

MATEMÁTICAS I.3º AVALIACIÓN.
DERIVADAS.APLICACIONES. CÁLCULO DE PROBABILIDADES.
 (28 de Maio de 2026)

Nome: _____

É obrigatorio **escribir con bolígrafo**. As páxinas deberán estar numeradas indicando tamén o total de páxinas. Non é necesario responder as preguntas seguindo a orde numérica, pero deberá quedar claro cal é o exercicio que se está a facer e non intercalar respostas doutros exercicios.

No desenvolvemento dos exercicios, valorarase:

- A utilización da linguaxe, notación e símbolos matemáticos adecuados.
- A utilización de argumentos, xustificacións e razoamentos coherentes.
- A precisión e rigor adecuados para a resolución do problema.
- A interpretación da solución dos exercicios.

1	2	3	4	5	6	7	TOTAL

1.- 1 PUNTO

Dada a función $f(x) = \frac{2}{x}$.

a) Determina a pendente da recta tanxente á $f(x)$ en $x=1$, utilizando a definición de derivada.

Pendente recta tanxente á $f(x)$ en $x=1$ é $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+h} - \frac{2}{1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - 2(1+h)}{1+h}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2 - 2h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(1+h)} = -2$$

b) Calcula a ecuación da recta tanxente a $f(x)$ en $x=1$.

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \quad f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$y = 2 + (-2)(x-1)$$

$$y = 2 - 2x + 2 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4} \text{ RECTA TANXENTE Á } f(x) \text{ EN } x=1$$

2.- 125 PUNTOS

Calcula a, b e c para que a función $f(x)=ax^4+bx+c$ pase polo punto $(1,-1)$, teña recta tanxente horizontal en $x=1$ e teña recta tanxente en $x=0$ paralela a $y=4x$.

$$f \text{ pasa por } (1,-1) \Rightarrow f(1)=-1 \Rightarrow \boxed{a+b+c=-1}$$

$$f \text{ ten recta tanxente horizontal en } x=1 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow \boxed{4a+b=0} \\ \uparrow \\ f'(x)=4ax^3+b \end{array} \right.$$

$$f \text{ ten recta tanxente paralela a } y=4x \text{ en } x=0 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f'(0)=4 \Rightarrow \boxed{b=4} \\ \uparrow \\ f'(x)=4ax^3+b \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c=-1 \\ 4a+b=0 \\ b=4 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{b=4} \xRightarrow{4a+b=0} 4a+4=0 \Rightarrow \boxed{a=-1} \xRightarrow{a+b+c=-1} -1+4+c=-1 \Rightarrow \boxed{c=-4}$$

Entón, $\boxed{f(x) = -x^4 + 4x - 4}$

3.- 2,5 PUNTOS

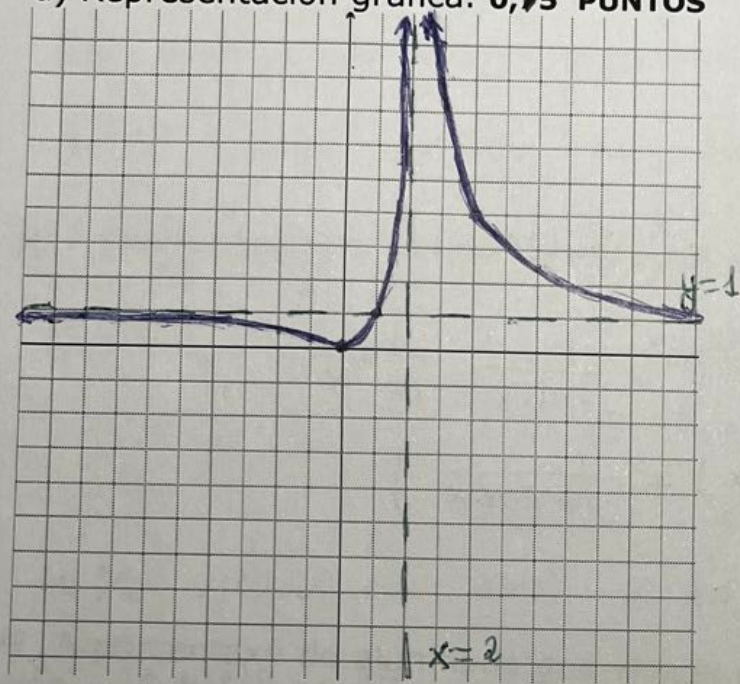
Dada a seguinte función $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$. Calcula:

a) Dominio e puntos de corte cos eixes. **0,25 PUNTOS**

b) Ecuacións das asíntotas. **0,5 PUNTOS**

c) Intervalos de crecemento e decrecemento. Extremos relativos. **1 PUNTO**

d) Representación gráfica. **0,75 PUNTOS**



a) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

CORTES EIXES: $(0,0)$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

b) ASÍNTOTAS

A.V. $x=2$ p.g. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{4}{0} = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$

x	1	-1	-2	3	4	6
f(x)	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{16}{4} = 4$	$\frac{36}{16}$

A.H. $y=1$ p.g. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1^+$

x	1000	-1000
f(x)	1.000	0.999

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1^-$

c) Intervalos crecemento e decrecemento:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-2)^2 - x^2 \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[2x(x-2) - 2x^2]}{(x-2)^4} = \frac{-4x}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$

	f'		f
$(-\infty, 0)$	$\ominus$	$f'(-1) = \frac{+4}{-27}$	DECRECE
$(0, 2)$	$\oplus$	$f'(1) = \frac{-4}{-1}$	CRECE
$(2, \infty)$	$\ominus$	$f'(3) = \frac{-12}{1}$	DECRECE

Extremos relativos:

En $(0,0)$ MÁXIMO RELATIVO

4.- 2 PUNTOS

Calcula a función derivada das seguintes funcións:

$$a) y = \frac{x^4}{3} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \frac{2}{x^2} + \sqrt{2} + \arctan x = \frac{1}{3}x^4 + x^{-\frac{3}{5}} - 2x^{-2} + \sqrt{2} + \arctan x$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 4x^3 - \frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}} + 4x^{-3} + 0 + \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{4x^3}{3} - \frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$b) y = e^{-x} \cdot \ln(\tan x)$$

$$y' = (e^{-x})' \ln(\tan x) + e^{-x} \cdot (\ln(\tan x))' \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$y' = -e^{-x} \cdot \ln(\tan x) + e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$y' = e^{-x} \cdot \left(-\ln(\tan x) + \frac{1}{\sin x \cos x} \right)$$

$$c) y = \frac{4^{2x}}{\sin^3 x} = \frac{4^{2x}}{(\sin x)^3}$$

$$y' = \frac{(4^{2x})' \cdot (\sin x)^3 - 4^{2x} \cdot ((\sin x)^3)'}{((\sin x)^3)^2} = \frac{4^{2x} \ln 4 \cdot 2(\sin x)^3 - 4^{2x} 3(\sin x)^2 \cos x}{(\sin x)^6}$$

$$y' = \frac{4^{2x} (\sin x)^2 \cdot [2 \ln 4 \sin x - 3 \cos x]}{(\sin x)^6} = \frac{4^{2x} (2 \ln 4 \sin x - 3 \cos x)}{\sin^4 x}$$

$$d) y = \ln \frac{\cos x}{e^{\sqrt{1+x^2}}} \text{ Aplica as propiedades dos logaritmos antes de}$$

derivar!!!!!!

$$y = \ln(\cos x) - \ln e^{\sqrt{1+x^2}} = \ln(\cos x) - \sqrt{1+x^2} \cdot \ln e$$

$$y = \ln(\cos x) - \sqrt{1+x^2} = \ln(\cos x) - (1+x^2)^{1/2}$$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = -\tan x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

5- 1,5 PUNTOS

El número de bicicletas alquiladas por una empresa a lo largo de un día viene dado por la función:

$f(x) = -x^3 + 24x^2 - 144x + 300$ donde x representa la hora del día, siendo válida entre las 6:00 y las 16:00 horas.

- a) ¿A qué hora se alquilan más bicicletas? ¿Cuántas bicicletas se alquilan en ese momento?
- b) ¿A qué hora se alquilan menos bicicletas? ¿Cuántas bicicletas se alquilan en ese momento?

Utiliza los teoremas vistos en clase para justificar el procedimiento. Razona las respuestas.

EXTREMOS RELATIVOS

$$f'(x) = -3x^2 + 48x - 144$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 3 \cdot 144}}{-6} = \frac{-48 \pm 24}{-6} = \begin{matrix} 4 \\ 12 \end{matrix}$$

$$f''(x) = -6x + 48$$

$$\boxed{x=4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(4) = 0 \\ f''(4) = -24 + 48 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{EN } x=4 \text{ MÍN. RELATIVO}$$

NO VÁLIDA PQ NO ESTÁ ENTRE LAS 6:00 Y LAS 16:00 H.

$$\boxed{x=12}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(12) = 0 \\ f''(12) = -72 + 48 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{EN } x=12 \text{ MÁX. RELATIVO}$$

VALOR FUNCIÓN NOS EXTREMOS DO DOMINIO $6 < x < 16$
E NO MAX. RELATIVO:

$$f(12) = -12^3 + 24 \cdot 12^2 - 144 \cdot 12 + 300 = 300 \quad \text{MAX. ABSOLUTO}$$

$$f(6) = -6^3 + 24 \cdot 6^2 - 144 \cdot 6 + 300 = 84$$

$$f(16) = -16^3 + 24 \cdot 16^2 - 144 \cdot 16 + 300 = 44 \quad \text{MÍN. ABSOLUTO}$$

a) A las 12:00 h. 300 bicicletas b) A las 16:00 h. 44 bicicletas.

6.- 1 PUNTO

Nun instituto o 30% do alumnado viaxou algunha vez en avión, e un 25% viaxou algunha vez en barco. Ademais, o 55% do alumnado non viaxou nunca nin en avión nin en barco. Calcula:

$$P(A) = 0'3 \quad P(B) = 0'25 \quad P(\overline{A \cap B}) = 0'55$$

a) A porcentaxe do alumnado que viaxou en avión ou en barco.

$$\text{Como } \overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} \text{ entón } P(A \cup B) = 0'55$$

$$\text{Polo tanto, } P(A \cup B) = 1 - 0'55 = 0'45$$

45% viaxou en avión ou en barco.

b) A porcentaxe do alumnado que viaxou en avión e en barco.

$$P(A \cap B) ? \quad \text{Como } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

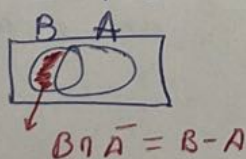
$$0'45 = 0'3 + 0'25 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0'1$$

10% viaxou en avión e en barco.

c) A porcentaxe do alumnado que viaxou en barco e non viaxou en avión.

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0'25 - 0'1 = 0'15$$



15% viaxou en barco e non en avión.

d) A porcentaxe do alumnado que viaxou en barco se sabemos que viaxou en avión.

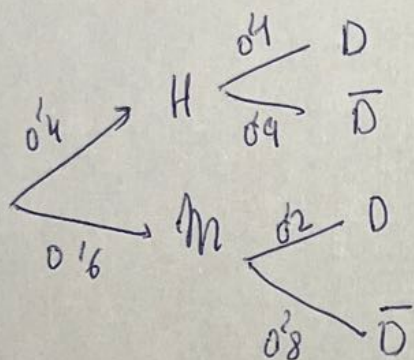
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0'1}{0'3} = \frac{1}{3} \approx 0'3333$$

33'33% viaxou en barco dos que sabemos que viaxou en avión.

7.- 1 PUNTO

Certa poboación de persoas maiores está formada por un 40% de homes e un 60% de mulleres. A porcentaxe de persoas dependentes nesa poboación é do 10% entre os homes e do 20% entre as mulleres.

a) Calcula a porcentaxe de persoas dependentes nesa poboación.



$H = \text{'ser home'}$ $M = \text{'ser muller'}$
 $D = \text{'ser dependente'}$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap H) + P(D \cap M) = \\ &= P(H) \cdot P(D/H) + P(M) \cdot P(D/M) = \\ &= 0.4 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.2 = \\ &= 0.04 + 0.12 = 0.16 \end{aligned}$$

16% de dependentes

b) Elexida unha persoa ao azar da citada poboación que non é dependente, ¿cal é a probabilidade de que sexa muller?

$$P(M / \bar{D}) = \frac{P(M \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(M) \cdot P(\bar{D}/M)}{1 - P(D)}$$

$$P(M / \bar{D}) = \frac{0.6 \cdot 0.8}{1 - 0.16} = \frac{0.48}{0.84} \approx 0.5714$$

57.14% dos non dependentes son mulleres

"CADA LOGRO COMEZA COA DECISIÓN DE INTENTALO"