

APLICACIÓNS DAS DERIVADAS Á RESOLUCIÓN DE :

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

Con moita frecuencia aparecen problemas físicos, xeométricos, económicos, biolóxicos..., nos que se trata de **OPTIMIZAR unha función** (CALCULAR O MÁXIMO OU O MÍNIMO DUNHA FUNCIÓN) (facer máximo un volume, uns beneficios, unha poboación,; facer mínimos uns custos ou unha área...). A dificultade destes problemas normalmente non estriba en optimizar unha función coñecida, senón en atopar a expresión analítica da función que temos que optimizar.

Nos problemas de optimización, o que interesa non son os **extremos** relativos da función senón os **absolutos**.

Se $f(x)$ é derivable en (a,b) , os MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS están:

- **NOS PUNTOS SINGULARES** (os puntos x que verifican que $f'(x)=0$)
- **NOS PUNTOS CORRESPONDENTES AOS EXTREMOS DO INTERVALO.**

Por tanto, para determinalos:

- **Resólvese $f'(x)=0$.**
- **Selecciónanse as raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ que están entre a e b (puntos singulares).**
- **Calcúlase $f(x_1), f(x_2), f(x_n), f(a), f(b)$ para saber cal deles é o máximo e cal o mínimo absoluto.**

Tamén se pode recurrir a este teorema para saber se os puntos singulares son máximos ou mínimos relativos ou nin máximos nin mínimos relativos.

Teorema:

Sexa $f(x)$ unha función con derivada segunda en un punto $x_0 \in (a, b)$, cúmprese que:

- Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x)$ ten un mínimo relativo en x_0
- Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x)$ ten un máximo relativo en x_0

Exemplo:

Dispoñemos dunha cerca de 100 m de lonxitude. Queremos delimitar a máxima área posible. Cales serán as dimensións do rectángulo de área máxima delimitado pola cerca?

Solución:

Chamámolles x a unha das dimensións do rectángulo e y a outra.

Como o perímetro do rectángulo é 100 m $\Rightarrow 2x + 2y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

O que queremos é ver que valores de x e y fan máxima a área do rectángulo:

A función que temos que maximizar é: $\overset{\substack{\text{Perímetro do} \\ \text{rectángulo}=100\text{m} \\ y=50-x}}{\text{Área}_{\text{rectángulo}}} = xy = x(50 - x) = 50x - x^2 \quad x \in (0, 50)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, 50)$ $x \in (0, 50)$ (x : unha das dimensións do rectángulo de perímetro 100).

$$A'(x) = 50 - 2x$$

$$A'(x) = 50 - 2x = 0 \Rightarrow 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ PUNTO SINGULAR}$$

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $A''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $A''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(25) = -2 < 0 \Rightarrow x = 25 \text{ é o único máximo relativo.}$$

Para saber se é o máximo absoluto, calculamos a súa i max e a i max e dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} A(25) = 625 \\ A(0) = 0 \\ A(50) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 25 \text{ (Entón } y = 50 - 25 = 25) \text{ está o máximo absoluto da función.}$$

O rectángulo de perímetro 100m que ten área máxima é o que ten dimensións 25×25 (resultou ser o cadrado).

$$A_{\text{máxima}} = 25 \times 25 = 625 \text{ m}^2.$$

Exemplo:

Dispoñemos dunha cerca de 100 m de lonxitude. Queremos delimitar a máxima área posible. Cales serán as dimensións do rectángulo de área máxima delimitado pola cerca se un dos lados queda contra un río polo que por ese lado non imos colocar a cerca?

Solución:

Chamámolles x (a que queda contra o río) a unha das dimensións do rectángulo e y a outra.

Como a cerca empregada é 100 m $\Rightarrow x + 2y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - x}{2} = 50 - \frac{x}{2}$

O que queremos é ver que valores de x e y fan máxima a área do rectángulo:

A función que temos que maximizar é: $\text{Área}_{\text{rectángulo}} = xy$ Cerca empregada=100m
 $y=50-\frac{x}{2}$ $= x \left(50 - \frac{x}{2} \right) = 50x - \frac{x^2}{2} \quad x \in (0, 100)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, 100)$ $x \in (0, 100)$ (x : dimensión do rectángulo de perímetro 100 m que só se suma unha vez porque un dos lados do rectángulo queda pegado ao río e non se cerca).

$$A'(x) = 50 - x$$

$$A'(x) = 50 - x = 0 \Rightarrow 50 - x = 0 \Rightarrow x = 50 \text{ PUNTO SINGULAR}$$

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $A''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $A''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$A''(x) = -1 \Rightarrow A''(50) = -1 < 0 \Rightarrow x = 50 \text{ é o único máximo relativo.}$$

Para saber se é o máximo absoluto, calculamos a súa i max e a i max dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} A(25) = 625 \\ A(0) = 0 \\ A(100) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 50 \left(\text{Entón } y = 50 - \frac{50}{2} = 25 \right) \text{ está o máximo absoluto da función.}$$

O rectángulo delimitado cos 100 m e cumprindo as condicións expostas no enunciado do problema que ten área máxima é o que ten dimensións 50×25 .

$$A \text{ Área}_{\text{máxima}} = 50 \times 25 = 1250 \text{ m}^2.$$

Exemplo:

Un arame de 170 cm. de lonxitude divídese en dúas partes. Con unha das partes quérese formar un cadrado e coa outra un rectángulo de xeito que a base mida o dobre da altura. Calcula as lonxitudes das partes nas que se ten que dividir o arame para que a suma das áreas do cadrado e do rectángulo sexa mínima.

Solución:

Se lle chamamos x a parte do arame para facer o cadrado, a parte coa que faremos o rectángulo é $170 - x$

x é o perímetro do cadrado, polo tanto a lado do cadrado é $\frac{x}{4}$ e a súa superficie: $\left(\frac{x}{4}\right)^2$

O perímetro do rectángulo é $170 - x$. Como a base é o dobre da altura a altura ten que ser $\frac{170 - x}{6}$ e a base

$\frac{170 - x}{3}$. A superficie do rectángulo é: $\frac{170 - x}{6} \cdot \frac{170 - x}{3}$.

A función a optimizar é:

$$f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{170 - x}{6} \cdot \frac{170 - x}{3} = \frac{x^2}{16} + \frac{(170 - x)^2}{18}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{16} - \frac{2(170 - x)}{18}$$

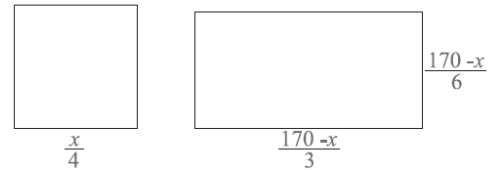
$$\frac{2x}{16} - \frac{2(170 - x)}{18} = 0 \Rightarrow x = 80$$

$$f''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 0 \quad \forall x \quad \text{en } x=80 \text{ hai un mínimo relativo}$$

que é ademais o mínimo absoluto (basta con substituír en $x=0$ e $x=170$ para comprobar que iso é así).

A suma das áreas é mínima cando $x=80$ e a área mínima é 850 cm^2 $D=(0,170)$

Debemos dividir o arame en 80 cm para o cadrado e 90 cm para o rectángulo.



PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

1.- O custo total (en dólares) de fabricación de q unidades de certo artigo $C(q)=3q^2+5q+75$
 O custo medio por unidade é: $M(q)=\frac{C(q)}{q}$

- Cantas unidades se deben fabricar para que o custo medio por unidade sexa mínimo?
- Calcula $C(q)$ e $M(q)$ para o valor de q que indicaches na epígrafe a).

2.- A función $f(x)=\frac{60x}{x^2+9}$ indica os beneficios obtidos por unha empresa desde que comezou a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en anos).

- Representaa graficamente.
- Ao cabo de canto tempo obtén a empresa o beneficio máximo? Cal é ese beneficio?
- Perderá diñeiro a empresa nalgún momento?

3.- Descompoñer o número 16 en dous sumandos positivos tales que o seu produto sexa máximo.

4.- Observouse que nunha carreteira de saída dunha grande cidade a velocidade dos coches entre as 2 horas e as 6 horas da tarde vén dada por: $v(t)=t^3-15t^2+72t+18$ para $t \in [2,6]$.
 ¿A que hora circulan os coches a maior velocidade? ¿A que hora ca menor velocidade? Xustifica a resposta.

5.- Dispónse dunha barra de ferro de 10 m para construír unha portería, de maneira que a portería teña a máxima superficie interior posible. Que lonxitude deben ter os postes e o larguero? Que superficie máxima interior ten a portería?

6.- Descompoñer o número 81 en dous sumandos de maneira que o produto do primeiro sumando polo cadrado do segundo sexa máximo.

7.- A concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, nunha cidade vén dada pola función $C(x)=90+15x-0,6x^2$, onde x é o tempo transcurrido dende o 1 de xaneiro de 1990 contado en anos. Ata que ano vai crecer a concentración de ozono? Cal vai ser esa concentración máxima?

8.- Os beneficios dunha empresa, expresados en centos de milleiros de euros, cando transcurren t anos, veñen dados pola función: $f(t)=\frac{75t}{t^2+100}$ ¿Cales son os seus máximos beneficios e cando se producen?

9.- Los costes de fabricación, $C(x)$ en euros, de cierta variedad de salchichas, dependen de la cantidad elaborada (x en kilos) de acuerdo con la siguiente expresión: $C(x)=10+2x$.
 El fabricante estima que el precio de venta en euros de cada kilogramo de salchichas viene dado por: $P(x)=20-\frac{6x^2}{800}$.

Obtener la función de ganancias ¿Qué cantidad de salchichas interesa producir para maximizar ganancias? Calcular en este caso, el precio de venta y la ganancia que se obtiene.

10.- Determinar la mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.

11.- La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Hallar los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

12.- Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?

13.- Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

14.- Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 metros. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.