

POTENCIAS, RADICALES Y LOGARITMOS

EJERCICIOS I

[1] Calcular, utilizando las propiedades de las potencias:

$$\begin{array}{lllllll} \text{a)} (-2)^8 & \text{b)} 5^3 & \text{c)} (-3)^3 & \text{d)} 7^3 - 1 & \text{e)} (-1)^3 45 & \text{f)} (-1)^5 68 & \text{g)} (-2)^{-3} \\ \text{h)} (-5)^{-4} & \text{i)} \left(\frac{3}{4}\right)^4 & \text{l)} \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} & \text{m)} \left(-\frac{3}{4}\right)^3 & \text{n)} \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} & \text{o)} \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} & \text{p)} (-5)^0 \end{array}$$

[2] Calcular, utilizando las propiedades de las potencias:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} (-5)^2 & \text{b)} -5^2 & \text{c)} \left(-\frac{2}{3}\right)^0 & \text{d)} \frac{2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^2 \cdot 2^6} \\ \text{g)} \frac{2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5}{2^2 \cdot 2^{-6}} & \text{h)} \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} & \text{i)} \frac{2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 \cdot 3^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 2^8 \cdot 3^{-6}} & \text{l)} \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot c \cdot b^0}{a^{-1} \cdot b^{-2} \cdot c^{-2} \cdot a} \\ \text{m)} \left[\frac{(a \cdot a^3)^{-2}}{a^{-4}} \right]^5 \end{array}$$

[3] Calcular: a) $\left(\frac{4}{5} + 1\right)^2 \left(\frac{2}{3} - 2\right)^3$ b) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2}$

[4] Señala qué igualdades son ciertas y corrige las falsas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a^2 + a = a^3 & \text{b)} (a^3)^5 = a^8 & \text{c)} a^4 \cdot b^4 = (ab)^4 \\ \text{d)} \sqrt[3]{8} = \sqrt[5]{8} & \text{e)} \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} & \text{f)} \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \end{array}$$

[5] Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias, y halla el resultado:

$$\text{a)} \frac{4^{-2} \cdot (-3)^2 \cdot 5^{-3}}{9^{-2} \cdot 2^4 \cdot 5^{-2}} \quad \text{b)} \frac{6^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{4^{-3} \cdot 2^2 \cdot 5^{-1}} \quad \text{c)} \frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}}$$

[6] Efectúa, con las propiedades de las potencias, simplificando al máximo el resultado:

$$\text{a)} \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 : \left(\frac{4}{3} \right) \right]^3 \quad \text{b)} \left[\frac{(-2)^3 \cdot (-3)}{4} \right]^2 \quad \text{c)} [(2^2)^3]^{-4} \quad \text{d)} \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{9}{3} \right) \cdot (-3) \right]^{-2}$$

[7] Simplifica las siguientes expresiones:

$$\text{a)} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{8}\right)^2} \quad \text{b)} \frac{10^{-3} \cdot 2^5 \cdot 14^2 \cdot 5}{6^5 \cdot 12^3}$$

[8] Efectúa con calculadora:

$$\text{a)} 3^{-4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} + 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} \quad \text{b)} 6^3 \cdot 3^{-2} - 8^2 : 0,5^{-4}$$

Soluciones I: **[1]** a) 256 b) 125 c) -27 d) 1/7 e) -1 f) 1 g) -1/8 h) 1/625 i) 81/256 l) 256/81
m) 81/256 n) -64/27 ñ) -27/64 o) 64/27 p) 1 **[2]** a) 25 b) -25 c) 1 d) $2^4 = 16$ e) $2^{23} = 8388608$ f)
1 g) $2^8 = 256$ h) $-2/5$ i) $2^{-6} \cdot 3^2 = 9/64$ l) $a^3 \cdot b^4 \cdot c^3$ m) $a^{-20} = 1/a^{20}$ **[3]** a) $-192/25$ b) 648

[4] Ciertas c) y f); corregidas a) $a^2 \cdot a = a^3$ b) $(a^3)^5 = a^{15}$ d) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

[5] a) $\frac{3^6}{2^8 \cdot 5} = \frac{729}{1280}$ b) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^5 = 75000$ c) $\frac{2^3}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$ **[6]** a) 1/27 b) 36 c) $1/2^{24}$ d) 9

[7] a) 1/4 b) $\frac{7^2}{2^7 \cdot 5^2 \cdot 3^8}$ **[8]** a) 41 b) 20

EJERCICIOS II

[1] Expresa como una potencia de a y de 2, respectivamente:

$$\frac{a \sqrt[5]{a \sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a^2}} \quad \frac{2^{\frac{1}{5}} \sqrt{32}}{\sqrt{2} \sqrt[3]{2}}$$

[2] Simplifica los radicales: a) $\sqrt[6]{2^3}$ b) $\sqrt[12]{5^4}$ c) $\sqrt[18]{a^{12}}$

[3] Sacar fuera de la raíz los factores posibles:

a) $\sqrt{200}$ b) $\sqrt[3]{250}$ c) $\sqrt[3]{\frac{81}{16}}$ d) $\sqrt[5]{x^9 y^{15} z^{20}}$ e) $\sqrt[4]{0,0016}$

[4] Calcula: a) $\sqrt{\frac{4}{36} + \frac{5}{4}}$ b) $\sqrt{10 + 2\sqrt{7} + \sqrt[3]{8}}$

[5] Calcula (utilizando radicales semejantes cuando sea posible):

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{375}$
 c) $7\sqrt{a} - 8\sqrt{a} + 5\sqrt{a}$ d) $\sqrt[3]{ab} - 3\sqrt[3]{a^4 b} + \sqrt[3]{ab^4}$

[6] Expresa mediante una sola raíz, extrayendo después todos los factores posibles:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a^{14}}}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{512b^9 a^8}}$ c) $\sqrt{a^3 b \sqrt[3]{a^2 b^2}}$ d) $\frac{\sqrt{a} \sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$

[7] Calcula, con la calculadora y redondea a las centésimas:

a) $7^{1,3}$ b) $5^{0,34}$ c) $10^{-0,25}$

[8] Introduce en los radicales los números y las letras:

a) $5\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[5]{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ d) $x\sqrt{x}$ e) $\frac{\sqrt[3]{b+1}}{b}$

[9] Calcula los cuadrados de los números:

a) $2\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $1 + \sqrt{2}$ d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

[10] Reduce a índice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}$ b) $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt{ab}, \sqrt[4]{b}$

[11] Racionalizar:

a) $\frac{7}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ d) $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$ e) $\frac{7}{\sqrt{5} + 3}$ f) $\frac{5}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ g) $\frac{2}{a + \sqrt{b}}$

Soluciones II: **[1]** a) $a^{19/30}, 2^{22/15}$ **[2]** a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt[3]{5}$, c) $\sqrt[3]{a^2}$, **[3]** a) $10\sqrt{2}$, b) $5\sqrt[3]{2}$, c) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ d) $x y^3 z^4 \sqrt[5]{x^4}$, e) $\pm \frac{2}{10} = \pm \frac{1}{5}$ **[4]** a) $\pm 7/6$, b) ± 4 , **[5]** a) $2\sqrt{2}$, b) $-3\sqrt[3]{3}$, c) $4\sqrt{a}$, d) $(1 - 3a + 4b)\sqrt[3]{ab}$ **[6]** a) $\sqrt[12]{a^{14}} = a \sqrt[12]{a} = a \sqrt[6]{a}$, b) $2ba\sqrt[8]{2b}$ c) $\sqrt[6]{a^{11}b^5} = a \sqrt[6]{a^5b^5}$ d) $\sqrt[12]{a^{13}} = a \sqrt[12]{a}$ **[7]** a) $12, 55$, b) $1, 73$, c) $0, 56$ **[8]** a) $\sqrt{50}$, b) $\sqrt[5]{96}$, c) $\sqrt[3]{\frac{3}{96}}$, d) $\sqrt{x^3}$, e) $\sqrt[3]{\frac{b+1}{b^3}}$ **[9]** a) 8 , b) $1/3$, c) $3 + 2\sqrt{2}$, d) $3 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$ **[10]** a) $\sqrt[6]{a^3}, \sqrt[6]{b^2}$, b) $\sqrt[12]{a^8}, \sqrt[12]{a^6b^6}, \sqrt[12]{b^3}$, **[11]** a) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$, c) $\frac{\sqrt{ab}}{ab}$, d) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$, e) $\frac{7(\sqrt{5} - 3)}{-4}$, f) $\frac{5(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{5\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{3}$, g) $\frac{2(a - \sqrt{b})}{a^2 - b} = \frac{2a - 2\sqrt{b}}{a^2 - b}$,

EJERCICIOS III

[1] Utiliza la calculadora para hallar el valor de los siguientes radicales, cuando sean números reales, dando el resultado redondeando hasta las milésimas:

a) $\sqrt[3]{331}$ b) $\sqrt[6]{2134}$ c) $\sqrt[4]{-235}$ d) $\sqrt[5]{-235}$,

[2] Expresa en forma de raíz:

a) $5^{1/7}$ b) $45^{2/5}$ c) $2^{-5/6}$

[3] Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt[5]{a^6}$ c) $\sqrt{a^4 b^5}$ d) $x \sqrt{x}$ e) $x^3 \sqrt{x^3}$ f) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

[4] Efectúa las siguientes operaciones dejando el resultado en forma de radical o número racional:

a) $\frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{6}\sqrt{10}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{6}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{18}\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{12}}$

[5] Reduce a común índice y realiza las multiplicaciones y divisiones indicadas:

a) $\sqrt{48}\sqrt[3]{24}$ b) $\frac{\sqrt[4]{400}\sqrt{80}}{\sqrt[4]{50}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{270}\sqrt[6]{640}}{\sqrt[6]{10}}$

[6] Simplifica las siguientes expresiones agrupando los radicales que sean semejantes:

a) $\sqrt{20} + \sqrt{40} - \sqrt{80} + 5\sqrt{160}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{24} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{96}$
 c) $\sqrt[3]{40} + 2\sqrt[3]{135} + 3\sqrt[3]{320}$ d) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{1280} - 2\sqrt[4]{405}$

[7] Racionalizar las siguientes expresiones radicales:

a) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ c) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ d) $\frac{7}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ e) $\frac{2}{4\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}$

[8] Racionalizar:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ b) $\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ c) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ d) $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{5}}$ e) $\frac{ab}{\sqrt[5]{a^2b^4}}$

[9] Escribe en notación científica.

a) 752 000 000 b) 0,000 0512 c) 0,000 007 d) 15 000 000000

[10] Expresa en notación científica.

a) $32 \cdot 10^5$ b) $75 \cdot 10^{-4}$ c) $843 \cdot 10^7$ d) $458 \cdot 10^{-7}$ e) $0,03 \cdot 10^6$ f) $0,0025 \cdot 10^{-5}$

[11] Efectúa:

a) $5,3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$ b) $3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6}$ c) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$ d) $7,2 \cdot 10^8 + 1,5 \cdot 10^{10}$

Soluciones III: **[1]** a) 6,917 b) $\pm 3,588$ c) No es un número real d) $-2,980$ **[2]** a) $\sqrt[7]{5}$, b) $\sqrt[5]{45^2}$, c) $\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}$ **[3]** a) $a^{3/2}$, b) $a^{6/5}$, c) $a^2 b^{5/2}$, d) $x^{3/2}$, e) $x^{9/2}$, f) $x^{2/3}$ **[4]** a) $\frac{1}{2}$, b) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, c) $\sqrt[4]{108}$, **[5]** a) $8\sqrt[6]{243}$, b) $4\sqrt[4]{200}$, c) $6\sqrt[6]{100}$, **[6]** a) $-2\sqrt{5} + 22\sqrt{10}$, b) $-6\sqrt{3} + 14\sqrt{6}$, c) $20\sqrt[3]{5}$, d) $9\sqrt[4]{5}$, **[7]** a) $\sqrt{2} + 1$, b) $3 + \sqrt{6}$, c) $7 - 4\sqrt{3}$, d) $\frac{21\sqrt{2} + 14\sqrt{3}}{6}$, e) $\frac{8\sqrt{5} - 4\sqrt{7}}{52} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}{13}$ **[8]** a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$, c) $\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$, d) $\frac{2\sqrt[6]{5}}{3}$, e) $\sqrt[5]{a^3b}$ **[9]** a) $7,52 \cdot 10^8$, b) $5,12 \cdot 10^{-5}$, c) $7 \cdot 10^{-6}$, d) $1,5 \cdot 10^{10}$ **[10]** a) $3,2 \cdot 10^6$, b) $7,5 \cdot 10^{-3}$, c) $8,43 \cdot 10^9$, d) $4,58 \cdot 10^{-5}$ e) $3 \cdot 10^4$ f) $2,5 \cdot 10^{-8}$ **[11]** a) $5 \cdot 10^{12}$ b) $3,82 \cdot 10^{-5}$ c) $-4,4 \cdot 10^{-8}$ d) $1,572 \cdot 10^{10}$

EJERCICIOS IV

[1] Calcula aplicando la definición de logaritmo:

$$\begin{array}{lllllll} \text{a)} \log_3 9 & \text{b)} \log_4 2 & \text{c)} \log_2 8 & \text{d)} \log_{27} 3 & \text{e)} \log 10\,000 & \text{f)} \log 0,01 & \text{g)} \log 10^7 \\ \text{h)} \log_2 1 & \text{i)} \log_3 3 & \text{j)} \log_{\frac{1}{3}} 81 & \text{k)} \log_5 \frac{1}{3125} & \text{l)} \log \frac{1}{1000} & \text{m)} \log_2 0,25 \end{array}$$

[2] Calcular los siguientes logaritmos aplicando el cambio de base a logaritmo de base 10.(utilizar cuatro decimales): a) $\log_2 7$ b) $\log_3 40$ c) $\log_5 761$ d) $\log_{17} 9$

[3] Resolver las ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \log x + \log 36 = \log 612 & \text{b)} \log x + \log 25 = 2 & \text{c)} 2 \log x = \log(3x + 10) \\ \text{d)} 3 \log x = \log 6 + 2 \log x & & \text{e)} 2 \log x - \log(x - 16) = 2 \end{array}$$

[4] Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales sin logaritmos:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 2^{x+1} = 8 & \text{b)} 4^{x+1} = 8 & \text{c)} 9^x = 729 & \text{d)} 3^{x+1} = 729 \\ \text{e)} 7 \cdot 5^x = 875 & \text{f)} 5^{x+2} = 625 & & \text{g)} 3 \cdot 5^x = 75 \end{array}$$

[5] Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$\text{a)} 5^x = 2 \quad \text{b)} 2^x = 25 \quad \text{c)} 3^{x+1} = 80 \quad \text{d)} 7^x = 39$$

[6] Calcula la incógnita x en cada caso:

$$\text{a)} \log_x 0,25 = 4 \quad \text{b)} \log_x 81 = 3 \quad \text{c)} \log_2(-2) = x$$

[7] El inventor del ajedrez pidió como pago que se llenase cada escaque (cuadrito del tablero) con el doble de trigo que el escaque anterior. Si se comienza con 1 grano de trigo.

a) ¿Cuántos granos habrá que poner en el último cuadrado?

b) ¿En qué escaque habrá que colocar 4194304 granos de trigo?

[8] El servicio de control de calidad de una empresa que fabrica lavadoras ha comprobado que la proporción de lavadoras que sigue funcionando al cabo de t años viene dado por la función $f(t) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$

a) ¿Qué proporción de lavadoras siguen funcionando después de 5 años?

b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcionen el 40%, ($\frac{40}{100}$) de las lavadoras fabricadas?

[9] El crecimiento de un bosque viene dado por la función $F(t) = A(1+i)^t$, donde F es la madera que habrá dentro de t años, A la madera actual, e i la tasa de crecimiento anual. Si la tasa de crecimiento anual $i=0,02$ y se mantiene constante, calcula el tiempo que tardará en duplicarse la madera del bosque.

Soluciones IV: **[1]** a) 2 b) 1/2 c) 3 d) 1/3 e) 4 f) -2 g) 7 h) 0 i) 1 j) -4 k) -5 l) -3 m) (nota: $0,25 = 25/100 = 1/4$) resultado -2 **[2]** a) $\frac{\log 7}{\log 2} = 2,8074$ b) $\frac{\log 40}{\log 3} = 3,3578$ c) $\frac{\log 761}{\log 5} = 4,1223$ d)

$\frac{\log 9}{\log 17} = 0,7755$ **[3]** a) $x = 17$ b) $x = 4$ c) $x = 5$ d) $x = 6$ e) $x = 20$; $x = 80$ **[4]** a) $x = 2$ b) $x = 1/2$ c)

$x = 3$ d) $x = 5$ e) $x = 3$ f) $x = 2$ g) $x = 2$ **[5]** a) $x = 0,4307$ b) $x = 4,6439$ c) $x = 2,9887$

d) $x = 1,8827$ **[6]** a) $x = \sqrt[4]{0,25}$ b) $x = \sqrt[3]{81}$ c) El logaritmo de un número negativo no está definido

d) $x = -2$ e) $x = 0,0001$ d) $x = \log \frac{14}{\sqrt{256}}$ e) $\log x = -4$ **[7]** a) 2^{63} granos, b) $4194304 = 1 \cdot 2^{n-1}$ donde n es el número del cuadrado. En el escaque 23. **[8]** a) $f(5) = 0,55$ el 55% b) $f(t) = 0,4$ $0,4 = \left(\frac{8}{9}\right)^t$ $t = 7,8$ años.

[9] Para que se duplique la madera, $F(t) = 2A \Rightarrow 2A = A(1,02)^t$, dividiendo entre A, $2 = (1,02)^t$, $t = 35$ años.