

SOLUCIÓN

REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓN RACIONAL $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

Exercicio.-

Calcula dominio, cortes cos eixos, simetrías, asíntotas ou ramas, monotonía, extremos relativos, curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ porque $x^2 - 4x + 3 = 0$ cando $\begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

2º.- CORTES COS EIXOS:

$$\text{CO EIXO X : } x=0 \Rightarrow y = \frac{0}{3} = 0$$

$$\text{CO EIXO Y : } y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

CORTES COS EIXOS: (0,0)

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4(-x) + 3} = \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \neq \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON SIMÉTRICA RESPECTO AO EIXO Y}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4(-x) + 3} = \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \neq -f(x) = \frac{-x^2}{x^2 - 4x + 3} \Rightarrow f(x) \text{ NON SIMÉTRICA RESPECTO AO (0,0)}$$

4º.- ASÍNTOTAS OU RAMAS:

ASÍNTOTA VERTICAL:

$$x=1 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = -\infty$$

ASÍNTOTA VERTICAL:

$$x=3 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{9}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} = +\infty$$

ASÍNTOTA HORIZONTAL:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \quad \text{ASÍNTOTA HORIZONTAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1^+$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{2x^3 - 8x^2 + 6x - 2x^3 + 4x^2}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0 \Rightarrow -4x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-4x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} = 1,5 \end{cases}$$

PUNTOS SINGULARES. POSIBLES EXTREMOS RELATIVOS.

Para hacer os intervalos temos en conta os **puntos singulares** e os **puntos** que non teñen imaxe (é dicir, os **que non están no dominio**).

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	NEGATIVO $f'(-1) = \frac{-4-6}{()^2} < 0$	DECRECE
$(0, 1)$	POSITIVO $f'(0,5) = \frac{-1+3}{()^2} > 0$	CRECE
$(1; 1,5)$	POSITIVO $f'(1,1) = \frac{-4,84+6,6}{()^2} > 0$	CRECE
$(1,5; 3)$	NEGATIVO $f'(2) = \frac{-16+12}{()^2} < 0$	DECRECE
$(3, +\infty)$	NEGATIVO $f'(4) = \frac{-64+24}{()^2} < 0$	DECRECE

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

En $x=0$ HAI MÍNIMO RELATIVO. $(0, f(0)) = (0; 0)$ MÍNIMO RELATIVO.

En $x=1,5$ HAI MÁXIMO RELATIVO. $(0, f(1,5)) = (0; -3)$ MÁXIMO RELATIVO.

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-8x + 6)(x^2 - 4x + 3)^2 - (-4x^2 + 6x)2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - 4x + 3)[(-8x + 6)(x^2 - 4x + 3) - (-4x^2 + 6x)(4x - 8)]}{(x^2 - 4x + 3)^4} = \frac{(-8x + 6)(x^2 - 4x + 3) + (4x^2 - 6x)(4x - 8)}{(x^2 - 4x + 3)^3}$$

$$= \frac{-8x^3 + 32x^2 - 24x + 6x^2 - 24x + 18 + 16x^3 - 32x^2 - 24x^2 + 48x}{(x^2 - 4x + 3)^3} = \frac{8x^3 - 18x^2 + 18}{(x^2 - 4x + 3)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x^3 - 18x^2 + 18}{(x^2 - 4x + 3)^3} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 18x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x \approx -0,85 \quad \text{POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN}$$

Para hacer os intervalos temos en conta os puntos con derivada segunda cero e os puntos que non teñen imaxe (é dicir, os que non están no dominio).

INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty; -0,85)$	NEGATIVO $f''(-1) = \frac{-8 - 18 + 18}{(1 + 4 + 3)^3} < 0$	CÓNCAVA
$(-0,85; 1)$	POSITIVO $f''(0) = \frac{18}{3^3} > 0$	CONVEXA
$(1, 3)$	NEGATIVO $f''(2) = \frac{64 - 72 + 18}{(4 - 8 + 3)^3} < 0$	CÓNCAVA
$(3, \infty)$	POSITIVO $f''(4) = \frac{512 - 288 + 18}{(16 - 16 + 3)^3} > 0$	CONVEXA

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

En $x \approx -0,85$ HAI PUNTO DE INFLEXIÓN.

APROXIMADAMENTE NO $(0,85; f(0,85)) = (0,85; 0,1)$ PUNTO INFLEXIÓN.

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

