

# POTENCIAS, RADICALES Y LOGARITMOS

## EJERCICIOS I

[1] Calcular, utilizando las propiedades de las potencias:

a)  $(-2)^8$     b)  $5^3$     c)  $(-3)^3$     d)  $7^3-1$     e)  $(-1)^3 45$     f)  $(-1)^5 68$     g)  $(-2)^{-3}$   
h)  $(-5)^{-4}$     i)  $\left(\frac{3}{4}\right)^4$     l)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$     m)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$     n)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$     ñ)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$     o)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$     p)  $(-5)^0$

[2] Calcular, utilizando las propiedades de las potencias:

a)  $(-5)^2$     b)  $-5^2$     c)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^0$     d)  $\frac{2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^2 \cdot 2^6}$     e)  $\frac{(2^5)^2 \cdot (2^2)^5}{2^{-1} \cdot 2^{-2}}$     f)  $(2^3)^2 : (2^2)^3$   
g)  $\frac{2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5}{2^2 \cdot 2^{-6}}$     h)  $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$     i)  $\frac{2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2 \cdot 3^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 2^8 \cdot 3^{-6}}$     l)  $\frac{a^3 \cdot b^2 \cdot c \cdot b^0}{a^{-1} \cdot b^{-2} \cdot c^{-2} \cdot a}$     m)  $\left[\frac{(a \cdot a^3)^{-2}}{a^{-4}}\right]^5$

[3] Calcular: a)  $\left(\frac{4}{5} + 1\right)^2 \left(\frac{2}{3} - 2\right)^3$     b)  $\frac{2^3 \cdot 3^2}{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2}$

[4] Señala qué igualdades son ciertas y corrige las falsas:

a)  $a^2 + a = a^3$     b)  $(a^3)^5 = a^8$     c)  $a^4 \cdot b^4 = (ab)^4$   
d)  $\sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[5]{8}$     e)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9}$     f)  $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

[5] Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias, y halla el resultado:

a)  $\frac{4^{-2} \cdot (-3)^2 \cdot 5^{-3}}{9^{-2} \cdot 2^4 \cdot 5^{-2}}$     b)  $\frac{6^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{4^{-3} \cdot 2^2 \cdot 5^{-1}}$     c)  $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}}$

[6] Efectúa, con las propiedades de las potencias, simplificando al máximo el resultado:

a)  $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{4}{3}\right)\right]^3$     b)  $\left[\frac{(-2)^3 \cdot (-3)}{4}\right]^2$     c)  $[(2^2)^3]^{-4}$     d)  $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{3}\right) \cdot (-3)\right]^{-2}$

[7] Simplifica las siguientes expresiones:

a)  $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{8}\right)^2}$     b)  $\frac{10^{-3} \cdot 2^5 \cdot 14^2 \cdot 5}{6^5 \cdot 12^3}$

[8] Efectúa con calculadora:

a)  $3^{-4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} + 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2}$     b)  $6^3 \cdot 3^{-2} - 8^2 : 0,5^{-4}$

**Soluciones I:** [1] a) 256    b) 125    c) -27    d) 1/7    e) -1    f) 1    g) -1/8    h) 1/625    i) 81/256    l) 256/81  
m) 81/256    n) - 64/ 27    ñ)- 27/64    o) 64/27    p) 1 [2] a) 25    b) -25    c) 1    d)  $2^4 = 16$     e)  $2^{23} = 8388608$     f) 1  
g)  $2^8 = 256$     h) -2/5    i)  $2^{-6} \cdot 3^2 = 9/64$     l)  $a^3 \cdot b^4 \cdot c^3$     m)  $a^{-20} = 1/a^{20}$  [3] a) -192/25    b) 648

[4] Ciertas c) y f); corregidas a)  $a^2 \cdot a = a^3$     b)  $(a^3)^5 = a^{15}$     d)  $\sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[6]{8}$     e)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

[5] a)  $\frac{3^6}{2^8 \cdot 5} = \frac{729}{1280}$     b)  $2^3 \cdot 3 \cdot 5^5 = 75000$     c)  $\frac{2^3}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$  [6] a) 1/27    b) 36    c) 1/2<sup>24</sup>    d) 9

[7] a) 1/4    b)  $\frac{7^2}{2^7 \cdot 5^2 \cdot 3^8}$  [8] a) 41    b) 20

## EJERCICIOS II

1 Expresa como una potencia de  $a$  y de  $2$ , respectivamente:

$$\frac{a^5 \sqrt{a} \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} \qquad \frac{2^{\frac{1}{5}} \sqrt{32}}{\sqrt{2} \sqrt[3]{2}}$$

2 Simplifica los radicales: a)  $\sqrt[6]{2^3}$  b)  $\sqrt[12]{5^4}$  c)  $\sqrt[18]{a^{12}}$

3 Sacar fuera de la raíz los factores posibles:

a)  $\sqrt{200}$  b)  $\sqrt[3]{250}$  c)  $\sqrt[3]{\frac{81}{16}}$  d)  $\sqrt[5]{x^9 y^{15} z^{20}}$  e)  $\sqrt[4]{0,0016}$

4 Calcula: a)  $\sqrt{\frac{4}{36} + \frac{5}{4}}$  b)  $\sqrt{10 + 2\sqrt{7 + \sqrt[3]{8}}}$

5 Calcula (utilizando radicales semejantes cuando sea posible:

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$  b)  $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{375}$   
c)  $7\sqrt{a} - 8\sqrt{a} + 5\sqrt{a}$  d)  $\sqrt[3]{ab} - 3\sqrt[3]{a^4 b} + \sqrt[3]{ab^4}$

6 Expresa mediante una sola raíz, extrayendo después todos los factores posibles:

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a^{14}}}}$  b)  $\sqrt[4]{\sqrt{512b^9a^8}}$  c)  $\sqrt{a^3 b \sqrt[3]{a^2 b^2}}$  d)  $\frac{\sqrt{a} \sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$

7 Calcula, con la calculadora y redondea a las centésimas:

a)  $7^{1,3}$  b)  $5^{0,34}$  c)  $10^{-0,25}$

8 Introduce en los radicales los números y las letras:

a)  $5\sqrt{2}$  b)  $2\sqrt[3]{3}$  c)  $\frac{\sqrt{3}}{5}$  d)  $x\sqrt{x}$  e)  $\frac{\sqrt[3]{b+1}}{b}$

9 Calcula los cuadrados de los números:

a)  $2\sqrt{2}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  c)  $1 + \sqrt{2}$  d)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

10 Reduce a índice común los siguientes radicales:

a)  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{b}$  b)  $\sqrt[3]{a^2}$ ,  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt[4]{b}$

11 Racionalizar:

a)  $\frac{7}{\sqrt{3}}$  b)  $\frac{3}{2\sqrt{5}}$  c)  $\frac{1}{\sqrt{ab}}$  d)  $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$  e)  $\frac{7}{\sqrt{5} + 3}$  f)  $\frac{5}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$  g)  $\frac{2}{a + \sqrt{b}}$

**Soluciones II:** [1] a)  $a^{19/30}$ ,  $2^{22/15}$  [2] a)  $\sqrt{2}$ , b)  $\sqrt[3]{5}$ , c)  $\sqrt[3]{a^2}$ , [3] a)  $10\sqrt{2}$ , b)  $5\sqrt[3]{2}$ , c)  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  d)  $xy^3z^4\sqrt[5]{x^4}$ , e)  $\pm\frac{2}{10} = \pm\frac{1}{5}$  [4] a)  $\pm 7/6$ , b)  $\pm 4$ , [5] a)  $2\sqrt{2}$ , b)  $-3\sqrt[3]{3}$ , c)  $4\sqrt{a}$ , d)  $(1 - 3a + 4b)\sqrt[3]{ab}$  [6] a)  $\sqrt[12]{a^{14}} = a^{\frac{12}{12}}\sqrt[12]{a} = a^{\frac{6}{6}}\sqrt[12]{a}$ , b)  $2ba\sqrt[8]{2b}$  c)  $\sqrt[6]{a^{11}b^5} = a^{\frac{6}{6}}\sqrt[6]{a^5b^5}$  d)  $\sqrt[12]{a^{13}} = a^{\frac{12}{12}}\sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{12}}\sqrt[12]{a}$  [7] a) 12, 55, b) 1, 73, c) 0, 56 [8] a)  $\sqrt{50}$ , b)  $\sqrt[5]{96}$ , c)  $\sqrt{\frac{3}{96}}$ , d)  $\sqrt{x^3}$ , e)  $\sqrt[3]{\frac{b+1}{b^3}}$  [9] a) 8, b)  $1/3$ , c)  $3 + 2\sqrt{2}$ , d)  $3 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$  [10] a)  $\sqrt[6]{a^3}$ ,  $\sqrt[6]{b^2}$ , b)  $\sqrt[12]{a^8}$ ,  $\sqrt[12]{a^6b^6}$ ,  $\sqrt[12]{b^3}$  [11] a)  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ , b)  $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ , c)  $\frac{\sqrt{ab}}{ab}$ , d)  $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ , e)  $\frac{7(\sqrt{5}-3)}{-4}$ , f)  $\frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{5\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{3}$ , g)  $\frac{2(a-\sqrt{b})}{a^2-b} = \frac{2a-2\sqrt{b}}{a^2-b}$ ,

### EJERCICIOS III

[1] Utiliza la calculadora para hallar el valor de los siguientes radicales, cuando sean números reales, dando el resultado redondeando hasta las milésimas:

a)  $\sqrt[3]{331}$       b)  $\sqrt[6]{2134}$       c)  $\sqrt[4]{-235}$       d)  $\sqrt[5]{-235}$ ,

[2] Expresa en forma de raíz:

a)  $5^{1/7}$       b)  $45^{2/5}$       c)  $2^{-5/6}$

[3] Expresa en forma de potencia:

a)  $\sqrt{a^3}$       b)  $\sqrt[5]{a^6}$       c)  $\sqrt{a^4b^5}$       d)  $x\sqrt{x}$       e)  $x^3\sqrt{x^3}$       f)  $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

[4] Efectúa las siguientes operaciones dejando el resultado en forma de radical o número racional:

a)  $\frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{6}\sqrt{10}}$       b)  $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{6}}$       c)  $\frac{\sqrt[4]{18}\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{12}}$

[5] Reduce a común índice y realiza las multiplicaciones y divisiones indicadas:

a)  $\sqrt{48}\sqrt[3]{24}$       b)  $\frac{\sqrt[4]{400}\sqrt{80}}{\sqrt[4]{50}}$       c)  $\frac{\sqrt[3]{270}\sqrt[6]{640}}{\sqrt[6]{10}}$

[6] Simplifica las siguientes expresiones agrupando los radicales que sean semejantes:

a)  $\sqrt{20} + \sqrt{40} - \sqrt{80} + 5\sqrt{160}$       b)  $\sqrt{12} + \sqrt{24} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{96}$   
c)  $\sqrt[3]{40} + 2\sqrt[3]{135} + 3\sqrt[3]{320}$       d)  $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{1280} - 2\sqrt[4]{405}$

[7] Racionalizar las siguientes expresiones radicales:

a)  $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$       b)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$       c)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$       d)  $\frac{7}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$       e)  $\frac{2}{4\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}$

[8] Racionalizar:

a)  $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$       b)  $\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$       c)  $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$       d)  $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt[3]{5}}$       e)  $\frac{ab}{\sqrt[5]{a^2b^4}}$

[9] Escribe en notación científica.

a) 752 000 000      b) 0,000 0512      c) 0,000 007      d) 15 000 000000

[10] Expresa en notación científica.

a)  $32 \cdot 10^5$       b)  $75 \cdot 10^{-4}$       c)  $843 \cdot 10^7$       d)  $458 \cdot 10^{-7}$       e)  $0,03 \cdot 10^6$       f)  $0,0025 \cdot 10^{-5}$

[11] Efectúa:

a)  $5,3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$       b)  $3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6}$       c)  $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$       d)  $7,2 \cdot 10^8 + 1,5 \cdot 10^{10}$

**Soluciones III:** [1] a) 6,917 b)  $\pm 3,588$  c) No es un número real d) -2,980 [2] a)  $\sqrt[3]{5}$ , b)  $\sqrt[5]{45^2}$ , c)  $\frac{1}{\sqrt[6]{25}}$  [3] a)  $a^{3/2}$ , b)  $a^{6/5}$ , c)  $a^2b^{5/2}$ , d)  $x^{3/2}$ , e)  $x^{9/2}$ , f)  $x^{2/3}$  [4] a)  $\frac{1}{2}$ , b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ , c)  $\sqrt[4]{108}$ , [5] a)  $8\sqrt[6]{243}$ , b)  $4\sqrt[4]{200}$ , c)  $6\sqrt[6]{100}$ , [6] a)  $-2\sqrt{5} + 22\sqrt{10}$ , b)  $-6\sqrt{3} + 14\sqrt{6}$ , c)  $20\sqrt[3]{5}$ , d)  $9\sqrt[4]{5}$ , [7] a)  $\sqrt{2} + 1$ , b)  $3 + \sqrt{6}$ , c)  $7 - 4\sqrt{3}$ , d)  $\frac{21\sqrt{2} + 14\sqrt{3}}{6}$ , e)  $\frac{8\sqrt{5} - 4\sqrt{7}}{52} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}{13}$  [8] a)  $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ , b)  $\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$ , c)  $\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$ , d)  $\frac{2\sqrt[6]{5}}{3}$ , e)  $\sqrt[5]{a^3b}$  [9] a)  $7,52 \cdot 10^8$ , b)  $5,12 \cdot 10^{-5}$ , c)  $7 \cdot 10^{-6}$ , d)  $1,5 \cdot 10^{10}$  [10] a)  $3,2 \cdot 10^6$ , b)  $7,5 \cdot 10^{-3}$ , c)  $8,43 \cdot 10^9$ , d)  $4,58 \cdot 10^{-5}$  e)  $3 \cdot 10^4$  f)  $2,5 \cdot 10^{-8}$  [11] a)  $5 \cdot 10^{12}$  b)  $3,82 \cdot 10^{-5}$  c)  $-4,4 \cdot 10^{-8}$  d)  $1,572 \cdot 10^{10}$

## EJERCICIOS IV

[1] Calcular aplicando la definición de logaritmo:

- a)  $\log_3 9$       b)  $\log_4 2$       c)  $\log_2 8$       d)  $\log_{27} 3$       e)  $\log 10\,000$       f)  $\log 0,01$       g)  $\log 10^7$   
 h)  $\log_2 1$       i)  $\log_3 3$       j)  $\log_{\frac{1}{3}} 81$       k)  $\log_5 \frac{1}{3125}$       l)  $\log \frac{1}{1000}$       m)  $\log_2 0,25$

[2] Calcular los siguientes logaritmos aplicando el cambio de base a logaritmo de base 10. (utilizar cuatro decimales): a)  $\log_2 7$       b)  $\log_3 40$       c)  $\log_5 761$       d)  $\log_{17} 9$

[3] Resolver las ecuaciones logarítmicas:

- a)  $\log x + \log 36 = \log 612$       b)  $\log x + \log 25 = 2$       c)  $2 \log x = \log(3x + 10)$   
 d)  $3 \log x = \log 6 + 2 \log x$       e)  $2 \log x - \log(x - 16) = 2$

[4] Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales sin logaritmos:

- a)  $2^{x+1} = 8$       b)  $4^{x+1} = 8$       c)  $9^x = 729$       d)  $3^{x+1} = 729$   
 e)  $7 \cdot 5^x = 875$       f)  $5^{x+2} = 625$       g)  $3 \cdot 5^x = 75$

[5] Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a)  $5^x = 2$       b)  $2^x = 25$       c)  $3^{x+1} = 80$       d)  $7^x = 39$

[6] Calcular la incógnita  $x$  en cada caso:

- a)  $\log_x 0,25 = 4$       b)  $\log_x 81 = 3$       c)  $\log_2(-2) = x$

[7] El inventor del ajedrez pidió como pago que se llenase cada escaque (cuadrado del tablero) con el doble de trigo que el escaque anterior. Si se comienza con 1 grano de trigo.

- a) ¿Cuántos granos habrá que poner en el último cuadrado?  
 b) ¿En qué escaque habrá que colocar 4194304 granos de trigo?

[8] El servicio de control de calidad de una empresa que fabrica lavadoras ha comprobado que la proporción de lavadoras que sigue funcionando al cabo de  $t$  años viene dado por la función  $f(t) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$

- a) ¿Qué proporción de lavadoras siguen funcionando después de 5 años?  
 b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcionen el 40 %,  $\left(\frac{40}{100}\right)$  de las lavadoras fabricadas?

[9] El crecimiento de un bosque viene dado por la función  $F(t) = A(1+i)^t$ , donde  $F$  es la madera que habrá dentro de  $t$  años,  $A$  la madera actual, e  $i$  la tasa de crecimiento anual. Si la tasa de crecimiento anual  $i=0,02$  y se mantiene constante, calcular el tiempo que tardará en duplicarse la madera del bosque.

**Soluciones IV:** [1] a) 2    b) 1/2    c) 3    d) 1/3    e) 4    f) -2    g) 7    h) 0    i) 1    j) -4    k) -5    l) -3    m) (nota:  $0,25 = 25/100 = 1/4$ ) resultado -2 [2] a)  $\frac{\log 7}{\log 2} = 2,8074$     b)  $\frac{\log 40}{\log 3} = 3,3578$     c)  $\frac{\log 761}{\log 5} = 4,1223$     d)  $\frac{\log 9}{\log 17} = 0,7755$  [3] a)  $x = 17$     b)  $x = 4$     c)  $x = 5$     d)  $x = 6$     e)  $x = 20; x = 80$  [4] a)  $x = 2$     b)  $x = 1/2$     c)  $x = 3$     d)  $x = 5$     e)  $x = 3$     f)  $x = 2$     g)  $x = 2$  [5] a)  $x = 0,4307$     b)  $x = 4,6439$     c)  $x = 2,9887$     d)  $x = 1,8827$  [6] a)  $x = \sqrt[4]{0,25}$     b)  $x = \sqrt[3]{81}$     c) El logaritmo de un número negativo no está definido    d)  $x = -2$     e)  $x = 0,0001$     d)  $x = \log \frac{1}{4\sqrt{256}}$     e)  $\log x = -4$  [7] a)  $2^6 3$  granos, b)  $4194304 = 1 \cdot 2^{n-1}$  donde  $n$  es el número del cuadrado. En el escaque 23. [8] a)  $f(5) = 0,55$  el 55 %    b)  $f(t) = 0,4$   $0,4 = \left(\frac{8}{9}\right)^t$   $t = 7,8$  años. [9] Para que se duplique la madera,  $F(t) = 2A. \Rightarrow 2A = A(1,02)^t$ , dividiendo entre  $A$ ,  $2 = (1,02)^t$ ,  $t = 35$  años.