +∞)
- Creciente
- Continua
- Asíntota vertical x = 0



7. Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 30 m/s. La altura, *h*, que alcanza en cada instante *t* viene dada por $h(t) = 30t - 5t^2$.

a) Haz la representación gráfica de *h*(*t*).
b) Indica el dominio de definición.
c) ¿En qué instantes tiene una altura superior a 25 m?
d) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la pelota? e) ¿En qué momento se alcanza?

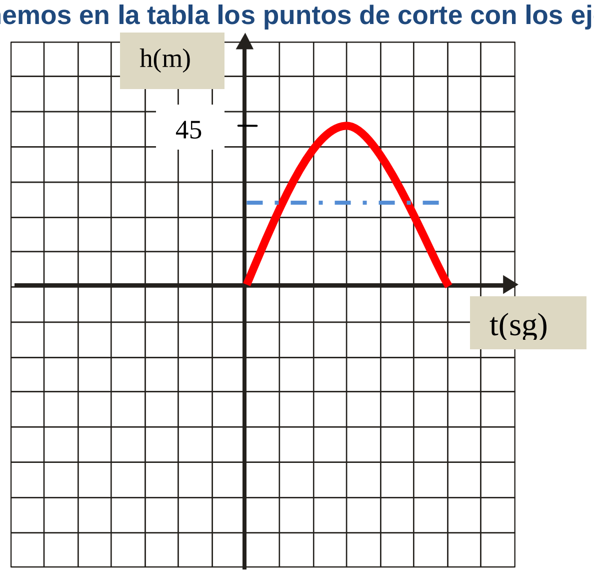
a) $h(t) = 30t – 5t^2$

Es una función cuadrática, por lo tanto su representación gráfica es una parábola. Hay que tener cuidado porque está "desordenada". Si la ordenamos sería $h(t) = - 5t^2 + 30t$
Como la función representa la altura, solo representaremos la parte positiva de la gráfica.

Calculamos el vértice $x_v = - b/2a = - 30/-10 = 3$

x	y
3	45
2	40
1	25
0	0
4	40
5	25
6	0

Ya tenemos en la tabla los puntos de corte con los ejes.



b) El dominio de la función para este caso concreto en el que representamos la altura que alcanza la pelota, sería el intervalo [0,6]

Si pensáramos en la función desde el punto de vista matemático, sin considerar el caso real, su dominio sería el conjunto R de todos los números reales.

c) Se puede ver de dos formas:
1ª- Si miramos la gráfica vemos que desde x=1 hasta x=5 la gráfica de la función va por encima de la línea horizontal que marca los 25 m de altura.

Por tanto la respuesta sería entre los segundos 1 y 5.

2ª- De forma analítica, y por tanto más precisa, habría que resolver la inecuación de segundo grado $-5t^2 + 30t \geq 25$, o lo que es lo mismo la inecuación $-5t^2 + 30t - 25 \geq 0$

Para ello resolvemos primero la ecuación $-5t^2 + 30t - 25 = 0$

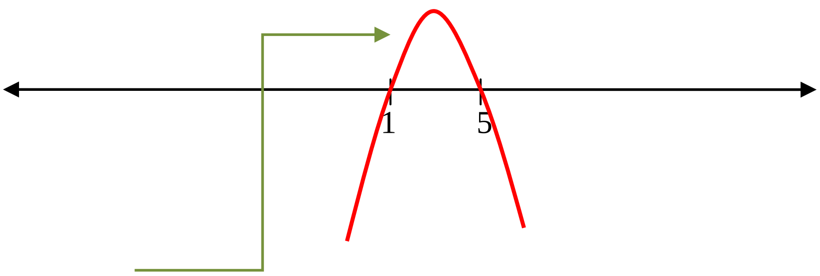
Podemos cambiarle el signo pero hay que tener en cuenta que luego debemos usar la expresión original $-5t^2 + 30t - 25$.

$5t^2 - 30t + 25 = 0 \rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$

Se forman tres intervalos en la recta real, y tomamos valores en cada uno de ellos o estudiamos según la forma de la función cuándo se cumple la inecuación $-5t^2 + 30t - 25 \geq 0$.

Si le damos valores, por ejemplo 0, 2, 6 y los sustituimos en la expresión $-5t^2 + 30t - 25$ vemos que ocurre:
- Para $t=0 \rightarrow -25 < 0$
- Para $t=2 \rightarrow 15 \geq 0$
- Para $t=6 \rightarrow -25 < 0$

Si observamos la gráfica, como $a= -5 < 0$ la gráfica correspondiente sería una parábola invertida:



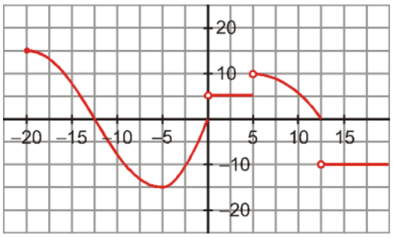
Se cumple que es ≥ 0 cuando va por encima del eje X que representa la recta real, es decir, entre 1 y 5.

Por tanto la respuesta sería entre los segundos 1 y 5.

d) El máximo o el mínimo en una parábola coincide con el vértice, como fácilmente se ve en la gráfica.

La respuesta es que la altura máxima es de 45 m a los 3 segundos.

1. **Dada la función mediante su representación gráfica, responde a las siguientes preguntas:**



a) ¿Cuál es el dominio de definición? ¿Y su recorrido?

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica dónde es discontinua.

c) Indica los puntos de corte con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Halla la TVM de la función en el intervalo [-5, 0]

a) Dom f: [-20, 20] Recorrido o Im f: [-15, 15]

b) Es continua salvo en los puntos $x = 0$; $x = 5$; $x = 12,5$

c) Eje X: (-12.5,0) ; (0,0) ; (5,0) Eje Y: (0,0)

Crece en (-5,0) ; Decrece en (-20,-5) U (5,12.5) ; Es constante en los demás puntos.

d) TVM [-5,0] = $\frac{f(0)-f(-5)}{0-(-5)} = \frac{0-(-15)}{5} = \frac{15}{5} = 3$

2. **Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \frac{2x-3}{3x^2-12}$ **b)** $y = \sqrt{-x^2-6x-8}$

a) Buscamos los puntos donde se anula el denominador para sacarlos del dominio, pues en esos puntos no existe la función (en la calculadora daría error).

$3x^2 - 12 = 0$; $3x^2 = 12$; $x^2 = 4$; $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Dom f = R – {-2,2}

b) Para que la raíz exista tiene que ocurrir que el radicando sea ≥ 0

Resolvemos la inecuación de 2º grado $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$

Para ello resolvemos primero la ecuación de 2º grado asociada: $-x^2 - 6x - 8 = 0$

OJO! PARA RESOLVER LA ECUACIÓN SE LE PUEDE CAMBIAR EL SIGNO A TODO, PERO DESPUÉS DEBEMOS VOLVER A LA EXPRESIÓN INICIAL PARA RESOLVER LA INECUACIÓN.

$-x^2 - 6x - 8 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

Ahora situamos estos dos valores en la recta numérica, lo que nos origina 3 intervalos en los que hay que ver si se cumple la inecuación $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$

Ahora podemos proceder de estas dos formas:

1ª) Tomar un valor en cada intervalo formado, (-∞, -4) , (-4,-2) , (-2, +∞) y sustituir en $-x^2 - 6x - 8$

Si el resultado es ≥ 0 como indica la inecuación, entonces ese intervalo formará parte del dominio, pues el radicando de la raíz será positivo y por tanto existirá dicha raíz.

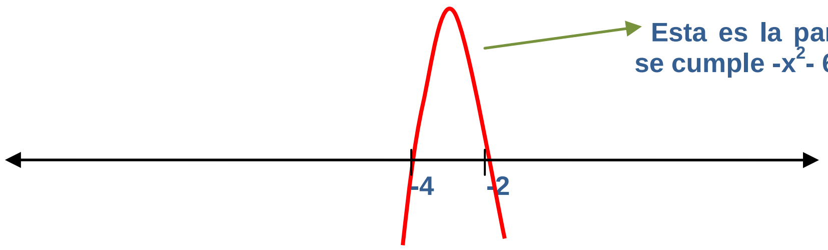
Por ejemplo $f(-5) < 0$

$f(-3) \geq 0$

$f(0) = -8 < 0$

Por tanto la solución es **Dom f = [-4,-2]**

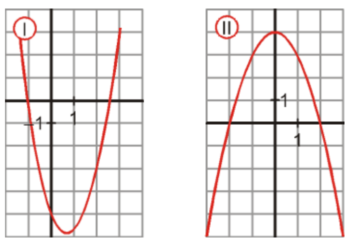
2ª) Esta forma de solucionar es más rápida, y solo se reduce a pensar en la gráfica de la función del radicando $-x^2 - 6x - 8$ (es una parábola invertida) y ver cuándo es positiva o cero, es decir, cuando va por encima del eje X. Si consideramos la recta real como el eje X:



Esta es la parte positiva, donde se cumple $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$

Por tanto la solución es **Dom f = [-4,-2]**-

3. Completa las expresiones de estas parábolas (TEN EN CUENTA VÉRTICE, PUNTOS DE CORTE...):



I → $y = 2x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$

II → $y = \boxed{}x^2 + \boxed{}$

I. Pasa por (0,-5) , por tanto **c = -5** → $y = 2x^2 + bx - 5$

Vamos a utilizar que pasa también por (-1,0): $0 = 2.(-1)^2 + b.(-1) - 5 \rightarrow 0 = 2 - b - 5 \rightarrow$ **b = -3**

$y = 2x^2 - 3x - 5$

II. Pasa por (0,4) , por tanto **c = 4** → $y = ax^2 + 4$

Vamos a utilizar que pasa también por (2,0): $0 = a.2^2 + 4 \rightarrow$ **a = -1**

$y = -x^2 + 4$

4. **Representa la siguiente función:**

$$y = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Representamos la parábola $y= x^2 - 1$ entre los valores x= - 1 y x= 2.

Hallamos el vértice: $x_v = -b/2a = 0 \rightarrow y_v = -1 \rightarrow$ V (0 , - 1)

Hacemos una tabla de valores con puntos cercanos al vértice y simétricos a él. También le damos los valores x= -1 y x= 2 para saber dónde empieza y acaba la parábola.

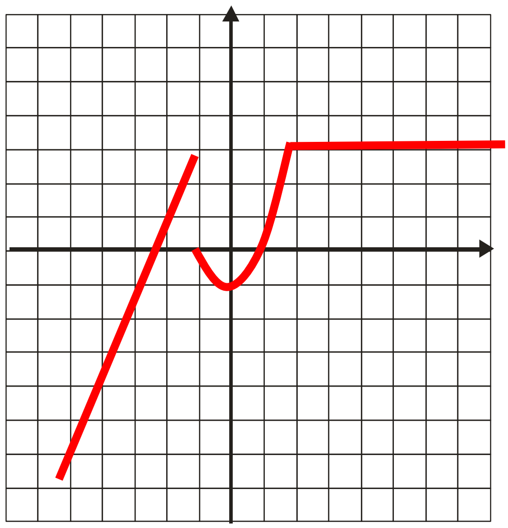
x	y
0	-1
1	0
-1	0
2	3

Como ya tenemos los puntos de corte con los ejes no tenemos que hallarlos.

Vamos a representar la recta y = 2x + 5 para valores menores que -1. Le daremos el valor -1 para ver dónde acabaría.

x	y
-3	-1
-2	1
-1	3

La recta de ecuación y=3 es constante, y por lo tanto horizontal.



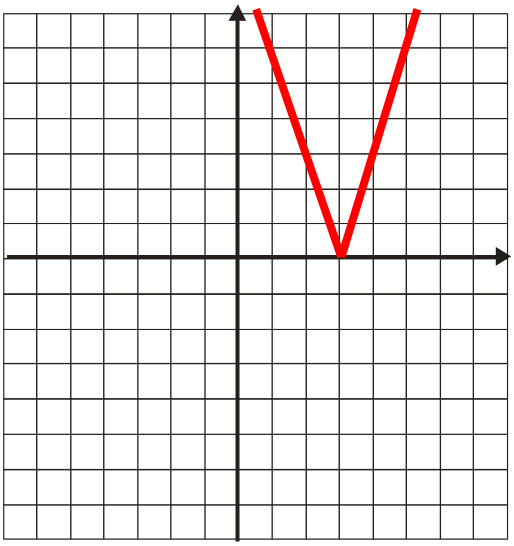
5. **Representa la siguiente función, expresándola previamente como una función a trozos:**

$$y = |-3x - 9|$$

$$y = |-3x+9| = \begin{cases} -3x+9 & si -3x+9 \ge 0 \\ 3x-9 & si -3x+9 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x+9 & si \ \ x < 3 \\ 3x-9 & si \ \ x \ge 3 \end{cases}$$

Para hallar los valores de x que cumplen cada tramo de la función resolvemos la inecuación de primer grado -3x + 9 ≥ 0. Para ello despejamos x como si de una ecuación se tratara, teniendo cuidado de cambiar el sentido de la desigualdad si multiplicamos por un número negativo. En este caso se da esa circunstancia:

$-3x \ge -9 \rightarrow 3x \le 9 \rightarrow x \le 3$



x	y
3	0
4	3
2	3

6. **Representa las siguientes funciones, indicando sus características principales:**

a) $y = \sqrt{-x+3}$ b) $y = -\frac{2}{x} + 2$ c) $y = \log_3 x$

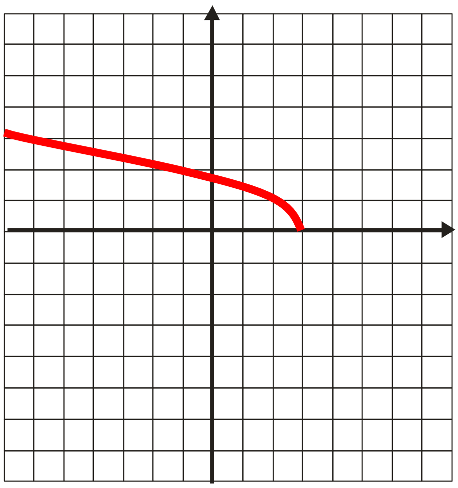
a) $y = \sqrt{-x+3}$

x	y
3	0
2	1
0	$\sqrt{3}$
-1	2
-6	3
-13	4

Función radical

- Su <u>dominio</u> está formado por los valores de x que hacen el radicando positivo o nulo, es decir, hay que resolver la inecuación $-x+3 \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow$ Dom f = (- ∞, 3]

- Es continua en todo su dominio.
- Es decreciente.



b) $y = \frac{-2}{x} + 2$

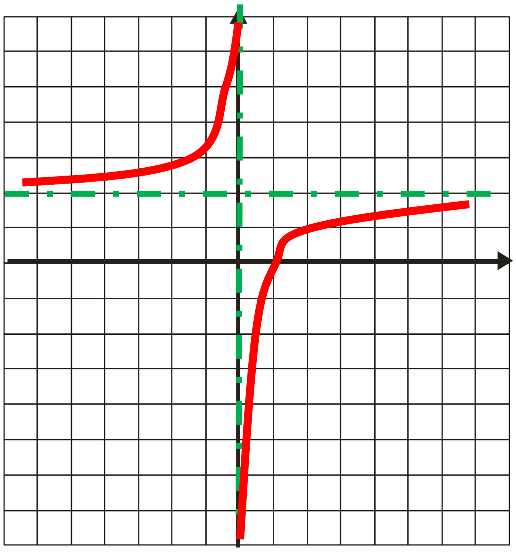
x	y
1	0
-1	4
1/2	-2
-1/2	6
2	1
- 2	3

Función de proporcionalidad inversa

- Su dominio está formado por los valores de x que no anulan el denominador. Para hallarlo igualamos el denominador a cero, y sacamos del dominio los valores que resuelvan la ecuación:

$x = 0 \rightarrow$ En este caso es inmediato Dom f = R – {0}

- Es creciente
- Continua salvo en x=0
- Asíntota horizontal y = 2
- Asíntota vertical x = 0



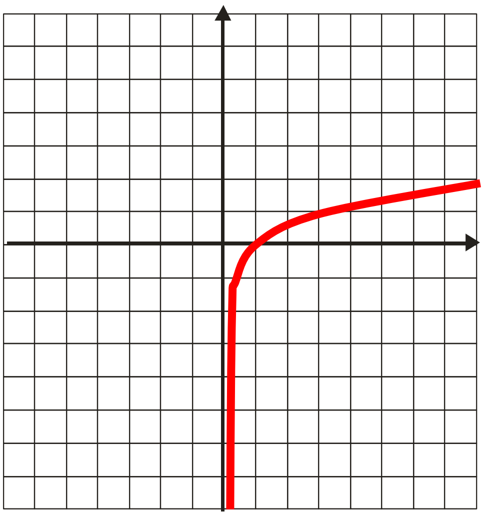
c) $y = \log_3 x$ $y = 3^x$

x	y
1	0
3	1
9	2
1/3	- 1
1/9	- 2

x	y
0	1
1	3
2	9
-1	1/3
- 2	1/9

Función logarítmica de base 3

- Es la inversa de la función exponencial $y = 3^x$
- Solo hay logaritmo de números positivos →Dom f = (0, +∞)
- Creciente
- Continua
- Asíntota vertical x = 0



7. Los datos obtenidos del estudio de una población se ajustan a la función:

$y = 2600 \cdot (0{,}25)^{\frac{x}{2}}$ siendo x el número de años transcurridos.

a) Indica cómo varía la población al cabo de 2 años.

b) ¿Cuántos individuos habrá dentro de 4 años?

c) ¿Al cabo de cuánto tiempo la población se habrá reducido a la mitad?

a) $y = 2600 \cdot (0{,}25)^{x/2}$

En el momento actual $x = 0 \rightarrow y = 2600 \cdot (0{,}25)^{0/2} = 2600$ habitantes.

Dentro de 2 años $x = 2 \rightarrow y = 650$ habitantes.

Por tanto en 2 años se pasó de 2600 a 650 habitantes.

b) $x = 4 \rightarrow y = 162{,}5 \approx 163$ habitantes.

c) Aunque se puede hacer tanteando, lo vamos a hacer de forma más precisa:

La población tiene que reducirse a 1300 habitantes. Por tanto tiene que ser $y = 1300$ para averiguar el valor de x correspondiente.

d) $1300 = 2600 \cdot (0{,}25)^{x/2} \rightarrow \frac{1300}{2600} = (0{,}25)^{x/2} \rightarrow 0{,}5 = (0{,}25)^{x/2} \rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} \rightarrow$

$2^{-1} = (2^{-2})^{x/2} \xrightarrow[\text{resolviendo la ecuación exponencial}]{} 2^{-1} = 2^{-x} \rightarrow -1 = -x \rightarrow x = 1$

Al cabo de 1 año se reducirá a la mitad.

También se puede hacer tomando logaritmos para despejar el exponente:

$0{,}5 = (0{,}25)^{x/2} \rightarrow \log 0{,}5 = \log (0{,}25)^{x/2} \rightarrow \log 0{,}5 = \frac{x}{2} \log 0{,}25 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}25} \rightarrow$

$x = 2 \cdot \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}25} \rightarrow x = 1$

También se puede hacer tomando logaritmos de base 2 en $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$:

$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} \xrightarrow[\text{usando la definición de logaritmo}]{} 2^{-1} = (2^{-2})^{x/2} \rightarrow 2^{-1} = 2^{-x} \rightarrow -1 = -x \rightarrow x = 1$