TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS: HOMOLOGIA Y AFINIDAD

Formas geométricas fundamentales. Homología y afinidad. Su aplicación al trazado de las cónicas.

Dada la importancia que tienen algunas transformaciones geométricas, sobre todo la homología y la afinidad en el estudio de la Geometría Descriptiva o Representativa, consideramos necesario dedicar un tema a las citadas transformaciones. Siendo la circunferencia la línea que con más frecuencia se presenta en la representación de cuerpos y superficies, dedicamos a ella, en especial, este estudio, relacionándola homológicamente con las cónicas.

1. Formas geométricas fundamentales.

Para hacer un estudio de las propiedades gráficas de la Geometría es necesario conocer los conceptos de punto, recta y plano, llamados elementos fundamentales.

Los puntos se designan con letras mayúsculas A, B, C, ..., acompañadas si es preciso de subíndices; las rectas, con letras minúsculas, a, b, c, ..., y los planos con letras minúsculas del alfabeto griego, α, β, γ, δ, ϵ, ...

Una figura geométrica es un complejo de elementos fundamentales. Según agrupemos estos elementos de la manera más sencilla, tendremos las llamadas formas fundamentales. Se clasifican en:

Formas fundamentales de la primera especie:
1.ª Serie rectilínea: Conjunto de puntos que pertenecen a una recta.
2.ª Haz de rectas: Conjunto de todas las rectas de un plano que pasan por un punto.
3.ª Haz de planos: Conjunto de todos los planos que pasan por una recta.

Formas fundamentales de la segunda especie:
1.ª El plano de puntos: Conjunto de todos los puntos del plano.
2.ª El plano de rectas: Conjunto de todas las rectas del plano.
3.ª La radiación de rectas: Conjunto de todas las rectas del espacio que pasan por un punto.
4.ª La radiación de planos: Conjunto de todos los planos del espacio que pasan por un punto.

Formas fundamentales de la tercera especie:
1.ª El espacio de puntos: Conjunto de todos los puntos del espacio.
2.ª El espacio de planos: Conjunto de todos los planos del espacio.

Dos elementos de distinto nombre se pertenecen cuando uno de ellos está sobre el otro o éste pasa por aquél. Por ejemplo, la recta y uno de sus puntos, el plano y una de sus rectas se pertenecen.

2. Homología.

La homología es una de las transformaciones geométricas que liga a dos figuras planas. Se utiliza con mucha frecuencia en geometría descriptiva y por lo tanto en dibujo industrial.

Se dice que los puntos *A, B* y *D* de la figura *F* son homólogos de los *A', B'* y *D'* de la figura *F'*, cuando cumplen las siguientes condiciones *(Fig. 1)*:

1ª. Estar en línea recta con un punto *C*, fijo, llamado **centro de homología** (*A', A* y *C* están en línea recta; *B', B* y *C* lo mismo y también *D', D* y *C*).

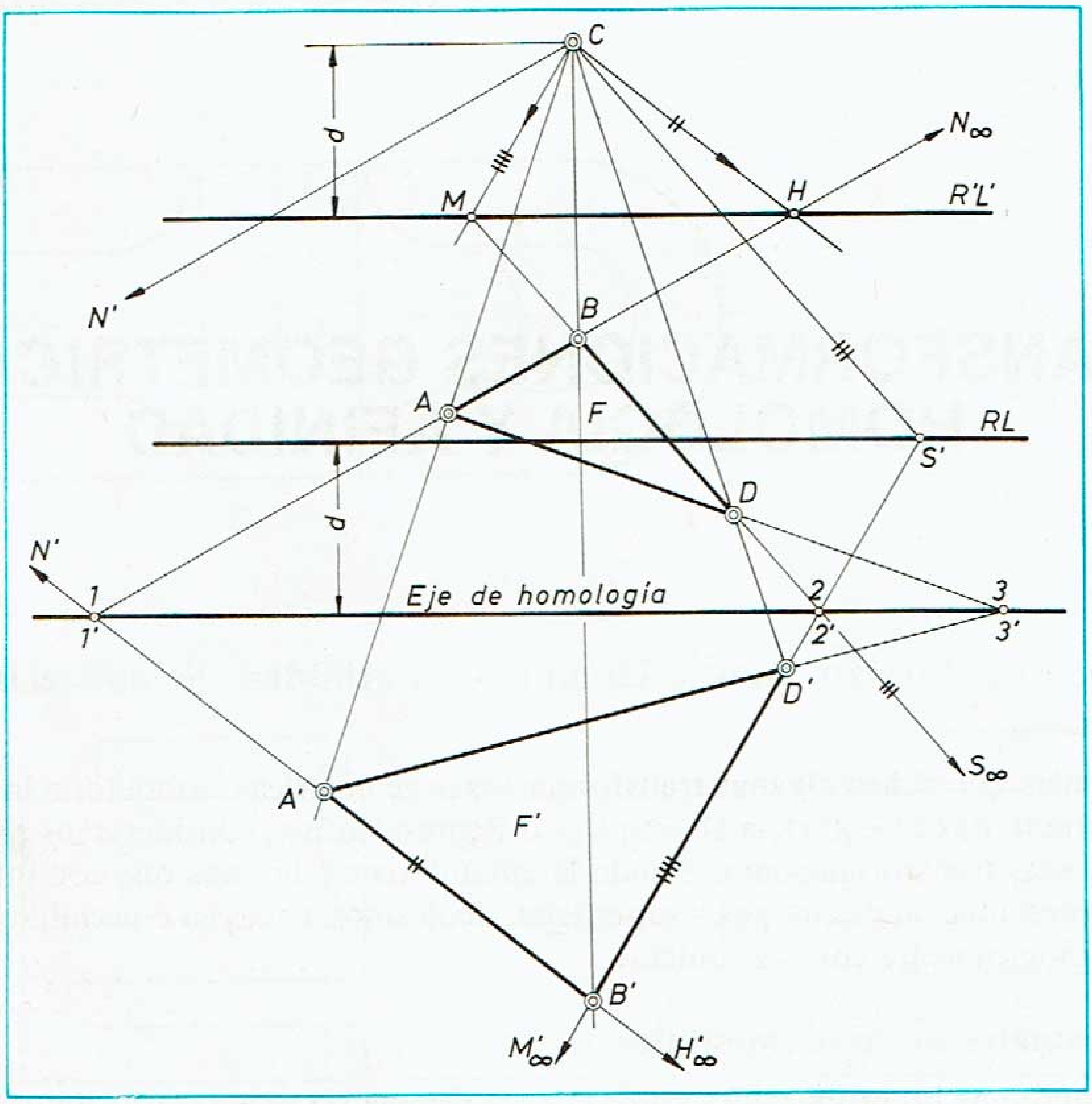

Fig. 1

2ª Que las rectas homólogas, por ejemplo *AB* y *A'B'*, se cortan en puntos de una recta fija llamada **eje de homología.** También las rectas *BD* y *B'D'*, *AD* y *A'D'* son homólogas y se cortan en los puntos *1, 2* y *3* del eje. *(Fig. 1)*.

Así pues, una figura es homóloga de otra cuando son homólogos los puntos de una con los puntos de la otra.

3. Rectas límites.

Se llaman rectas límites al lugar geométrico de los puntos homólogos de los del infinito. Dadas dos figuras *F* y *F'* cada una de ellas tiene una recta límite. *(Fig. 1)*.

El conjunto de puntos del infinito de la figura *F'*, como son los puntos *H'*∞ y *M'*∞, tienen por homólogos otros *H* y *M* que están en una recta *R'L'*, llamada recta límite de la figura *F*. El conjunto de puntos del infinito de la figura *F*, como son los puntos *S*∞ y *N*∞, tienen por homólogos otros *S'* y *N'* que están en una recta *RL*, llamada recta límite de la figura *F'*.

Existe una propiedad importante: Las dos rectas límites son paralelas al eje y la distancia de *C* a *R'L'* es igual que la del eje a *RL*.

Puede ocurrir que sean exteriores a la parte de plano comprendida entre *C* y el eje, según se ve en la *figura 2*.

Para obtener las rectas límites basta saber que los puntos homólogos están en línea recta con el centro de homología y la definición de recta límite.

Para obtener, por ejemplo, el punto *H,* homólogo del *H'*∞, se traza por *C* la paralela a la recta *A'B'* hasta que corte en *H* a su homóloga que es la recta *AB*. Para hallar el punto *M*, se traza la paralela por *C* a *D'B'* hasta que corte en *M* a su homóloga *DB*. La recta límite buscada es *HM*. De la misma forma se obtiene la otra recta límite.

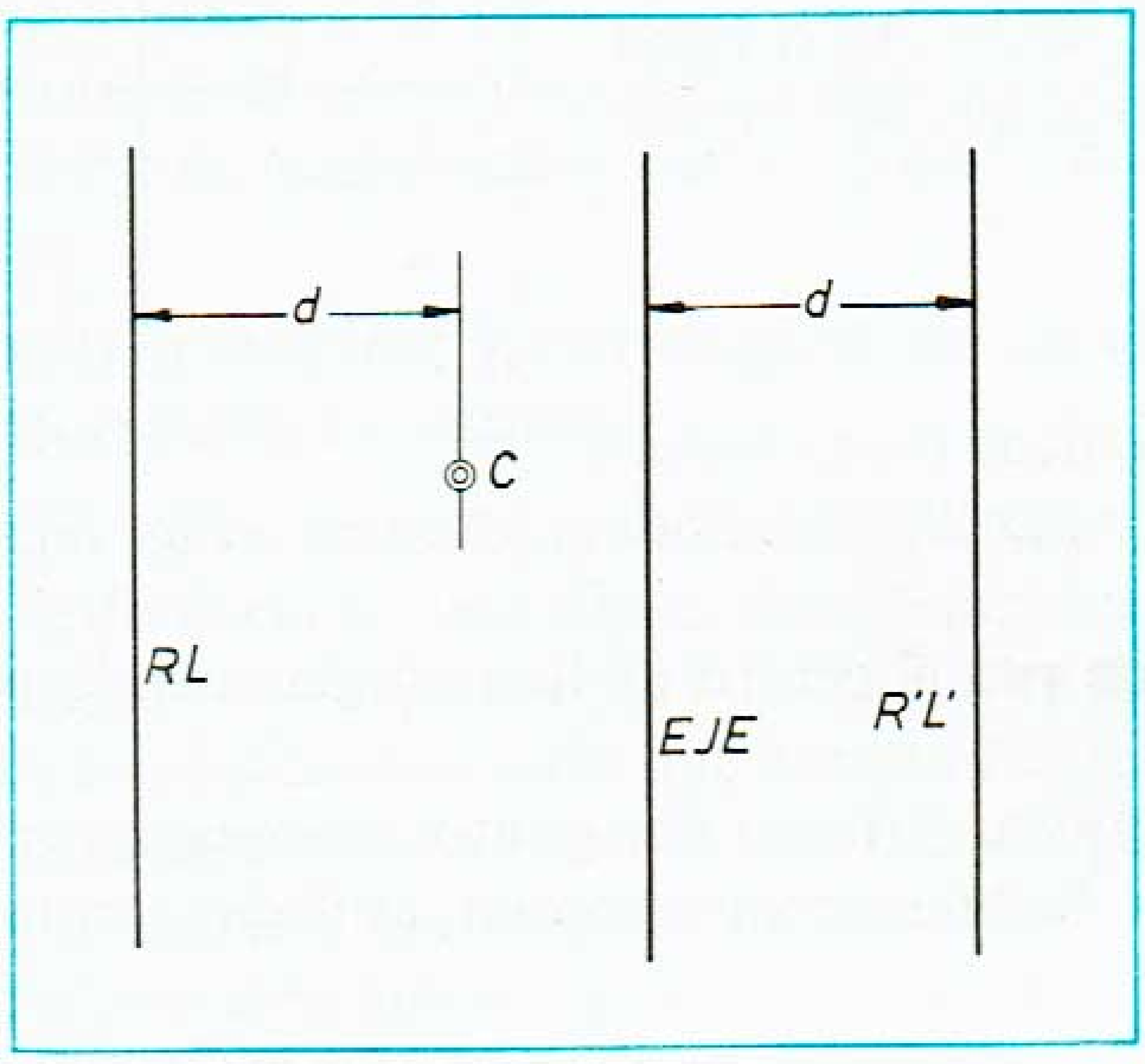

Fig. 2

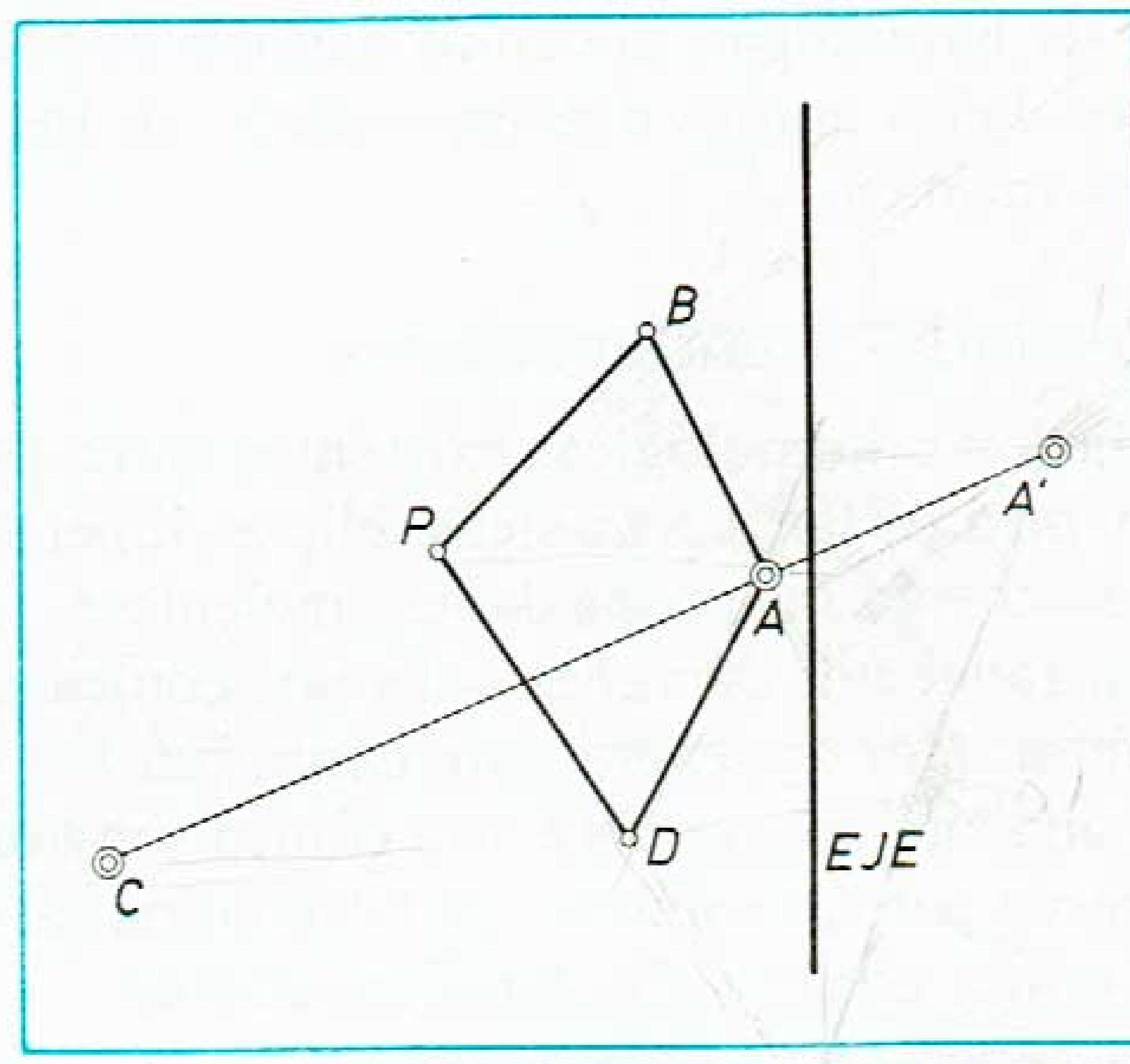

Fig. 3

4. Formas de definir una homología.

Una homologia queda definida conociendo los siguientes elementos:

1.º **El centro, el eje y dos puntos homólogos.** *(Fig. 3).*

El lector, como ejercicio, puede hallar con estos elementos la figura homóloga del cuadrilátero *ABPD*.

2.º **El centro C, el eje e y la recta límite de la figura que se busca RL.** *(Fig. 4).*

Para obtener el punto homólogo de un punto *A*, p. ej., se hace la operación que se indicó para las rectas límites. Se traza una recta cualquiera que pasa por *A*, se prolonga y corta en *1* a *RL* y en *2* al eje; se une el centro *C* con el punto *1* y por *2* se traza la paralela a *C1* hasta que corte en *A'* a la prolongación de *CA*. Teniendo ya una pareja de puntos homólogos *A* y *A'* el resto de los puntos se obtiene como se ha indicado.

3.º **El centro y las dos rectas límites.**

Este caso se reduce al anterior, sabiendo la propiedad indicada al obtener las rectas límites, ya que el centro dista de una de ellas lo que el eje de la otra.

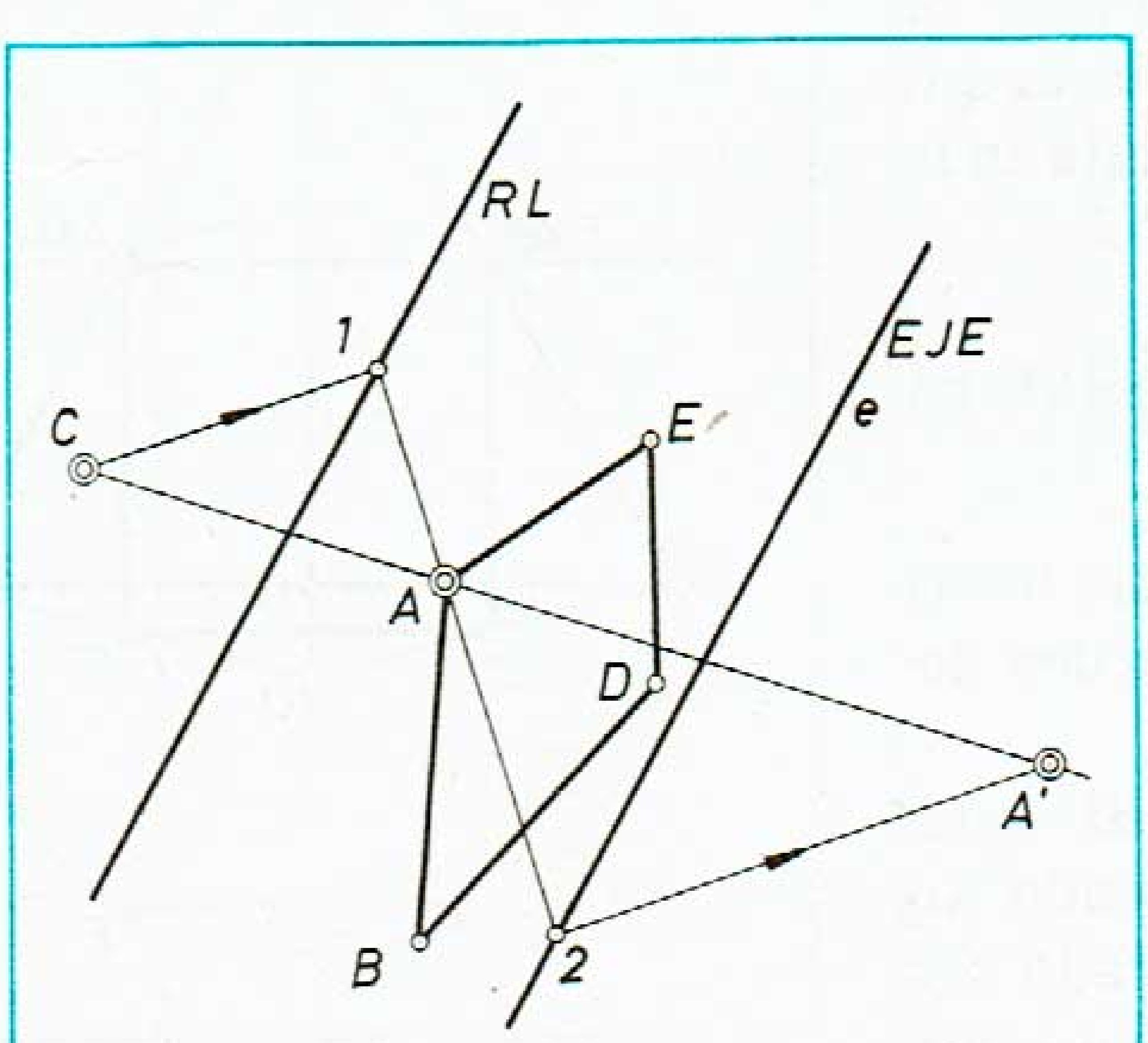

Fig. 4

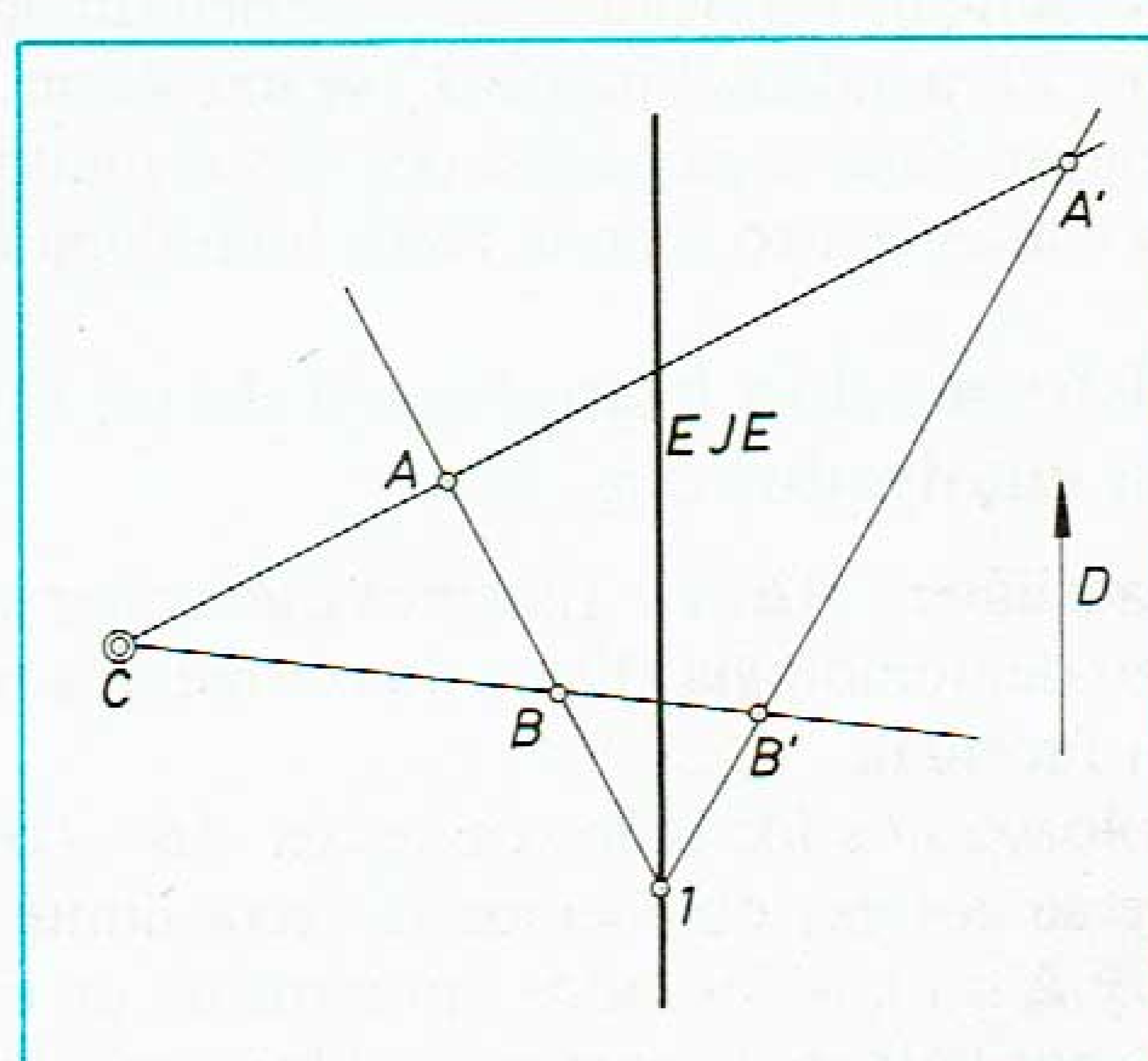

Fig. 5

4º **Dos pares de puntos homólogos y la dirección de eje.** *(Fig. 5).*

Sean *A—A'* y *B—B'* los pares de puntos homólogos y *D* la dirección del eje. Uniendo *A* con *A'* y *B* con *B'* se obtiene el punto *C*, centro de homología. La recta *AB* es homóloga de la *A'B'*, se cortan en el punto *1* del eje y por este punto se traza la paralela a la dirección *D*.

Si las dos rectas límites se confunden, es decir, coinciden, tal como indica la *Fig. 6*, la homología se llama **involutiva.**

El eje de homología, podemos deducir de todo lo dicho, **es el lugar geométrico de los puntos dobles,** es decir, de los puntos que son homólogos de sí mismos.

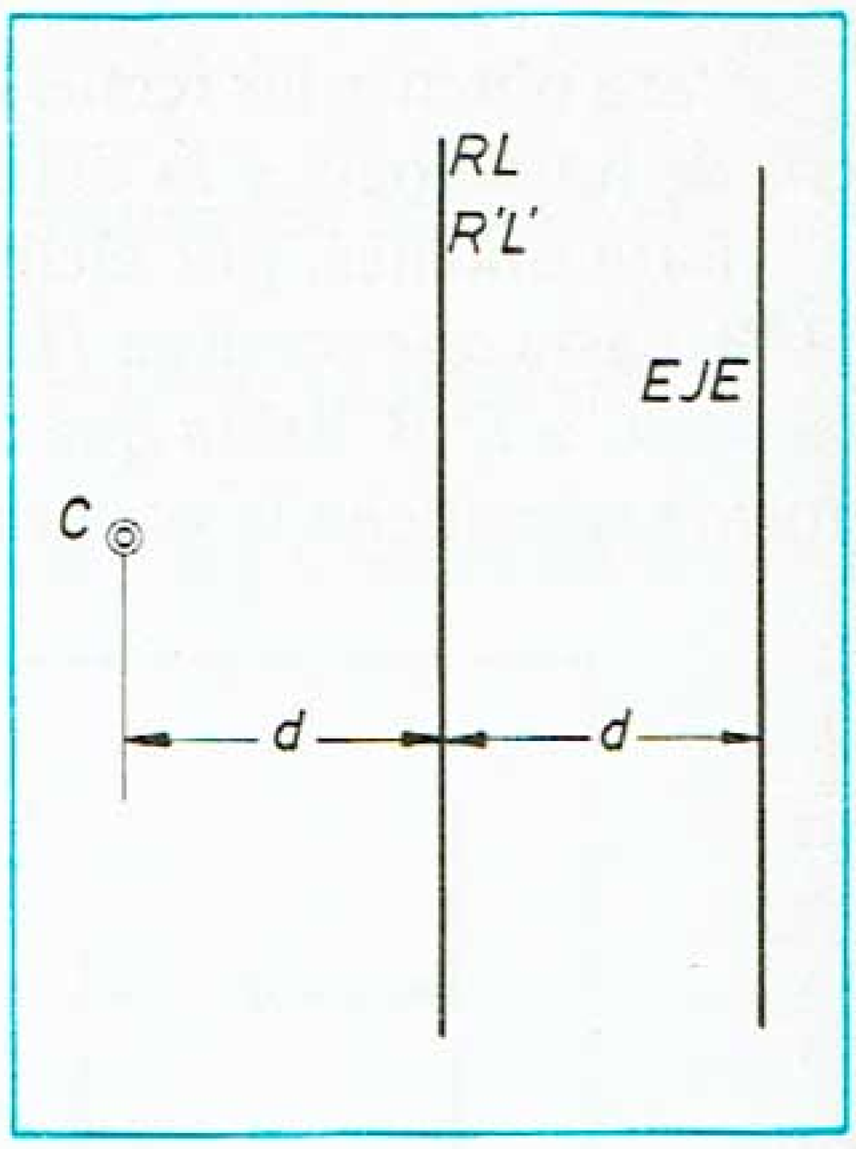

Fig. 6

5. Propiedades fundamentales.

En las relaciones homológicas existentes entre dos cónicas (una circunferencia y otra de las tres cónicas, elipse, hipérbola o parábola) hemos de tener en cuenta las propiedades siguientes:

1ª Las tangentes comunes a las dos cónicas pasan por el centro de homología, siendo por tanto rectas dobles. *(No es general este enunciado).*

2ª Si una circunferencia y otra cónica son homológicas y tienen dos puntos comunes, se puede tomar la cuerda común como eje de homología. Si sólo tienen un punto común, es decir, son tangentes, se puede tomar como eje la tangente común.
(No es general este enunciado).

3ª Las relaciones de polaridad que existen en la circunferencia (polo y polar) se transforman por homología en sus correspondientes de la cónica a obtener. Como veremos más adelante, el homólogo del centro de una cónica es el polo de la recta límite de la otra cónica respecto de ésta.

Antes de estudiar las transformaciones homológicas de una circunferencia, exponemos al lector unos ejemplos de homología plana que facilitan la comprensión del estudio de esta materia.

6. Problema.

"Dado un exágono regular *A, B, C, D, E, F,* encontrar los elementos de la homología que transforma el trapecio *ABCF* en un cuadrado. Los vértices del exágono que designan las letras son correlativos." *(Fig. 7).*"

El eje es la recta $AB \equiv A'B'$; *A* y *B* son homólogos de *A'* y *B'*. En la figura se indica la forma de obtener el centro de homología y las rectas límites.

7. Problema.

"Figura homológica de un pentágono regular estrellado, conocido el lado. De la homología se conocen el centro *O*, el eje y un par de puntos homólogos *4* y *4'*." *(Fig. 8).*

Se construye el polígono regular *1-2-3-4-5*. A partir de los puntos homólogos conocidos *4* y *4'* se determinan el resto de los puntos. Para hallar el punto *3'*, se une *4* con *3*,, hasta que corte al eje, su homóloga pasará por *4'* y el punto *3'* está en línea recta con el centro y en la recta homóloga de *4-3*.

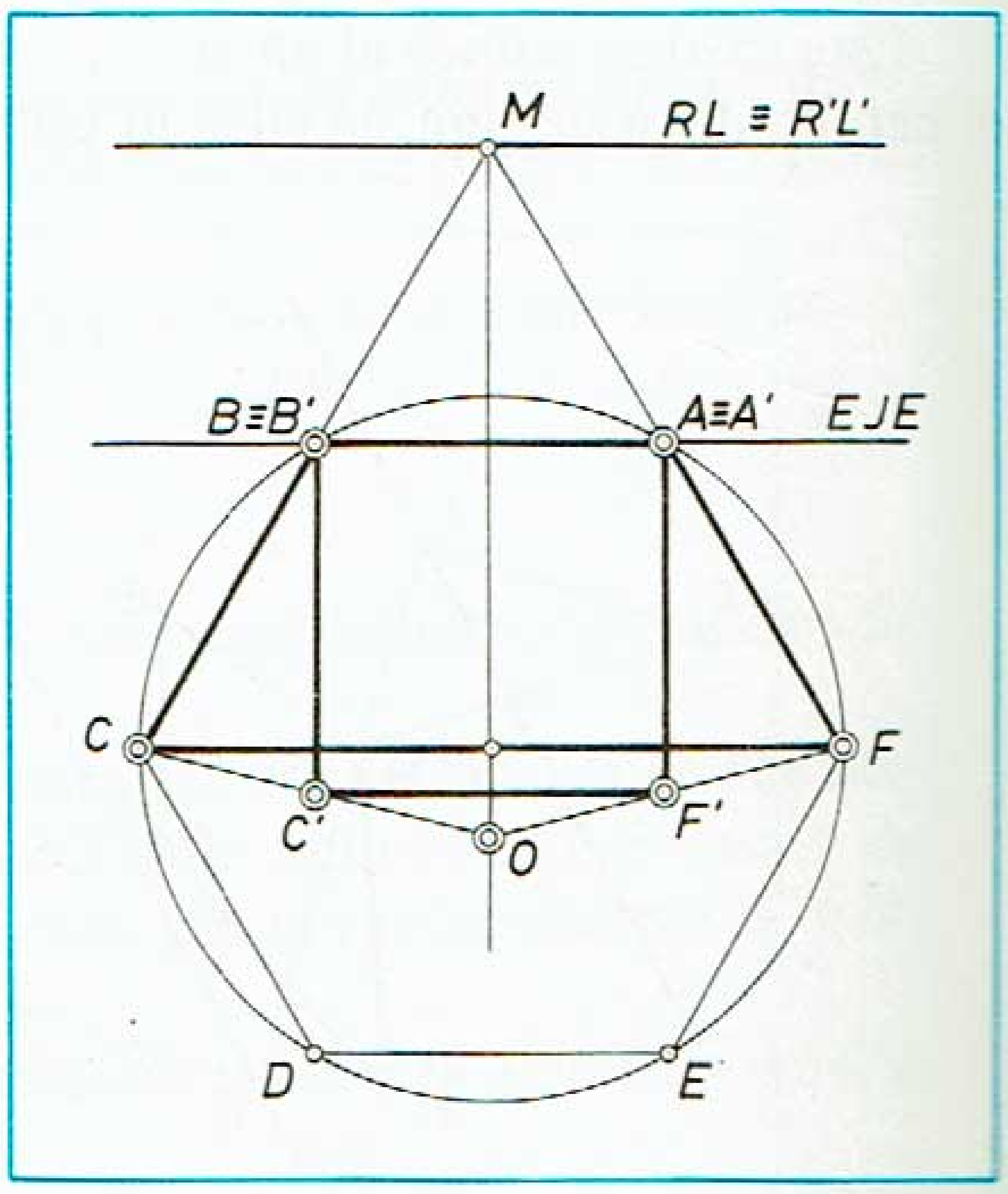

Fig. 7

8. Transformación homológica de un cuadrilátero en un cuadrado. *(Fig. 9).*

Sea el cuadrilátero *ABPD*. Tenemos que hallar la recta límite y el centro de homología. Estos dos elementos se pueden deducir con facilidad.

Si prolongamos los lados opuestos *AB—DP* y *BP—AD* hasta que se corten, obtenemos la recta límite uniendo los puntos *1* y *2,* ya que los lados opuestos de un cuadrado son paralelos, por lo tanto se cortan en el infinito y los puntos homólogos de los del infinito están en la recta límite.

Prolongando las diagonales, cortan a la recta límite *RL* en *3* y *4*. El centro de homología ha de ser un punto desde el cual se vean los segmentos *1-2* y *3-4* bajo ángulos rectos. Trazamos los dos lugares geométricos, que son dos semicircunferencias y tenemos el punto *C*, centro de homología; las direcciones *C1* y *C2* serán las de los lados del cuadrado buscado y las *C3* y *C4* las de las diagonales. El resto de la construcción está indicada en la figura. El eje de homología se puede tomar arbitrariamente.

9. Transformación homológica de la circunferencia en elipse.

Por medio de la homología vamos a transformar una circunferencia en una elipse. Los elementos de la homología son: El centro *C*, la recta límite *RL* y el eje. Es condición necesaria que la recta límite no corte a la circunferencia, pues si esto sucediera los puntos de intersección tendrían sus homólogos en el infinito y se sabe que la elipse es una curva cerrada y que no tiene por lo tanto puntos impropios.

Seguiremos dos métodos: El primero consistirá en obtener la elipse por medio de una pareja de diámetros conjugados y el segundo mediante los ejes.

Método 1º. *(Fig. 10).*

Con los datos indicados, sea la circunferencia

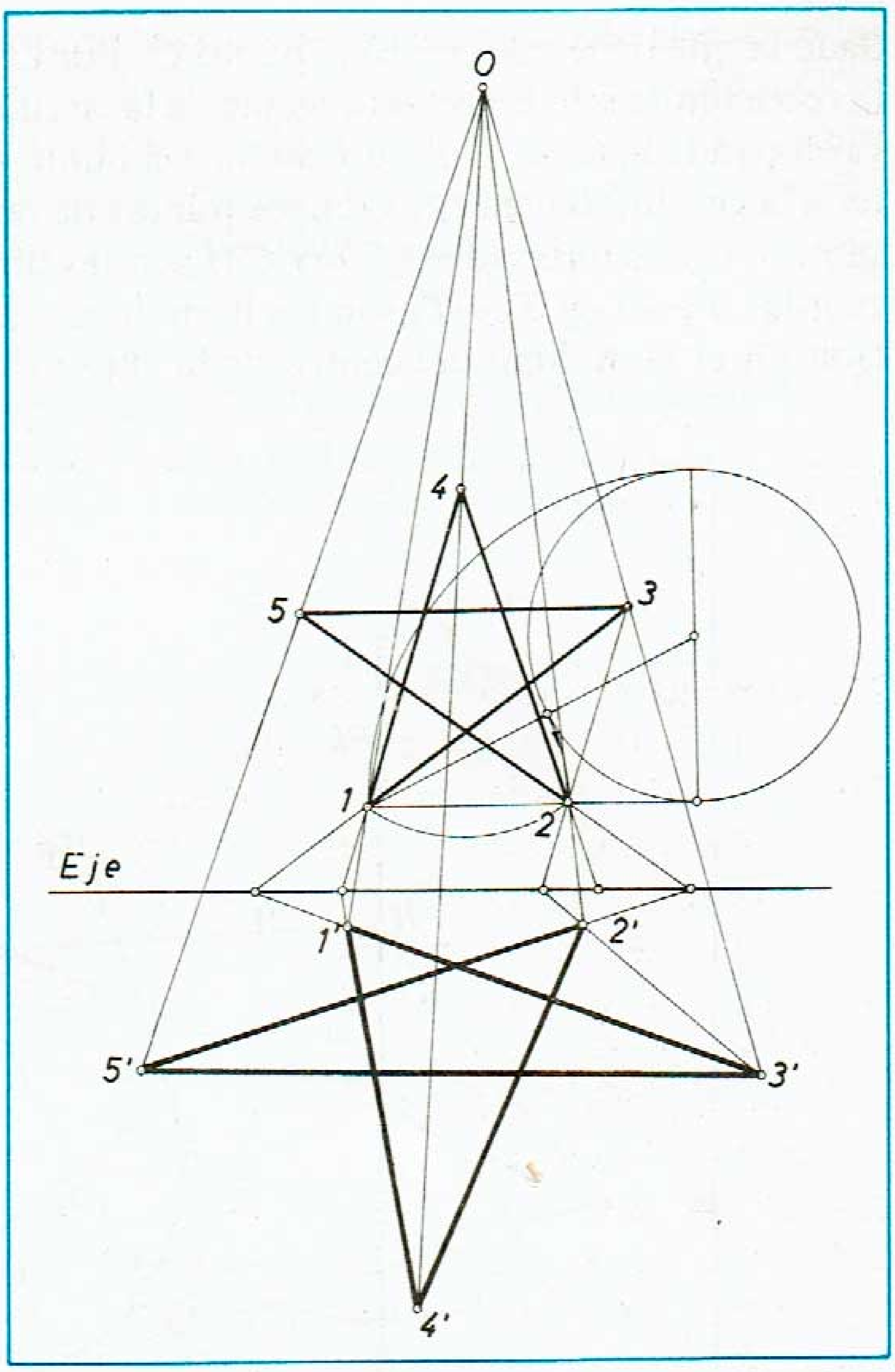

Fig. 8

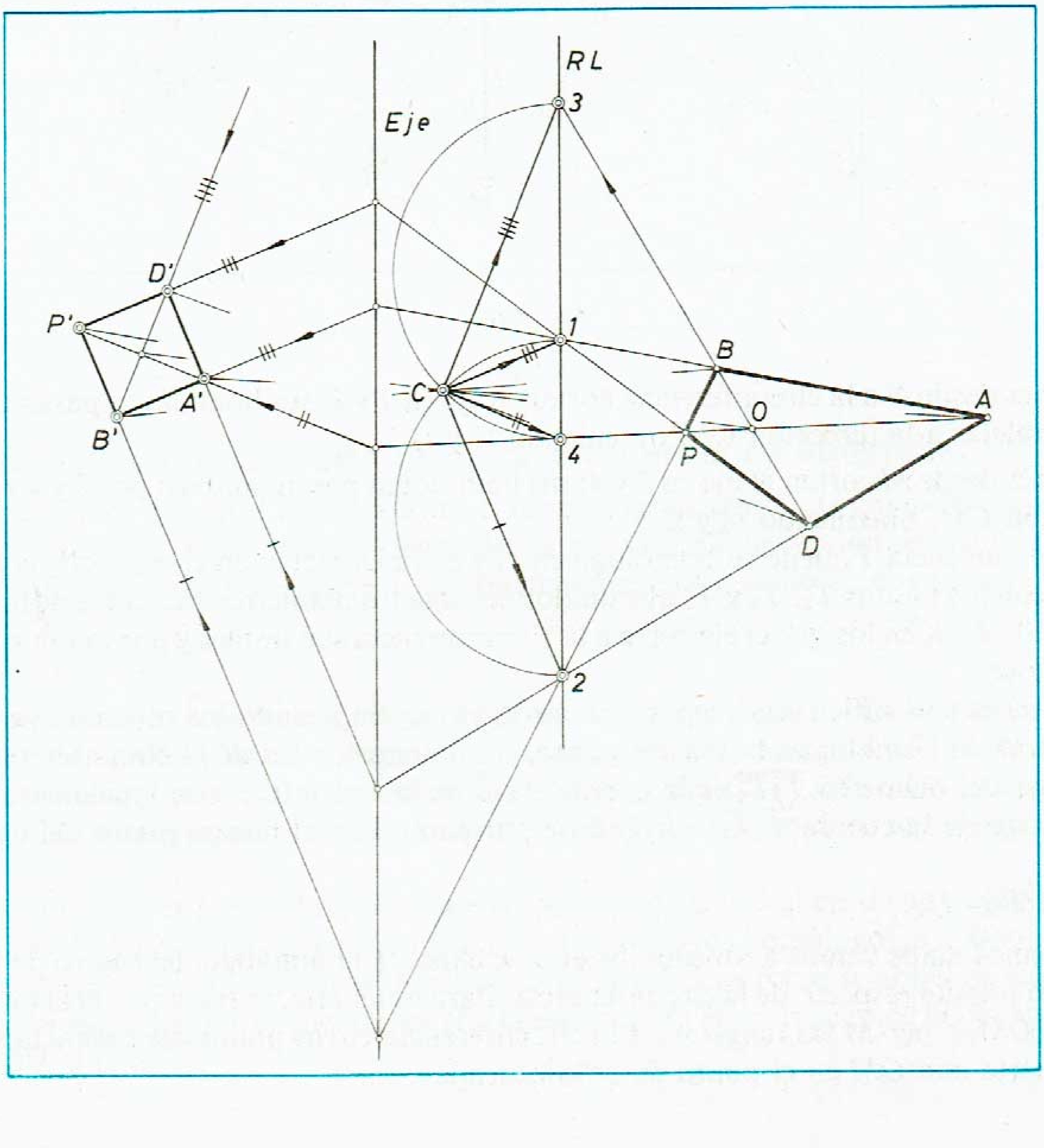

Fig. 9

dada la que tiene por centro el punto O. Por C trazaremos una recta cualquiera CN; por el punto N de la recta límite se trazan las tangentes a la circunferencia t_1 y t_2, cuyos puntos de tangencia son T_1 y T_2. Prolongada la recta T_1T_2, obtenemos el punto M en la recta límite; desde él se trazan otras dos tangentes a la circunferencia t_3 y t_4 cuyos puntos de tangencia son T_3 y T_4 que unidos dan otra cuerda que pasa por N. Las direcciones CN y CM son las direcciones de los diámetros conjugados de la elipse. Las cuerdas T_1—T_2 y T_3—T_4 son las homólogas de los dos diámetros de la elipse, y su punto de intersección O_1 el homólogo del centro de la elipse.

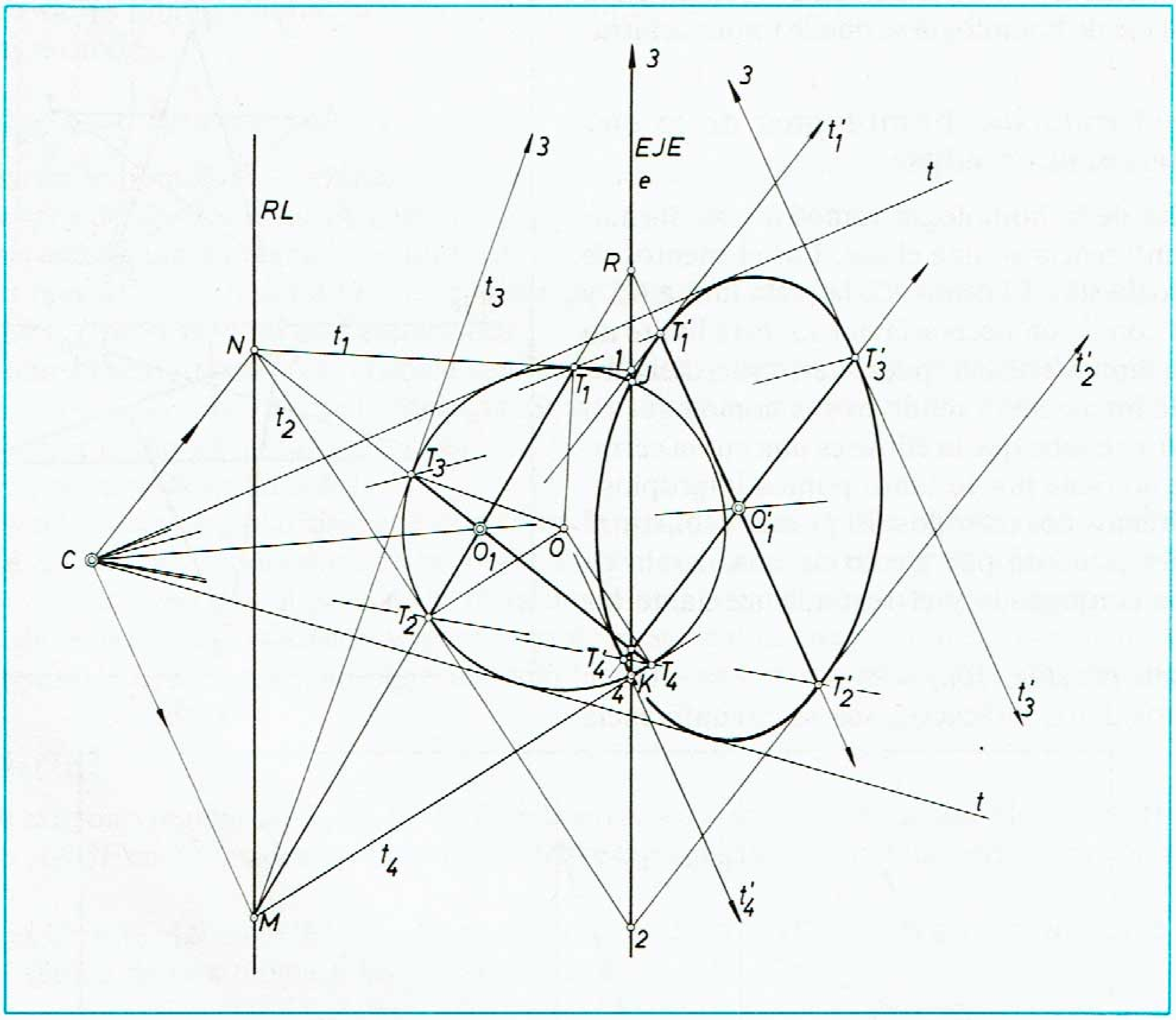

Fig. 10

Las tangentes desde N a la circunferencia cortan al eje en *1* y *2*; sus homólogas pasan también por *1* y *2* y serán paralelas a la dirección CN, obteniendo t_1' y t_2'.

Las tangentes desde M cortan al eje en *3* y *4*; sus homólogas pasan también por *3* y *4* y serán paralelas a la dirección CM, obteniendo t_3' y t_4'.

El punto de tangencia T_1 tiene su homólogo en t_1' y en línea recta con C, es decir, el punto T_1'. Lo mismo ocurre con los puntos T_2', T_3' y T_4' que unidos nos dan los diámetros buscados de la elipse $\overline{T_1'T_2'}$ y $\overline{T_3'T_4'}$. Los puntos J y K en los que el eje corta a la circunferencia son dobles y por lo tanto también pertenecen a la elipse.

Estos elementos son suficientes para construir la elipse empleando los métodos ya estudiados o bien por medio de la homología, buscando puntos homólogos de los de la circunferencia.

El homólogo del diámetro $\overline{T_3'T_4'}$ es la cuerda $\overline{T_3T_4}$ de la circunferencia; igualmente, el diámetro $\overline{T_1'T_2'}$ es homólogo de la cuerda $\overline{T_1T_2}$, cortándose por parejas en el mismo punto del eje.

Método 2.º *(Fig. 11).*

Con los mismos datos vamos a obtener los ejes de elipse. El homólogo del centro de la elipse es el polo P de la recta límite respecto de la circunferencia. Para obtenerle, se traza por O la perpendicular a la recta límite, OM, y por M las tangentes a la circunferencia cuyos puntos de contacto son *1* y *2*. La cuerda $\overline{1\text{-}2}$ se corta con OM en el punto P, polo buscado.