

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

SUCESOS. OPERACIÓN CON SUCECOS.

DEF.- Un experiencia aleatoria é aquela cuxos resultados non se poden predecir.

Por exemplo: -Lanzar un dado.

-Escoller unha carta dunha baralla.

-Anotar o sexo dun determinado nº de recén nados.

DEF.- Chámase **suceso elemental** a cada un dos resultados obtidos ao efectuar un experimento aleatorio. Por exemplo: No e.a. "lanzar un dado" os sucesos elementais son 6: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$.

DEF.- Chámase **espazo mostral** o conxunto formado por todos os sucesos elementais. No exemplo anterior $\Omega = E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

DEF.- Un **suceso** é un subconxunto do espazo mostral.

No exemplo anterior, podemos considerar os seguintes sucesos:

Suceso A="saír nº par"= $\{2,4,6\}$

Suceso B="saír nº impar"= $\{1,3,5\}$

Suceso C="saír múltiplo de 3"= $\{3,6\}$

Suceso D="saír múltiplo de 5"= $\{5\}$

Suceso E="saír nº primo"= $\{2,3,5\}$

Suceso F="saír nº menor que 7"= $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

Suceso G="saír múltiplo de 7"= $\{\emptyset\}$

Ao suceso F (onde o subconxunto coincide co espazo mostral) chámasele suceso **seguro ou suceso certo**, xa que sempre se realiza.

Ao suceso $G = \{\emptyset\} \subset E = \Omega$ chámasele **suceso imposible**, xa que non se realiza nunca.

Ao suceso que non é elemental (conxuntos formados por un único elemento) chámasele suceso composto. Por exemplo: Son compostos os sucesos A, B, C, E, F, D e é elemental o D.

Exemplo:

Consideramos o e.a. "Lanzar dous dados e anotar a suma dos resultados"

$E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Sucesos elementais = $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \dots$

Sucesos compostos: $A = \text{'saír nº par'} = \{2,4,6,8,10,12\}$; $B = \text{'saír nº primo'} = \{2,3,5,7,11\}$

Suceso seguro: $\Omega = E = \text{'saír nº comprendido entre 2 e 12'} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Suceso imposible: $\{\emptyset\} = \text{'saír nº de 3 cifras'}$

DEF.- Unha **variable estatística** é una aplicación ou lei que lle asigna a cada suceso do espazo mostral un valor cuantitativo (un nº real) ou cualitativo (unha cualidade).

As variables **cualitativas** toman valores cualitativos (non se poden medir con números).

Por exemplo: " estado civil"; "cor de ollos"...

As variables **cuantitativas** toman valores que se poden medir que se expresan mediante un nº. Distínguense dous tipos:

Discretas: Toma valores illados, é dicir, non admite valores intermedios entre dous valores específicos. Por exemplo: "nº irmáns de 5 amigos".

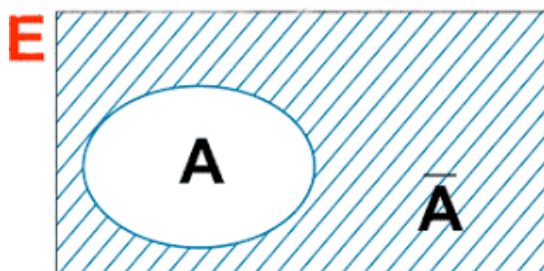
Continuas: Pode tomar todos os valores dun intervalo. Por exemplo: "a altura de 5 amigos"

DEF.- Dado un suceso A, chámase **suceso contrario ou complementario de A** ao suceso que se verifica cando non se verifica A. Representase por $\bar{A} = E - A$.

Exemplo:

Se $A = \text{"saír par"} \rightarrow \bar{A} = \text{"saír impar"}$

$\bar{E} = \emptyset$; $\bar{\emptyset} = E$



DEF.- Inclusión de sucesos. Un suceso A está incluído ou contido noutro suceso B cando $A \subset B$ coma conxunto, é dicir, cando sempre que se realice A, se realiza B. Se $A \subset B$ entón $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$

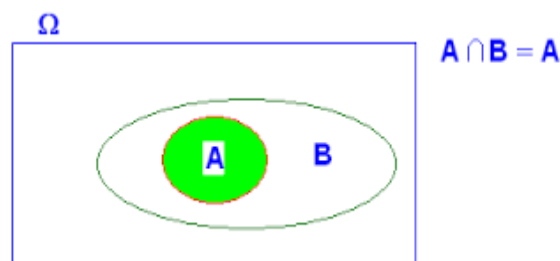
Exemplo:

Sexa e.a. "Lanzar dous dados e sumar os resultados"

Suceso A = "saír múltiplo de 4"

Suceso B = "saír múltiplo de 2"

$A \subset B$ xa que $\{4, 8, 12\} \subset \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$



DEF.- Igualdade de sucesos. $A=B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$

OPERACIÓN CON SUCESOS.

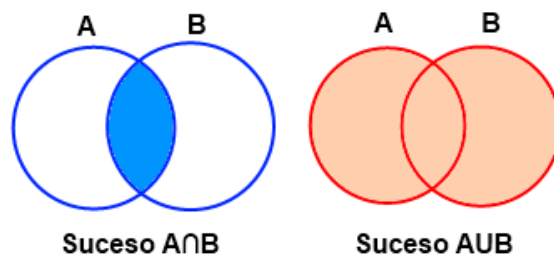
UNIÓN: $A \cup B$ é o suceso que se realiza cando se realiza A ou B. Corresponde á unión de A e B coma conxuntos.

Exemplo.- Experimento: "Lanzar un dado"

$A = \text{"saír par"} = \{2, 4, 6\}$

$B = \text{"saír nº primo"} = \{2, 3, 5\}$

$A \cup B = \text{"saír nº par ou nº primo"} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

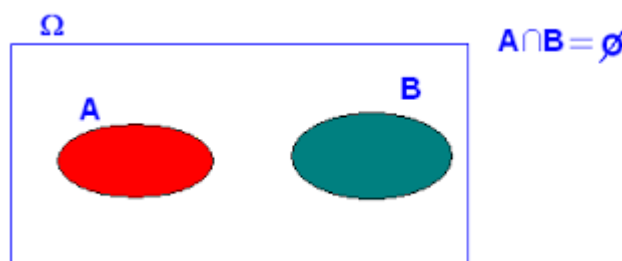


INTERSECCIÓN: $A \cap B$ é o suceso que se realiza cando se realiza á vez A e B.

Exemplo anterior.-

$A \cap B = \text{"saír par e nº primo"} = \{2\}$

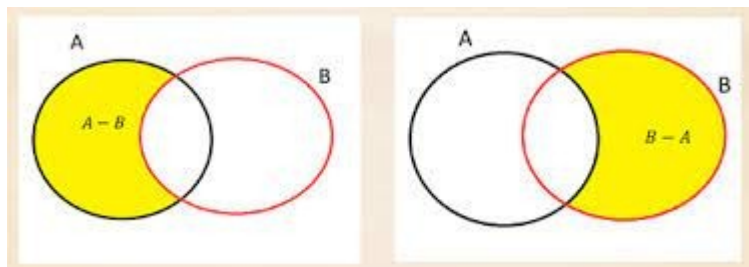
DEF.- Dous sucesos son incompatibles se a súa intersección é o conxunto baleiro $A \cap B = \emptyset$.



$A = \text{"saír par"}$
 P. ex. $B = \text{"saír impar"}$
 $A \cap B = \emptyset$

Un suceso e o seu complementario sempre son incompatibles.

DEF.- Diferenza de sucesos. O suceso diferenza de A e B e escríbese $A - B$ é o suceso que contén todos os elementos de A que non están en B.



DEF.- Dado un espacio mostral E, chámase **espacio de sucesos** asociado ao conxunto de todos os sucesos posibles (i.e. o conxunto de todos os subconxuntos de E).

Se un espacio mostral E ten n elementos (n sucesos elementais) entón o espacio de sucesos de E (que representaremos por S) terá 2^n elementos.

P.ex.

$$E = \{1, 2, 3\} \quad \text{cardinal}(E) = 3$$

$$S = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \} \quad \text{cardinal}(S) = 2^3 = 8$$

PROPIEDADES:

	UNIÓN	INTERSECCIÓN
1. ASOCIATIVA	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. CONMUTATIVA	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3. IDEMPOTENTE	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. SIMPLIFICATIVA	$A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$	
5. DISTRIBUTIVA	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
6.	$A \cup \bar{A} = E$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
LEIS DE MORGAN	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

DEF.- Chámase sistema completo de sucesos a un conxunto de sucesos que $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ verifican:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = E$ e son incompatibles dous a dous, é dicir,

$A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$)

P. ex. Sexa o e.a. "Lanzar un dado"

$$\left. \begin{array}{l} A = \{1, 2, 6\} \\ B = \{3, 4\} \\ C = \{5\} \end{array} \right\} A, B \text{ e } C \text{ é un sistema completo de sucesos}$$

DEF.- Chámase **PROBA OU EXPERIENCIA COMPOSTA** a formada por varias experiencias simples. O espazo mostral é o formado polo produto cartesiano dos espazos mostrais de cada experimento simple.

P. ex. "Lanzar un dado e unha moeda"

$$E = \{(1, c); (2, c); (3, c); (4, c); (5, c); (6, c); (1, +); (2, +); (3, +); (4, +); (5, +); (6, +)\}$$

E é o espazo composto ou espazo produto.

FRECUENCIA E PROBABILIDADE. REGRA DE LAPLACE. AXIOMÁTICA de KOLMOGOROV. EXPERIMENTOS SIMPLES E COMPOSTOS.

FRECUENCIAS ABSOLUTAS E RELATIVAS.

Supoñamos que realizamos un experimento aleatorio N veces e que A é un suceso dese experimento, $A \subset S$.

Chámase frecuencia absoluta de A ao número de veces que ocorre A e se designase por $f(A)$.

Chámase frecuencia relativa do suceso A á frecuencia absoluta dividida polo número de veces que se realiza o experimento e a representaremos por $fr(A)$. Por tanto $f_r(A) = \frac{f(A)}{N}$.

IDEA DE PROBABILIDADE.

Ao realizar moitas veces un experimento aleatorio, a frecuencia relativa dun certo suceso, $fr(A)$, vai tomando distintos valores. Estes valores, que ao principio varían bastante, pouco a pouco se van estabilizando de forma que, cando N é moi grande, se aproximan a un certo número que é a probabilidade de A que designaremos por $P(A)$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$$

Este feito coñécese co nome de **Lei dos grandes números**

As probabilidades dos distintos sucesos dunha mesma experiencia aleatoria deben cumprir as propiedades que se dan a continuación. As tres primeiras impóñense, son axiomas que se propoñen tendo en conta as propiedades das frecuencias relativas. As seguintes dedúcense das primeiras, son teoremas.

AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV

Dado un experimento aleatorio, con espazo mostral E e álgebra de sucesos asociada S , defínese a probabilidade dun suceso A como un número comprendido entre 0 e 1 que cumpre os seguintes axiomas:

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo suceso $A \in S$.
- 2) $P(E) = P(\Omega) = 1$
- 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para todo suceso A e B incompatibles $A \cap B = \emptyset$

PROPIEDADES DA PROBABILIDADE:

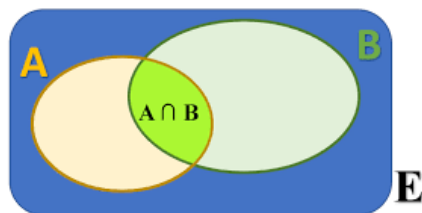
Dos axiomas da probabilidade dedúcense as seguintes propiedades:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Se $A \subset B$ entón $P(A) \leq P(B)$, e ademais $P(B) = P(A) + P(B - A)$.
4. Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ son incompatibles dous a dous se verifica que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



6. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
 $A - B = A \cap \bar{B}$

LEY DE LAPLACE.

Se o espazo mostral se pode descompoñer en n sucesos equiprobables e incompatibles entre sí, entón a probabilidade de A será:

$$\text{Probabilidade dun suceso } A = \frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

- É necesarios que os sucesos elementais sexan igualmente probables (equiprobables).
- Os casos posibles son o n° de elementos do espazo mostral.
- Os casos favorables son o n° de elementos do suceso A .

Este resultado coñécese como a Regra de Laplace. É moi importante apreciar que a **regra de Laplace** só se pode aplicar cando E ten un número finito de sucesos elementais e, ademais, estes son equiprobables.

Exemplo.-

Sexa o e.a. "Lanzar dúas moedas". Calcularemos a probabilidade de :

A="obter dúas caras"= $\{(C, C)\} \rightarrow$ CASOS FAVORABLES: 1

B="obter dúas cruces"= $\{(+, +)\} \rightarrow$ CASOS FAVORABLES: 1

C="obter unha cara e unha cruz"= $\{(C, +); (+, C)\} \rightarrow$ CASOS FAVORABLES: 2

D="obter ao menos unha cruz"= $\{(C, +); (+, C); (+, +)\} \rightarrow$ CASOS FAVORABLES: 3

ESPACIO MUESTRAL = $E = \Omega = \{(C, C); (C, +); (+, C); (+, +)\} \rightarrow$ CASOS POSIBLES: 4

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(D) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{3}{4}$$

Exemplo:

Sexa e.a. "Lanzar dous dados e anotar a suma". Cal é a probabilidade de obter un 11?

ESPACIO MUESTRAL = $E = \Omega = \{(1,1); (1,2); \dots; (1,6); (2,1); (2,2); \dots; (2,6); \dots; (6,1); (6,2); \dots; (6,6)\} \rightarrow$ CASOS POSIBLES: 36

S_{11} = SUMA IGUAL A 11 = $\{(5,6); (6,5)\} \rightarrow$ CASOS FAVORABLES: 2

$$P(S_{11}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Exemplo.-

Unha bolsa contén bólas numeradas do 1 ao 8. Sexa o e.a. "sacar unha bóla e anotar o seu número" Sexan os sucesos:

A="saír par" B="saír impar"

C="saír múltiplo de 4"

Calcula: $P(A \cup B), P(A \cup C) \text{ e } P(B \cup C)$.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad A = \{2, 4, 6, 8\} \quad B = \{1, 3, 5, 7\} \quad C = \{4, 8\}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ (A e B incompatibles)} \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (suceso seguro)}$$

$$A \cap C = \{4, 8\} \neq \emptyset \rightarrow P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B \cap C = \emptyset \text{ (B e C incompatibles)} \rightarrow P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

PROBABILIDADE CONDICIONADA. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS.

DEF.- Chámase probabilidade condicionada do suceso B respecto do suceso A, e denotaremos $P(B/A)$ ao cociente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ sendo } P(A) \neq 0$$

Análogamente, a probabilidade condicionada do suceso A respecto ao suceso B, $P(A/B)$ será:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ sendo } P(B) \neq 0$$

NOTA: Das dúas definicións anteriores tense:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B/A) \\ P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A/B) \end{aligned}$$

NOTA: A probabilidade condicionada verifica os axiomas de kolmogorov (pois é unha probabilidade)

Exemplo.- Dunha bolsa que contén 9 bólas brancas e 5 negras, extráense sucesivamente dúas bólas. Acha a probabilidade dos seguintes sucesos:

- que as dúas bólas sexan negras
- que as dúas bólas sexan brancas
- que a primeira sexa branca e a segunda negra
- que unha sexa branca e a outra negra

a) Sexa N_1 = "sacar bóla negra na 1ª extracción"

N_2 = "sacar bóla negra na 2ª extracción"

A probabilidade pedida será:

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{10}{91}$$

b) Sexa B_1 = "sacar branca na 1ª"

B_2 = "sacar branca na 2ª"

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{36}{91}$$

c) Sexa B_1 = "sacar branca na 1ª"

N_2 = "sacar negra na 2ª"

$$P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P(N_2/B_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$$

$$c) P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) =$$

$$= \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{45}{91}$$

DEF.-

A e B son sucesos dependentes se

$$[P(B) \neq P(B/A) \text{ e polo tanto } P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B/A)]$$

A e B son sucesos independentes se

$$[P(B) = P(B/A) \text{ e polo tanto } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)]$$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN EXPERIENCIAS COMPOSTAS.

Cando varias experiencias aleatorias son independentes a probabilidade de que ocurra A_1 na primeira, A_2 na segunda, A_3 na terceira, etc., é:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Cando varias experiencias aleatorias son dependentes a probabilidade de que ocurra A_1 na primeira, A_2 na segunda, A_3 na terceira, etc., é:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1})$ SIGNIFICA: PROBABILIDADE DE QUE SUCEDA A_n SABENDO QUE OCURRIRON $A_1, A_2, A_3, \dots$ Y A_{n-1} .

Exemplo.- Sexa o e.a. "Extraer dúas cartas dunha baralla española". Calcula a probabilidade de extraer dous reis:

- devolvendo a carta extraída en 1º lugar
- sen devolvela

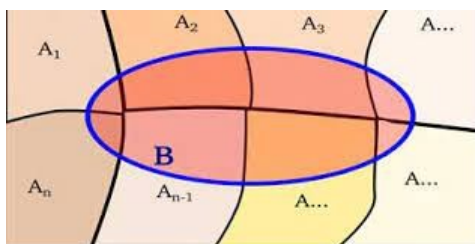
Sexan os sucesos $R_1 = \text{"obter rei na 1ª extracción"}$
 $R_2 = \text{"obter rei na 2ª extracción"}$

$$a) P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

$$b) P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL .

Sexan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos, é dicir:
 $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) y $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = E$



Entón para calquera suceso $B \subset E$ cúmprese que:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Exemplo.-

Temos dúas urnas U_1 e U_2 . A primeira contén 6 bólas brancas, 4 negras e 2 verdes, e a segunda 3 brancas e 7 negras. Lanzamos un dado, se sae un múltiplo de 3, collemos unha bóla da primeira urna; en caso contrario a collemos da segunda.

Calcula a probabilidade de coller unha bóla branca.

Sexan os sucesos B = "sacar bóla branca"

N = "sacar bóla negra"

V = "sacar bóla verde"

A = "saír múltiplo de 3 no lanzamento do dado"

$$\text{Entón } P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \quad P\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{Por T.P.T. } P(B) &= P((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right) + P(\bar{A}) \cdot P\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{11}{30} \end{aligned}$$

TEOREMA DE BAYES.

Sexan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos, é dicir:
 $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) y $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = E$

Entón para calquera suceso $B \subset E$ cúmprese que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

Exemplo.-

Nunha clase de bacharelato se sabe que un 8% de homes e un 2% de mulleres cumpriron os 19 anos. Eliximos ao chou un alumno e resultou que tiña máis de 19 anos. Calcula a probabilidade de que sexa muller, sabendo que o 60% dos alumnos son homes.

Sexan os sucesos A = "o estudante ten máis de 19 anos"

M = "o estudante é muller"

H = "o estudante é home"

$$\begin{aligned} \text{Entón, polo T.B.} \quad P(M/A) &= \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(M) \cdot P(A/M) + P(H) \cdot P(A/H)} = \\ &= \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{8}{100}} = \frac{0,4 \cdot 0,02}{0,4 \cdot 0,02 + 0,6 \cdot 0,08} \simeq 0,1429 \end{aligned}$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADE

DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICAS

Cando se fai un experimento aleatorio e despois, un recuento de frecuencias de cada suceso temos unha distribución de frecuencias, se as frecuencias se substitúen polas súas probabilidades teóricas temos unha distribución de probabilidade.

Unha distribución de probabilidade é por tanto, un modelo matemático teórico que trata de explicar os resultados dun experimento aleatorio real. Este modelo permite asignar probabilidades aos distintos sucesos ou realizar conxecturas sen necesidade de levar a cabo o experimento. Dependendo do tipo de fenómenos que explique, a distribución pode ser discreta ou continua.

Para contar ou medir estes resultados deben estar expresados en termos numéricos. Unha **variable aleatoria cuantitativa** X asígnalle a cada suceso elemental do espazo un número real.

Unha variable aleatoria pode ser **discreta** (toma valores illados) ou **continua** (toma todos os valores nun intervalo).

X ="puntuación obtida ao lanzar un dado" ; X =" puntuación obtida ao sumar as puntuacións ao lanzar dous dados "; X =" n.º irmáns de cada individuo nunha poboación" son exemplos de v.a. discretas.

X =" estatura de cada individuo nunha poboación"; X =" peso de cada individuo nunha poboación"; X =" tempo de estudo de cada individuo nunha poboación" son exemplos de v.a. continuas.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

A distribución binomial está asociada a experimentos do seguinte tipo:

- Realizamos n veces certo experimento no que consideramos só a probabilidade de éxito ou fracaso.
- A obtención de éxito ou fracaso en cada ocasión é independente da obtención de éxito ou fracaso nas demais ocasións.
- A probabilidade de obter éxito ou fracaso sempre é a mesma en cada ocasión.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. CÁLCULO DE PROBABILIDADES.

Se realizamos **n veces un experimento no que podemos obter éxito E, con probabilidade p e fracaso, F, con probabilidade q (q=1-p), entón a v.a.**

X= " número de éxitos obtidos nas n veces" é unha v.a. binomial de parámetros n e p, e representarémolo por X é Bin(n,p).

Por exemplo, son distribucións binomiais as seguintes:

1.- Lanzamos 10 moedas e nos preguntamos polo nº de caras. X é unha Bin(10;0,5).

2.- Lanzamos 6 dados e nos preguntamos polo número de "cincos". X é una Bin(6,1/6)

3.- Extraemos una carta dunha baralla, observamos se é ou non FIGURA e a devolvemos ao mazo. Barallamos e voltamos a extraer. Repetimos 5 veces. X é unha Bin(5; 0,3=12/40)

Neste caso, a probabilidade de obter k éxitos vén dada por:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$\text{sendo } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A distribución binomial atópase en táboas polo que é doado calcular probabilidades sen necesidade de facer demasiadas contas. Ver táboas da binomial (coñecendo n, p e k o procedemento é sinxelo)

MEDIA E DESVIACIÓN TÍPICA DUNHA DISTRIBUCIÓN

BINOMIAL: $\mu = n \cdot p$ e $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Exemplo:

Supoñamos que tiramos un dado 7 veces e contamos o número de cincos que obtemos. Cal é a probabilidade de obter tres cincos?

Chamamos Éxito=E="sacar un 5", entón $P(E) = \frac{1}{6} = p$

Chamamos Fracaso=F="non sacar un 5", entón $P(F) = \frac{5}{6} = q$

A v.a X= " número de veces que sae un 5 (nº éxitos) nas 7 tiradas" é unha $Bin(7, \frac{1}{6})$. X é Bin(7, $\frac{1}{6}$)

Queremos calcular $P(X=3)$ (obter 3 éxitos). Aplicando a fórmula:

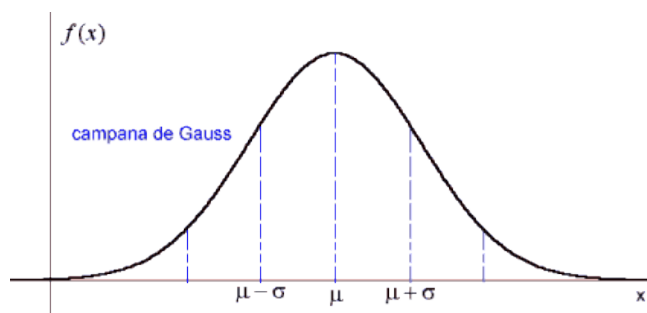
$$P(X=3) = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,0781$$

VARIABLES ALEATORIA CONTINUA :DISTRIBUCIÓN NORMAL.

DISTRIBUCIÓN NORMAL. CARACTERÍSTICAS.

A distribución de probabilidade continua máis importante é a **distribución normal**, á que se axustan moitos fenómenos naturais e sociais e que ocupa un lugar central na Estatística.

Nas distribucións normais a función de densidade depende da media m e a desviación típica s e ten por gráfica a curva que tes a continuación que se coñece co nome de campana de Gauss. A probabilidade de que a variable X tome valores nun intervalo $[a, b]$ é a área entre a gráfica da función e o eixo OX no intervalo $[a, b]$

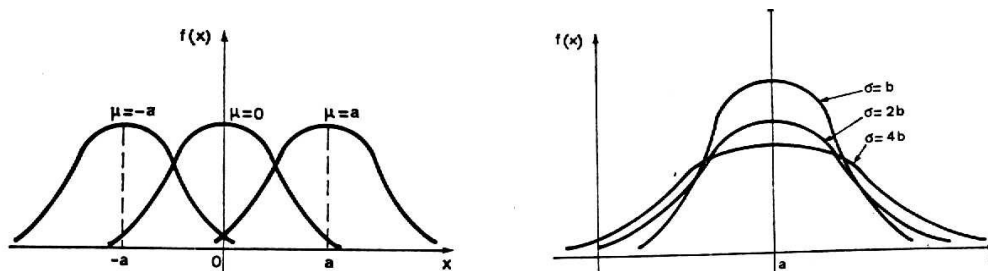


As características máis importantes da curva normal son as seguintes:

1. O dominio da variable normal é todo $\mathbb{R}$.
2. $f(x)$ é simétrica respecto á $x=\mu$.
3. O máximo de $f(x)$ acádase en $x=\mu$.
4. O eixo OX é unha asíntota de $f(x)$.
5. A área comprendida baixo a curva entre os límites $m \pm \sigma$ é 0,6826; entre $m \pm 2 \sigma$ é de 0,9544; e entre $m \pm 3 \sigma$ é de 0,9974.

Unha curva normal queda completamente identificada coñecendo o valor dos parámetros m e s , é dicir a súa media e a súa desviación típica. A tal curva chámase $N(m, s)$.

As funcións de densidade das variables normais constitúen unha familia de curvas, na cal cada unha delas vén determinada pola súa media e a súa desviación típica. Nas gráficas que tes a continuación podes ver a influencia de ambos parámetros: a desviación típica estreita ou ensancha a curva; a media desprázaa á esquerda ou á dereita.



DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

A distribución normal de media 0 e desviación típica 1, $N(0, 1)$, **distribución estándar** ou **normal tipificada** désígnase pola letra Z .

Nesta distribución os valores das probabilidades para os distintos valores de Z , están nunca táboa, polo que para coñecelos debemos aprender a manexar as táboas.

Para calcular a probabilidade dunha variable normal $N(\mu, \sigma)$ non tipificada X , é dicir, que non toma os valores $\mu=0$ e $\sigma=1$, transfórmase en outra variable tipificada mediante o cambio:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

que segue unha distribución de media 0 e desviación típica 1, é dicir,

$$Z \in N(0,1)$$

¿COMO SE USAN AS TÁBOAS DA $N(0,1)$?

Imos ver como se calculan probabilidades utilizando a táboa da normal dunha v.a. $Z \sim N(0,1)$ nalgúns casos. As táboas máis utilizaadas dan os valores de $P(Z \leq k)$. Imos ver como se calculan probabilidades utilizando a táboa da normal dunha v.a. $Z \sim N(0,1)$ nalgúns casos. As táboas máis utilizadas dan os valores de $P(Z \leq k)$.

1. Probabilidade de que Z tome valores menores ou iguais que 1,45:

$$P(Z \leq 1,45) = 0,9265$$

2. Probabilidade de que Z tome valores menores ou iguais que -1,45 :

$$P(Z \leq -1,45) = P(Z \geq 1,45) = 1 - P(Z \leq 1,45) = 1 - 0,9265 = 0,0735$$

3. Probabilidade de que Z tome valores entre 1'25 y 2'57:

$$P(1,25 \leq Z \leq 2,57) = P(Z \leq 2,57) - P(Z \leq 1,25) = 0,9949 - 0,8944 = 0,1005$$

4. Probabilidade de que Z tome valores entre -2'57 y -1'25:

$$P(-2,57 \leq Z \leq -1,25) = P(1,25 \leq Z \leq 2,57) = P(Z \leq 2,57) - P(Z \leq 1,25) = 0,9949 - 0,8944 = 0,1005$$

5. Probabilidade de que Z tome valores entre -0'53 y 2'46:

$$\begin{aligned} P(-0,53 \leq Z \leq 2,46) &= P(Z \leq 2,46) - P(Z \leq -0,53) = P(Z \leq 2,46) - P(Z > 0,53) = \\ &= P(Z \leq 2,46) - (1 - P(Z \leq 0,53)) = 0,9931 - (1 - 0,7019) = 0,695 \end{aligned}$$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES MEDIANTE A APROXIMACIÓN DA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL POLA NORMAL. CORRECCIÓN DE YATES PARA A CONTINUIDADE.

A aproximación binomial $Bin(n, p)$ achégase a unha $N(np, \sqrt{npq})$ cando $n \rightarrow \infty$

Cando $n \geq 30$ e $np > 3$ e $nq > 3 \Rightarrow$ A aproximación é bastante boa

Cando $n \geq 30$ e $np \geq 5$ e $nq \geq 5 \Rightarrow$ A aproximación é case perfecta

No caso de que podamos facer a aproximación, temos que ter en conta que a binomial é discreta e a normal continua, polo que é necesario introducir un axuste no cálculo chamado *corrección de Yates*. Así:

X é $Bin(n, p)$ entón, nas condicións que fan posible a aproximación, X' é $N(np, \sqrt{npq})$

$$P(a < X \leq b) = P(a + 0,5 < X' < b + 0,5)$$

$$P(a \leq X < b) = P(a - 0,5 < X' < b - 0,5)$$

$$P(X = a) = P(a - 0,5 < X' < a + 0,5)$$

Exemplo.-

Tiramos un dado 100 veces, calcula a probabilidade de obter entre 20 e 33 cincos (inclusive).

Chamamos Éxito= E ="sacar un 5", entón $P(E) = \frac{1}{6}$

Chamamos Fracaso= F ="non sacar un 5", entón $P(F) = \frac{5}{6}$

Estamos por tanto ante unha $Bin\left(100, \frac{1}{6}\right)$ e queremos calcular

$$P(20 \leq X \leq 33)$$

NON PODEMOS NIN USAR AS TÁBOAS (n demasiado grande)

NIN A FÓRMULA !!!!!!!!!!!!!!!

Como $n \geq 30$, $np = 16,67 \geq 5$ e $nq = 83,33 \geq 5$, entón

$$X \rightarrow Bin\left(100; \frac{1}{6}\right) \approx X' \rightarrow N(np = 16,67; \sqrt{npq} = 3,73)$$

$$\begin{aligned}
 P(20 \leq X \leq 33) &\approx P(19,5 \leq X' \leq 33,5) = \\
 &= P\left(\frac{19,5 - 16,67}{3,73} \leq \frac{X' - 16,67}{3,73} \leq \frac{33,5 - 16,67}{3,73}\right) = \\
 &= P(0,89 \leq Z \leq 4,51) = P(Z \leq 4,51) - P(Z \leq 0,89) \approx \\
 &\approx 1 - 0,8133 = 0,1867
 \end{aligned}$$

Exercicio nº1.-

Nunha distribución $\text{Bin}(200;0,3)$, calcula: $P(X \geq 70)$

Exercicio nº2.-

O 2 % dos parafusos fabricados por unha máquina presentan defectos. Nun lote de 2000 parafusos, cal é a probabilidade de que o nº de defectuosos sexa menor que 50?