

SOLUCIÓN

TAREFA DE REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓN RACIONAL $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Exercicio nº1.-

Calcula dominio, cortes cos eixos ,simetrías ,asíntotas ou ramas ,monotonía ,extremos relativos ,curvatura, puntos de inflexión e representa a seguinte función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

SOLUCIÓN:

1º.- DOMINIO: $\mathbb{R}$ porque $x^2+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

2º.- CORTES COS EIXOS:

CO EIXO X : $x=0 \Rightarrow y=0$

CO EIXO Y : $y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

CORTES COS EIXOS: (0,0)

3º.- SIMETRÍAS:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ SIMÉTRICA RESPECTO AO EIXO Y}$$

4º.- ASÍNTOTAS OU RAMAS:

ASÍNTOTAS VERTICAIS: NON HAI porque $x^2+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \Rightarrow y=1 \text{ ASÍNTOTA HORIZONTAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1^-$$

5º.- MONOTONÍA:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{PUNTO SINGULAR. POSIBLE EXTREMO RELATIVO.}$$

Para hacer los intervalos temos en conta os **puntos singulares** e os **puntos** que non teñen imaxe (é dicir, os **que non están no dominio**, neste caso, NON HAI NINGÚN PUNTO QUE NON ESTEA NO DOMINIO).

INTERVALO	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	NEGATIVO $f'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{((-1)^2+1)^2} < 0$	DECRECE
$(0, \infty)$	POSITIVO $f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{(1^2+1)^2} > 0$	CRECE

6º.- EXTREMOS RELATIVOS:

En $x=0$ HAI MÍNIMO RELATIVO. $(0, f(0)) = (0, 0)$ MÍNIMO RELATIVO.

7º.- CURVATURA:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow -6x^2+2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{POSIBLES PUNTOS DE INFLEXIÓN}$$

Para hacer los intervalos temos en conta os **puntos con derivada segunda cero** (neste caso, non hai) e os **puntos** que non teñen imaxe (é dicir, os **que non están no dominio**, neste caso, NON HAI NINGÚN PUNTO QUE NON ESTEA NO DOMINIO).

INTERVALO	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	NEGATIVO $f''(-1) = \frac{-6+2}{((-1)^2+1)^3} < 0$	CÓNCAVA
$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	POSITIVO $f''(0) = \frac{2}{1^3} > 0$	CONVEXA
$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$	NEGATIVO $f''(1) = \frac{-6+2}{(1^2+1)^3} < 0$	CÓNCAVA

8º.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

En $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ HAI PUNTO DE INFLEXIÓN. $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ PUNTO INFLEXIÓN.

En $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ HAI PUNTO DE INFLEXIÓN. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ PUNTO INFLEXIÓN.

9º.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

