

SOLUCIÓN

REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓN RACIONAL $f(x) = \frac{x}{(x+5)^2}$

Exercicio.-

Calcula dominio, cortes cos eixos ,simetrías ,asíntotas ou ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = \frac{x}{(x+5)^2}$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R} - \{-5\}$ porque $(x+5)^2 = 0$ cando $x = -5$

2º.- CORTES COS EIXOS:

$$\text{CO EIXO X : } x=0 \Rightarrow y = \frac{0}{25} = 0$$

$$\text{CO EIXO Y : } y=0 \Rightarrow \frac{x}{(x+5)^2} = 0 \Rightarrow x=0$$

CORTES COS EIXOS: (0,0)

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x+5)^2} \neq \frac{x}{(x+5)^2} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON SIMÉTRICA RESPECTO AO EIXO Y}$$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x+5)^2} \neq \frac{-x}{(x+5)^2} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ NON SIMÉTRICA RESPECTO AO (0,0)}$$

4º.- ASÍNTOTAS OU RAMAS:

ASÍNTOTA VERTICAL:

$$x = -5 \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x}{(x+5)^2} = \frac{-5}{(-5+5)^2} = \frac{-5}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x}{(x+5)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x}{(x+5)^2} = +\infty$$

ASÍNTOTA HORIZONTAL:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x+5)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \quad \text{ASÍNTOTA HORIZONTAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0^+$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = \frac{x}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x+5)^2 - x \cdot 2 \cdot (x+5) \cdot 1}{(x+5)^4} = \frac{(x+5)[(x+5) - 2x]}{(x+5)^4} = \frac{-x+5}{(x+5)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{(x+5)^3} = 0 \Rightarrow -x+5 = 0 \Rightarrow x = 5 \quad \text{PUNTO SINGULAR. POSIBLE EXTREMO RELATIVO.}$$

Para hacer los intervalos temos en conta os **puntos singulares** e os **puntos** que non teñen imaxe (é dicir, os **que non están no dominio**).

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -5)$	NEGATIVO $f'(-6) = \frac{-(-6)+5}{(-6+5)^3} < 0$	DECRECE
$(-5, 5)$	POSITIVO $f'(0) = \frac{-0+5}{(0+5)^3} > 0$	CRECE
$(5, \infty)$	NEGATIVO $f'(6) = \frac{-6+5}{(6+5)^3} < 0$	DECRECE

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

En $x=5$ HAI MÁXIMO RELATIVO. $(5, f(5)) = (5, 0,05)$ MÁXIMO RELATIVO.

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = \frac{x}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x+5}{(x+5)^3} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x+5)^3 - (-x+5) \cdot 3(x+5)^2 \cdot 1}{(x+5)^6} = \frac{(x+5)^2[-(x+5) - 3(-x+5)]}{(x+5)^6} = \frac{-x-5+3x-15}{(x+5)^4} = \frac{2x-20}{(x+5)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-20}{(x+5)^4} = 0 \Rightarrow 2x-20 = 0 \Rightarrow x = 10 \quad \text{POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN}$$

Para hacer los intervalos temos en conta os **puntos con derivada segunda cero** e os **puntos** que non teñen imaxe (é dicir, os **que non están no dominio**).

INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -5)$	NEGATIVO $f''(-6) = \frac{-12-20}{(-6+5)^4} < 0$	CÓNCAVA
$(-5, 10)$	NEGATIVO $f''(0) = \frac{0-20}{(0+5)^4} < 0$	CÓNCAVA
$(10, \infty)$	POSITIVO $f''(11) = \frac{22-20}{(11+5)^4} > 0$	CONVEXA

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

En $x=10$ HAI PUNTO DE INFLEXIÓN. $(10, f(10)) = \left(10, \frac{10}{225}\right)$ PUNTO INFLEXIÓN.

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

