

SOLUCIÓN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1.- O custo total (en dólares) de fabricación de q unidades de certo artigo é: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

O custo medio por unidade é: $M(q) = \frac{C(q)}{q}$

a) Cantas unidades se deben fabricar para que o custo medio por unidade sexa mínimo?

b) Calcula $C(q)$ e $M(q)$ para o valor de q que indicaches na epígrafe a).

Solución:

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75$$

$$M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3q^2 + 5q + 75}{q} = 3q + 5 + \frac{75}{q}$$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, \infty)$ $q \in (0, \infty)$ q : unidades.

$$M'(q) = 3 - 75q^{-2} = 3 - \frac{75}{q^2}$$

$$M'(q) = 3 - \frac{75}{q^2} = 0 \Rightarrow \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \Rightarrow 3q^2 - 75 = 0 \Rightarrow q^2 = 25 \Rightarrow q = \pm 5 \text{ (} q = -5 \text{ non válida, fóra do dominio)}$$

$q = 5$ PUNTO SINGULAR

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se a M'' (no punto singular) $> 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se M'' (no punto singular) $< 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

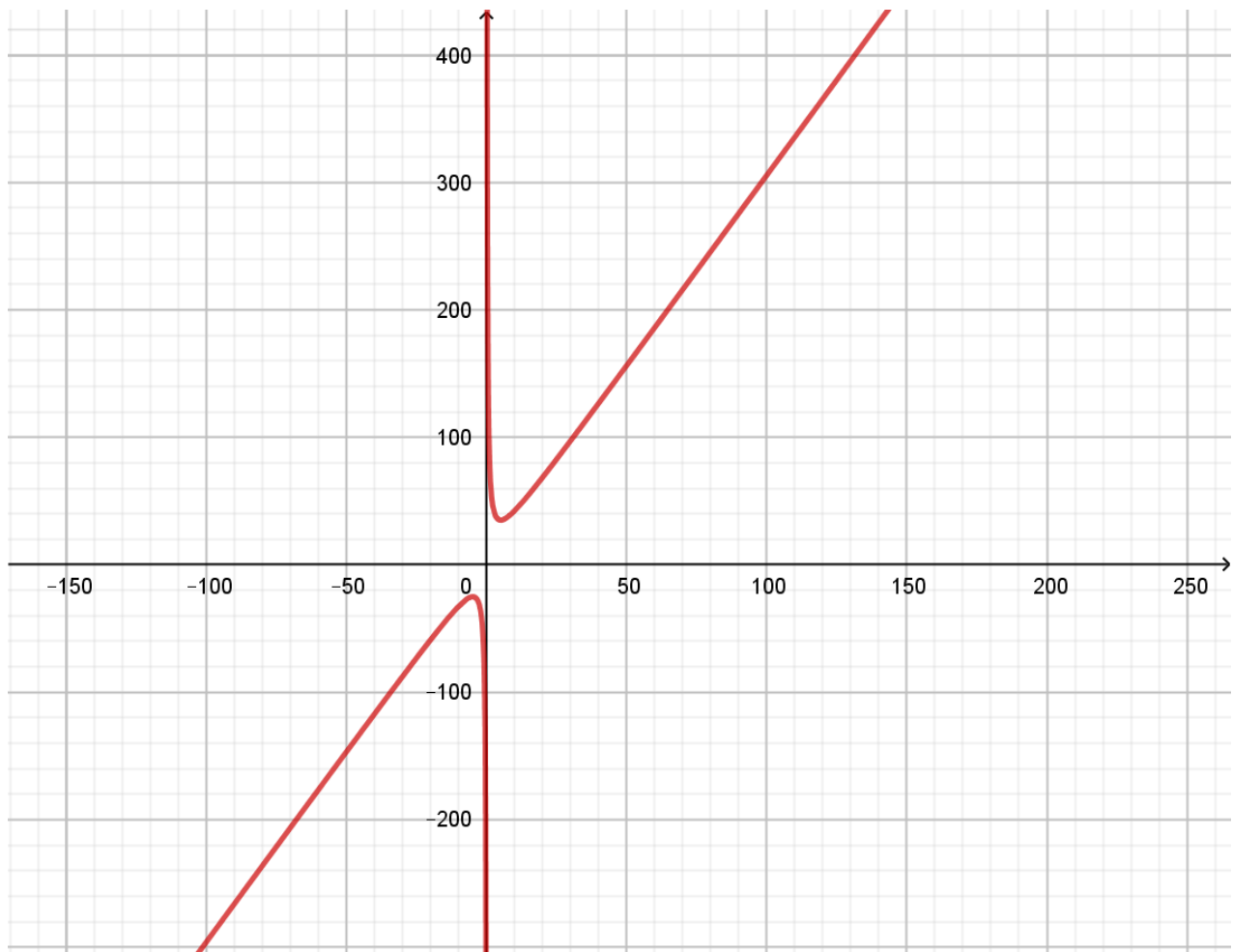
$$M''(q) = 0 - (-2) \cdot 75q^{-3} = \frac{150}{q^3} \Rightarrow M''(5) = \frac{150}{5^3} > 0 \Rightarrow q = 5 \text{ é o único mínimo relativo en } (0, \infty).$$

Para saber se é o mínimo absoluto de $M(q)$, calculamos a súa i max e a i max e dos extremos.

$$\left. \begin{aligned} M(5) &= \frac{175}{5} = 35 \\ \lim_{q \rightarrow 0} M(q) &= \frac{C(q)}{q} = 3q + 5 + \frac{75}{q} = \infty \\ \lim_{q \rightarrow \infty} M(q) &= \frac{C(q)}{q} = 3q + 5 + \frac{75}{q} = \infty \end{aligned} \right\} \text{Definitivamente en } q = 5 \text{ está o mínimo absoluto da función en } (0, \infty)$$

$$C_{\text{mínimo}} = C(5) = 175 \text{ dólares}$$

$$M_{\text{mínimo}} = M(5) = 35 \text{ dólares custo medio mínimo}$$



Só consideramos a función en $(0, \infty)$.

- 2.- A función $f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$ indica os beneficios obtidos por unha empresa desde que comezou a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en anos).
- Representaa graficamente.
 - Ao cabo de canto tempo obtén a empresa o beneficio máximo? Cal é ese beneficio?
 - Perderá diñeiro a empresa nalgún momento?

Solución:

$f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$ función que hai que optimizar (calcular o beneficio máximo)

$f(x)$ beneficio en miles de euros

x : anos $x \in (0, \infty)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos sin gulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, \infty)$
 $x \in (0, \infty)$ x : anos.

$$f'(x) = \frac{60 \cdot (x^2 + 9) - 60x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2 + 9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2 + 9)^2} = 0 \Rightarrow -60x^2 + 540 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \quad (x = -3 \text{ non válida, fóra do dominio})$$

$x = 3$ PUNTO SINGULAR

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $f''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $f''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{-120x(x^2 + 9)^2 - (-60x^2 + 540)2(x^2 + 9)2x}{(x^2 + 9)^4} = \frac{(x^2 + 9)[-120x(x^2 + 9) - 4x(-60x^2 + 540)]}{(x^2 + 9)^4} =$$

$$f''(x) = \frac{-120x^3 - 1080x + 240x^3 - 2160x}{(x^2 + 9)^3} = \frac{120x^3 - 3240x}{(x^2 + 9)^3} \Rightarrow f''(3) = \frac{120 \cdot 3^3 - 3240 \cdot 3}{(3^2 + 9)^3} < 0 \Rightarrow$$

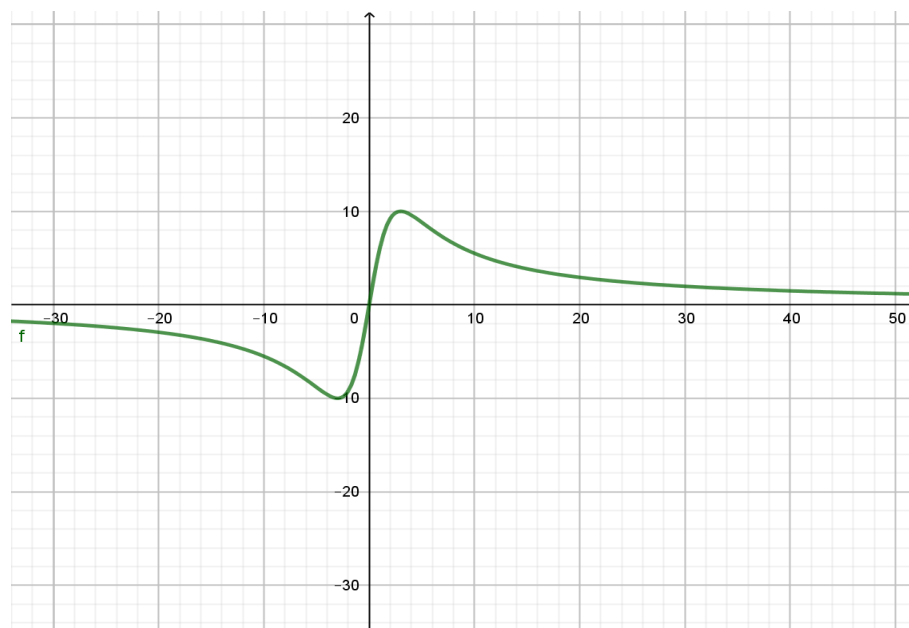
$x = 3$ é o único máximo relativo en $(0, \infty)$.

Para saber se é o máximo absoluto de $f(x)$ en $(0, \infty)$, calculamos a súa $i \max$ e a $i \max$ dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = \frac{60 \cdot 3}{3^2 + 9} = 10 \\ f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 3 \text{ está o máximo absoluto da función } f \text{ en } (0, \infty)$$

Ao cabo de 3 anos obtense o beneficio máximo e o $b_{\max} = f_{\max} = f(3) = 10$ miles de euros = 10000 euros

Non perderá diñeiro pq $\lim_{0 \rightarrow x} f(x) = 0^+$ En $(0, \infty)$ $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$



Só consideramos a función en $(0, \infty)$.

Seguir todos os pasos para representar a función (dominio, cortes, simetrías, monotonía...).

3.- Descomponer el número 16 en dos sumandos positivos tales que el producto sea máximo.

Solución:

Chamámoslle x a un sumando e y ao outro.

Como a suma dos dous é 16 $\Rightarrow x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$

O que queremos é ver que valores de x e y fan máxima o produto:

A función que temos que maximizar é: $\text{Producto} = xy \stackrel{\text{Como } y=16-x}{=} x(16-x) = 16x - x^2 \quad x \in (0,16)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0,16)$ $x \in (0,16)$ (x : un dos sumandos positivos nos que se descompón 16).

$$P'(x) = 16 - 2x$$

$$P'(x) = 16 - 2x = 0 \Rightarrow 16 - 2x = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ PUNTO SINGULAR}$$

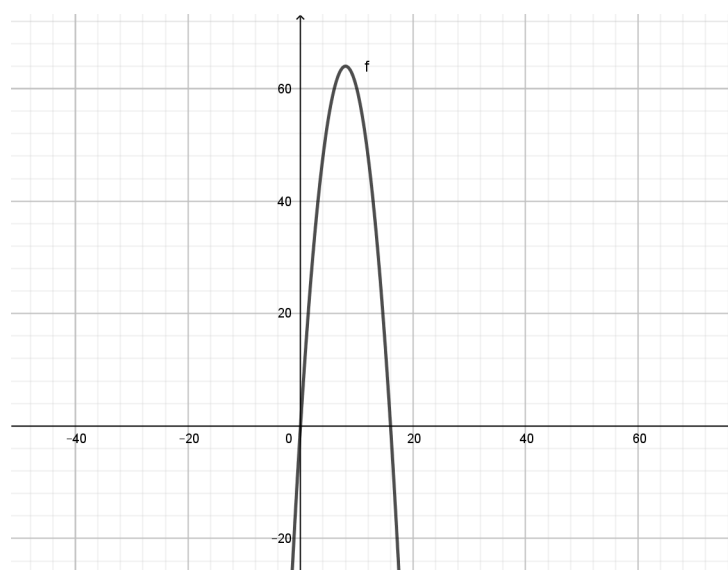
Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se a $P''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $P''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$P''(x) = -2 \Rightarrow P''(8) = -2 < 0 \Rightarrow x = 8 \text{ é o único máximo relativo.}$$

Para saber se é o máximo absoluto, calculamos a súa i max e a i max e dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} P(8) = 64 \\ P(0) = 0 \\ P(16) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 8 \text{ (Entón } y = 16 - 8 = 8) \text{ está o máximo absoluto da función.}$$

O produto máximo é 64, e é cando descomponse 16 como $8 + 8$. $x = 8$ e $y = 8$.



Só consideramos a función en $(0, \infty)$.

4.- Observouse que nunha carreteira de saída dunha grande cidade a velocidade dos coches entre as 2 horas e as 6 horas da tarde vén dada por:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \quad \text{para } t \in [2, 6]$$

¿A que hora circulan os coches a maior velocidade? ¿A que hora ca menor velocidade? Xustifica a resposta.

Solución:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \quad t \in [2, 6]$$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = [2, 6]$

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72$$

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 4 \end{cases} \quad \text{PUNTOS SINGULARES}$$

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $v''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $v''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$v''(q) = 6t - 30 \Rightarrow \begin{cases} v''(4) = 24 - 30 < 0 \Rightarrow \text{En } t = 4 \text{ hai máximo relativo en } [2, 6]. \\ v''(6) = 36 - 30 > 0 \Rightarrow \text{En } t = 6 \text{ hai mínimo relativo en } [2, 6]. \end{cases}$$

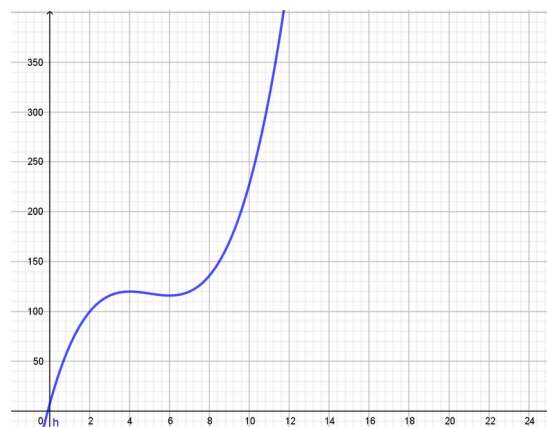
Para saber se é o mínimo ou máximo absoluto de $M(q)$, calculamos a súa $i_{\max}$ e a $i_{\min}$ dos extremos.

$$\left. \begin{aligned} v(4) &= 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 8 = 120 \\ v(2) &= 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 + 8 = 100 \\ v(6) &= 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 72 \cdot 6 + 8 = 116 \end{aligned} \right\} \text{Definitivamente en } t = 4 \text{ está o máximo absoluto da función en } [2, 6]$$

$$\left. \begin{aligned} v(2) &= 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 + 8 = 100 \\ v(6) &= 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 72 \cdot 6 + 8 = 116 \end{aligned} \right\} \text{Definitivamente en } t = 2 \text{ está o mínimo absoluto da función en } [2, 6]$$

Ás 4 h os coches circulan coa velocidade máxima $v_{\max} = v(4) = 120 \text{ km/h}$

Ás 2 h os coches circulan coa velocidade mínima $v_{\min} = v(2) = 100 \text{ km/h}$



Só temos que considerar a función no intervalo $[2, 6]$.

8.- Os beneficios dunha empresa, expresados en centos de milleiros de euros, cando transcurren t anos ,

veñen dados pola función: $f(t) = \frac{75t}{t^2 + 100}$ ¿Cales son os seus máximos beneficios e cando se producen?

Solución:

$$f(t) = \frac{75t}{t^2 + 100} \text{ función que hai que optimizar (calcular o beneficio máximo)}$$

$f(t)$ beneficio en miles de euros

t : anos $t \in (0, \infty)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, \infty)$ $t \in (0, \infty)$ t : anos .

$$f'(t) = \frac{75(t^2 + 100) - 75t \cdot 2t}{(t^2 + 100)^2} = \frac{75t^2 + 7500 - 150t^2}{(t^2 + 100)^2} = \frac{-75t^2 + 7500}{(t^2 + 100)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-75t^2 + 7500}{(t^2 + 100)^2} = 0 \Rightarrow -75t^2 + 7500 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10 \text{ (} x = -10 \text{ non válida, fóra do dominio)}$$

$x = 10$ PUNTO SINGULAR

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $f''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $f''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$f''(t) = \frac{-150t(t^2 + 100)^2 - (-75t^2 + 7500)2(t^2 + 100)2t}{(t^2 + 100)^4} = \frac{(t^2 + 100)[-150t(t^2 + 100) - 4t(-75t^2 + 7500)]}{(t^2 + 100)^4} =$$

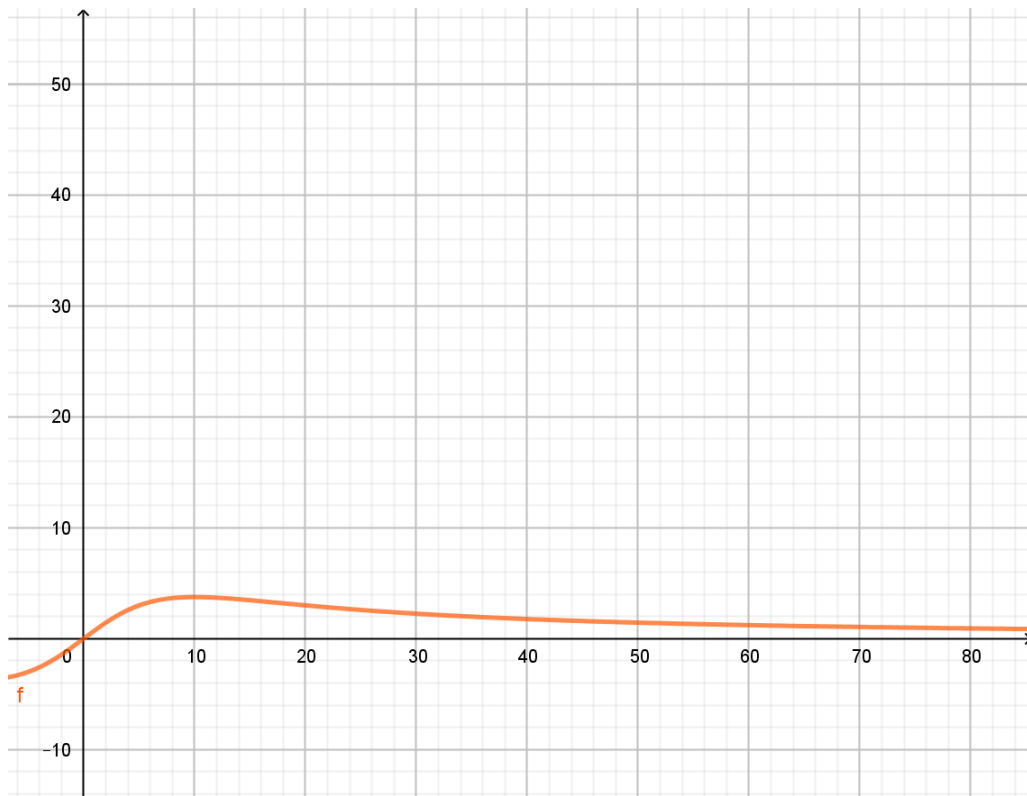
$$f''(x) = \frac{-150t^3 - 15000t + 300t^3 - 30000t}{(t^2 + 100)^3} = \frac{150t^3 - 45000t}{(t^2 + 100)^3} \Rightarrow f''(10) = \frac{150 \cdot 10^3 - 45000 \cdot 10}{(10^2 + 100)^3} < 0 \Rightarrow$$

En $x = 10$ está o único máximo relativo en $(0, \infty)$.

Para saber se é o máximo absoluto de $f(x)$ en $(0, \infty)$, calculamos a súa i max e a i max e dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} f(10) = \frac{75 \cdot 10}{10^2 + 100} = 3,75 \\ f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } t = 10 \text{ está o máximo absoluto da función } f \text{ en } (0, \infty)$$

Ao cabo de 10 anos obtense o beneficio máximo e o $b_{\text{máximo}} = f_{\text{máximo}} = f(10) = 3,75$ centos de milleiros de euros



Só consideramos a función en $(0, \infty)$.

5.- Dispónse dunha barra de ferro de 10 m para construír unha portería, de maneira que a portería teña a máxima superficie interior posible.

Que lonxitude deben ter os postes e o larguero? Que superficie máxima interior ten a portería?

Solución:

Perímetro de la portería:

$$x + 2y = 10 \Rightarrow x = 10 - 2y$$

La superficie encerrada:

$$S(y) = x \cdot y = (10 - 2y) \cdot y = 10y - 2y^2$$

$$S'(y) = 10 - 4y$$

$$S'(y) = 0 \Rightarrow 10 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$S''(y) = -4 < 0; y = 2,5 \text{ es un máximo}$$

Los postes deben medir cada uno $y = 2,5$ m

El larguero deberá medir $x = 10 - 2 \cdot 2,5 = 5$ m

La superficie encerrada será $S(2,5) = 10 \cdot 2,5 - 2(2,5)^2 = 12,5$ m²



6.- Descompoñer o número 81 en dous sumandos de maneira que o produto do primeiro sumando polo cadrado do segundo sexa máximo.

Solución:

Sean "x" e "y" ambos sumandos:

$$x + y = 81 \Rightarrow x = 81 - y$$

$$P(y) = x \cdot y^2 = (81 - y) \cdot y^2 = 81y^2 - y^3$$

$$P'(y) = 162y - 3y^2$$

$$P'(y) = 0 \Rightarrow 162y - 3y^2 = 0 \Rightarrow 3y \cdot (54 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 54 \end{cases}$$

$$P''(y) = 162 - 6y;$$

$$P''(54) = 162 - 6 \cdot 54 = -162 < 0 ; y = 54 \text{ es máximo}$$

$$P''(0) = 162 - 6 \cdot 0 = +162 > 0 ; y = 0 \text{ es mínimo}$$

Los sumando son $y = 54$, $x = 81 - 54 = 27$

7.- A concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, nunha cidade vén dada pola función $C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$, onde x é o tempo transcurrido dende o 1 de xaneiro de 1990 contado en anos. Ata que ano vai crecer a concentración de ozono? Cal vai ser esa concentración máxima?

Solución:

$$C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$$

$$C'(x) = 15 - 1,2x$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 15 - 1,2x = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{1,2} = 12,5$$

$$C''(x) = -1,2 < 0, \text{ por tanto, } x = 12,5 \text{ es máximo}$$

La concentración de ozono contaminante ha estado creciendo hasta 12,5 años después, es decir, hasta el 30 de junio de 2002.

La concentración máxima ha sido:

$$C(12,5) = 90 + 15 \cdot 12,5 - 0,6 \cdot (12,5)^2 = 58,75 \text{ microgramos por metro cúbico.}$$