

ANÁLISE I. MATEMÁTICAS I.

Exercicio nº1.-

Dada a función $f(x) = \frac{3}{x-2}$.

a) Determina a pendente da recta tanxente á curva f no punto de abscisa $x=4$, utilizando a definición de derivada.

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4+h-2} - \frac{3}{4-2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{h+2} - \frac{3}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6 - 3 \cdot (h+2)}{2(h+2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{2 \cdot (h+2)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{2(h+2)} = \frac{-3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Pendente da recta tanxente a f en $x=4 = f'(4) = -\frac{3}{4}$

b) Calcula a ecuación da recta tanxente e da recta normal en $x=4$.

RECTA TANXENTE EN $x=4$

$$y = f(4) + f'(4)(x-4)$$

$$f(4) = \frac{3}{4-2} = \frac{3}{2}$$

$$f'(4) = -\frac{3}{4}$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}(x-4)$$

$$y = \frac{-3x}{4} + \frac{3}{2} + 3$$

$$\boxed{y = \frac{-3x}{4} + \frac{9}{2}}$$

RECTA NORMAL EN $x=4$

$$y = f(4) - \frac{1}{f'(4)}(x-4)$$

$$y = \frac{3}{2} + \frac{4}{3}(x-4)$$

$$y = \frac{4x}{3} + \frac{3}{2} - \frac{16}{3}$$

$$y = \frac{4x}{3} + \frac{9-32}{6}$$

$$\boxed{y = \frac{4x}{3} - \frac{23}{6}}$$

Exercicio nº2.-

Calcula a función derivada das seguintes funcións:

$$a) y = \frac{x^3}{5} + \frac{2}{x^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + \arccos x = \frac{1}{5} x^3 + 2 x^{-2} - x^{-\frac{2}{3}} + \arccos x$$

$$y' = \frac{1}{5} 3x^2 - 4x^{-3} + \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} + \frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{3x^2}{5} - \frac{4}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b) y = \left(\frac{5x}{4} - \pi \right)^4$$

$$y' = 4 \cdot \left(\frac{5x}{4} - \pi \right)^3 \cdot \frac{5}{4} = 5 \cdot \left(\frac{5x}{4} - \pi \right)^3$$

$$c) y = e^{-x} \cdot \log(\cos x)$$

$$y' = (e^{-x})' \log(\cos x) + e^{-x} \cdot (\log(\cos x))' = e^{-x} \cdot (-1) \cdot \log(\cos x) + e^{-x} \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x \cdot \ln 10}$$

$$y' = -e^{-x} (\log(\cos x) + \tan x \cdot \log e)$$

$$d) y = 2^{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}$$

$$y' = 2^{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x^2+1}{(x-1)^2} \right)' = 2^{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{2x \cdot (x-1)^2 - (x^2+1) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4}$$

$$y' = 2^{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{(x-1) \cdot [2x(x-1) - 2(x^2+1)]}{(x-1)^4} = \frac{-2x-2}{(x-1)^3} \cdot 2^{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} \cdot \ln 2$$

$$e) y = \frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\sin x^3}{3} = \frac{1}{4} (\cos x)^4 - \frac{1}{3} \sin(x^3)$$

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 4 (\cos x)^3 \cdot (-\sin x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = -\sin x \cdot \cos^3 x - x^2 \cos x^3$$

$$f) y = \ln \frac{\sqrt{1-x^2}}{e^{\tan x}} = \ln \sqrt{1-x^2} - \ln e^{\tan x} = \frac{1}{2} \ln(1-x^2) - \tan x$$

Aplica as propiedades logaritmos antes de derivar!!!!

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} (-2x) - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{-x}{1-x^2} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

Exercício nº3.-

Calcula a, b, e c para que a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ passe pelo ponto (0,2) e tenha como recta tangente no ponto (1,4) a recta: $y = 11x - 7$.

f passa por (0,2) $\Rightarrow f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$
 f passa por (1,4) $\Rightarrow f(1) = 4 \Leftrightarrow a + b + c = 4$
Como $y = 11x - 7$ recta tangente a f em $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 11$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$
 $f'(1) = 3a + 2b = 11$
Resolvendo, $\begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 4 \\ 3a + 2b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 2b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 3b = -6 \\ 3a + 2b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - 3b = -3 \\ 3a + 2b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - 3b = -3 \\ -b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -5 \end{cases}$
Então $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + 2$

Exercício nº4.-

A função que calcula o número de pessoas que visitam um parque de atracções no verão, desde às 8 até às 20 h, vén dada por: $f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 1250$.

Calcula:

- A que hora hai máis pessoas no parque de atracções? ¿Cantos visitantes hai a esa hora?
- A que hora hai menos pessoas no parque de atracções? ¿Cantos visitantes hai a esa hora?

Razoa as respostas. Se empregas algún teorema para xustificar a resposta, enúnciao.

$$f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 1250 \quad f'(x) = 3x^2 - 90x + 600$$

Buscamos Máx. e Mín. Relativos da Função

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 600 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 200 = 0$$

$x = 10$ Posibles Máx. ou Mín. Relat.
 $x = 20$

$$f'(x) = 6x - 90$$

Como $f'(10) = 0$

$$f''(10) = 60 - 90 < 0$$

Como $f'(20) = 0$

$$f''(20) = 120 - 90 > 0$$

TEOREMA

$\Rightarrow$ EN $x = 10$ HAI MÁX. RELATIVO

TEOREMA

$\Rightarrow$ EN $x = 20$ HAI MÍN. RELATIVO

VALOR FUNCIÓN NOS EXTREMOS DO DOMÍNIO DE DEF. E NOS RELATIVOS $8 \leq x \leq 20$

$$f(8) = 8^3 - 45 \cdot 8^2 + 600 \cdot 8 - 1250 = 1182$$

$$f(20) = 20^3 - 45 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - 1250 = 750 \leftarrow \text{MÍN. ABSOLUTO}$$

$$f(10) = 10^3 - 45 \cdot 10^2 + 600 \cdot 10 - 1250 = 1250 \leftarrow \text{MÁX. ABSOLUTO}$$

- a) Às 10 h hai o maior nº de persoas. Hai 1250 persoas.
Às 20 h hai o menor nº de persoas. Hai 750 persoas.

INICIACIÓN AO CÁLCULO DE DERIVADAS.MATI.

1.- Dada a función $f(x) = \frac{3}{x}$. Determina a pendente da recta tanxente á curva f no punto de abscisa $x=1$, **utilizando a definición de derivada.**

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+h} - \frac{3}{1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3-3h}{1+h}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{1+h} = -3$$

Pendente da recta tanxente en $x=1 = f'(1) = -3$

2.- Calcula a función derivada das seguintes funcións:

a) $y = \frac{x^3}{5} + \frac{2}{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + \tan x + \arctan x = \frac{1}{5}x^3 + 2x^{-1} - x^{-\frac{2}{3}} + \tan x + \arctan x$

$$y' = \frac{1}{5} \cdot 3x^2 - 2x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{3x^2}{5} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{1+x^2}$$

b) $y = \left(\frac{3x}{2} - 5\right)^4$

$$y' = 4 \cdot \left(\frac{3x}{2} - 5\right)^3 \cdot \frac{3}{2} = 6 \cdot \left(\frac{3x}{2} - 5\right)^3$$

c) $y = 3^{-x} \cdot \ln(\cos x)$

$$y' = (3^{-x})' \cdot \ln(\cos x) + 3^{-x} \cdot (\ln(\cos x))' = 3^{-x} \ln 3 \cdot (-1) \cdot \ln(\cos x) + 3^{-x} \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$y' = -3^{-x} (\ln 3 \cdot \ln(\cos x) + \tan x)$$

d) $y = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

$$y' = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$y' = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{(-4x)}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

3.- Dada a función $h(x) = -x^4 + 2x^2$, indica: dominio, cortes cos eixos, ramas infinitas, intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos. A partir dos resultados obtidos, realiza a súa representación gráfica.

RESOLTO NA AVLA VIRTUAL

4.- Dada a función $f(x) = \frac{x}{(x+5)^2}$, calcula e representa a seguinte función:

(3 puntos)

- a) Dominio e cortes cos eixos.
- b) Asíntotas e situación da curva respecto a elas.
- c) Intervalos de crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos relativos.

RESOLTO NA AVLA VIRTUAL

5.- Escribe as ecuacións das rectas tanxentes á curva $y = x^3 - 3x$ que sexan paralelas á recta $6x - y + 10 = 0$.

$$6x - y + 10 = 0 \Rightarrow y = 6x + 10 \Rightarrow \text{A pendente da recta é } 6.$$

¿En que puntos da curva a pendente da recta tanxente é 6? x_0 ?

$$f'(x_0) = 6 \Rightarrow 3x_0^2 - 3 = 6 \Rightarrow 3x_0^2 = 9 \Rightarrow x_0^2 = 3 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

RECTA TANXENTE EN $x_0 = -\sqrt{3}$

$$y = f(-\sqrt{3}) + f'(-\sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0$$

$$f'(-\sqrt{3}) = 6$$

$$y = 0 + 6 \cdot (x + \sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{y = 6(x + \sqrt{3})}$$

RECTA TANXENTE EN $x_0 = \sqrt{3}$

$$y = f(\sqrt{3}) + f'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$$

$$f'(\sqrt{3}) = 6$$

$$y = 0 + 6 \cdot (x - \sqrt{3})$$

$$\boxed{y = 6(x - \sqrt{3})}$$

6.- Calcula a e b para que $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ pase polo punto (2, -6) e teña tanxente horizontal nese punto.

$$f(2) = a \cdot 2 + b + \frac{8}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ pasa por } (2, -6) \Rightarrow f(2) = -6 \Rightarrow 2a + b + 4 = -6 \Rightarrow 2a + b = -10 \\ f(x) \text{ ten tanxente horizontal en } (2, -6) \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$f'(x) = a - 8x^{-2} = a - \frac{8}{x^2}$$

$$\text{Por tanto } \left. \begin{array}{l} 2a + b = -10 \\ a - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$a = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 + b = -10 \Rightarrow b = -14$$

$$\boxed{f(x) = 2x - 14 + \frac{8}{x}}$$