

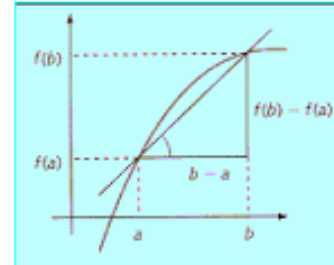
INICIACIÓN AO CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIÓNES.

CRECIMENTO DUNHA FUNCIÓN NUN DUN INTERVALO. TAXA DE VARIACIÓN MEDIA.

Chámase **taxa de variación media (TMV)** dunha función $y=f(x)$ nun intervalo $[a, b]$, ao cociente:

$$TVM[a, b] = \frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A TVM de $f(x)$ en $[a, b]$, é a pendente do segmento que une os puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Si el eje X se representase el tiempo y en el Y la distancia recorrida, la TVM $[a, b]$, sería la velocidad media entre $x=a$ y $x=b$.

Exemplo.-

Calcula T.V.M. de $f(x)=5x-x^2$ en $[1,2]$ e $[1,4]$.

Resolución:

$$TVM[1,2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 4}{1} = 2 = \text{pendente da recta que une } (1, f(1)) \text{ e } (2, f(2))$$

$$TVM[1,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(5 \cdot 4 - 4^2) - (5 \cdot 1 - 1^2)}{3} = \frac{4 - 4}{3} = 0 = \text{pendente da recta que une } (1, f(1)) \text{ e } (4, f(4))$$

Se lle chamamos h a lonxitude do intervalo $[a, b]$, podemos expresalo da forma $[a, a+h]$, e a TVM quedaría na forma:

$$T.V.M.[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$TVM[1, 1+h] = \frac{f(1+h) - f(1)}{2-1} = \frac{[5(1+h) - (1+h)^2] - 4}{1} = \frac{5+5h-1-h^2-2h-4}{h} = \frac{-h^2+3h}{h} = 3-h$$

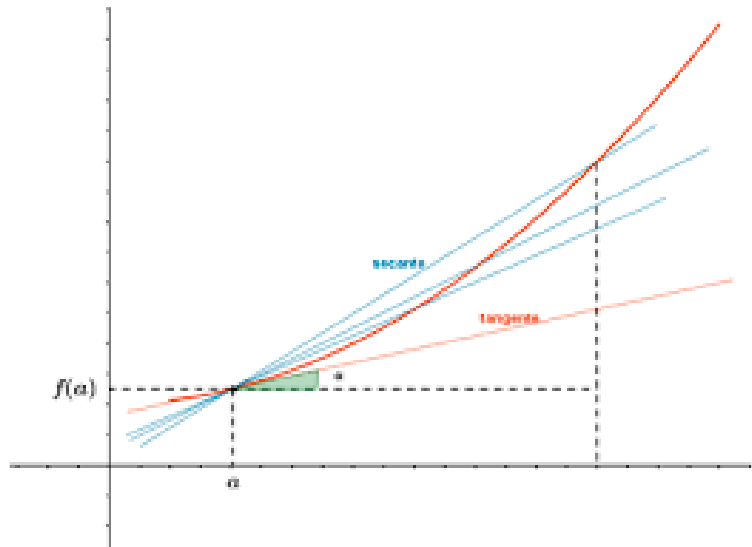
$$\text{Se } h=1 \rightarrow T.V.M.[1,2] = 3-1=2$$

$$\text{Se } h=3 \rightarrow T.V.M.[1,4] = 3-3=0$$

A TVM de $f(x)$ nun intervalo $[a, b]$, mide o crecemento medio da función no intervalo. Se a función é crecente en $[a, b]$ a súa taxa de variación é positiva; e se é decrecente negativa.

DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO. MEDIDA DA VARIACIÓN INSTANTÁNEA DUNHA MAGNITUDE CON RESPECTO A OUTRA.

O crecemento dunha función nun punto vén dado, de xeito natural, polo crecemento (pendente) da recta tanxente a curva nese punto.



$$\text{CRECIMENTO PUNTUAL DE } f \text{ EN } a = \lim_{x \rightarrow a} \text{TVM} [a, x] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou, o que é o mesmo,}$$

$$\text{CRECIMENTO PUNTUAL DE } f \text{ EN } a = \lim_{h \rightarrow 0} \text{TVM} [a, a+h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A este valor, se existe, chámase **derivada de $f(x)$ en $x=a$** e se designa por $f'(a)$. Se existe, dise que **f é derivable en $x=a$** .

A derivada dunha función $y=f(x)$ no punto $x=a$ é o límite:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

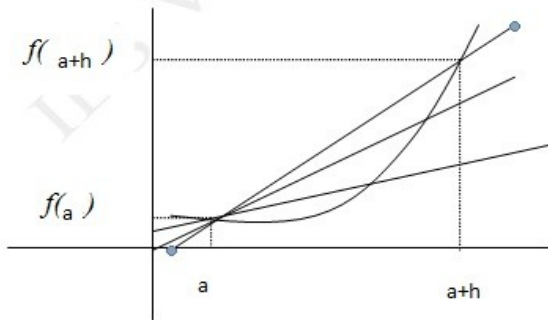
Exemplo:

Calcula a derivada da función $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en $x=4$, utilizando a definición da derivada.

Resolución:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(4+h)^2 - 6(4+h) + 11] - [4^2 - 24 + 11]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + 8h + h^2 - 24 - 6h + 11 - 16 + 24 - 11}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h'(h+2)}{h'} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DA DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO



Calquera recta secante a gráfica de $f(x)$ que pase por a ten por pendente:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Canto máis pequeno sexa o valor de h (cando h tende a cero), o punto $a+h$ máis cerca está de a e a recta secante achégase á recta tanxente en $x=a$ sendo a súa pendente:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente da curva nese punto.

ECUACIÓN DA RECTA TANXENTE A UNHA FUNCIÓN NUN PUNTO $x=x_0$.

Dado que a derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente á gráfica da función nese punto $m = \text{pendente recta tanxente en } x_0 = f'(x_0)$.

Utilizando a ecuación punto-pendente da recta, a recta tanxente a $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ é a recta de ecuación :

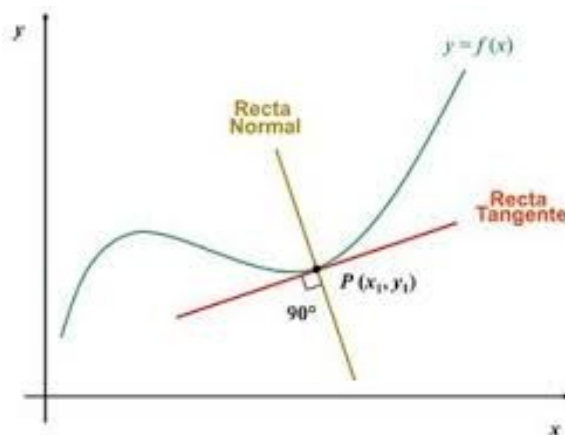
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ECUACIÓN DA RECTA NORMAL A UNHA FUNCIÓN NUN PUNTO $x=x_0$.

A recta normal en $x=x_0$ é a recta perpendicular á recta tanxente en $x=x_0$.

Por ser perpendicular, $m = \text{pendente recta normal en } x_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}$. Utilizando a ecuación da recta en forma punto pendiente, a ecuación da recta normal en $(x_0, f(x_0))$, é:

$$y = f(x_0) + \left(\frac{-1}{f'(x_0)} \right) (x - x_0)$$



Exemplo: Escribe a ecuación da recta tanxente e da recta normal á curva $f(x)=x^2-6x+11$ para $x=4$.

Resolución:

Calculamos o punto $P(4, f(4)) = (4, 3)$ pq $f(4) = 16 - 24 + 11 = 3$

Recta tanxente en $x=4$.

$$y = f(4) + f'(4)(x-4) \quad \text{Como } f'(x) = 2x - 6 \text{ entón } f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$y = 3 + 2(x-4) \quad y = 2x - 5$$

Recta normal en $x=4$.

$$y = f(4) - \frac{1}{f'(4)}(x-4) \quad \text{Como } f'(x) = 2x - 6 \text{ entón } f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}(x-4) \quad y = -\frac{x}{2} + 5$$

FUNCIÓN DERIVADA DOUTRA FUNCIÓN

Chámase **función derivada de** $f(x)$, a función que asocia a cada abscisa x , a derivada de f nese punto, $f'(x)$, é dicir a pendente da curva $y=f(x)$ en x . A derivada de f chamarémola f' ou Df e a súa expresión ven dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplo.- Determina a derivada da función $f(x)=5x-x^2$ e comproba que, a partir de ela, se poden obter os valores concretos determinados no exercicio 10.

Resolución.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h) - (x+h)^2] - [5x - x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{5x} + 5h - \cancel{x^2} - 2xh - h^2 - \cancel{5x} + \cancel{x^2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h - 2xh - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(5 - 2x - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 - 2x - h) = 5 - 2x \\ f'(4) &= 5 - 2 \cdot 4 = -3 \\ f'(5) &= 5 - 2 \cdot 5 = -5 \end{aligned}$$

REGRAS PARA OBTENIR AS DERIVADAS DALGUNHAS FUNCIÓNS.-

DERIVADA DUN NÚMERO POR UNHA FUNCIÓN	$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x) \quad k \in \mathbb{R}$
DERIVADA DA SUMA OU DIFERENCIA DE FUNCIÓNS	$D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
DERIVADA DO PRODUTO DE FUNCIÓNS	$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
DERIVADA DO COCIENTE DE FUNCIÓNS	$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
DERIVADA DA COMPOSICIÓN DE FUNCIÓNS	$D[(g \circ f)(x)] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

POTENCIA

$$D(x^n) = n \cdot x^{n-1} \qquad D[(f(x))^n] = n \cdot f(x) \cdot f'(x)$$

EXPONENCIAIS

$$\begin{aligned} D(e^x) &= e^x & D[e^{f(x)}] &= f'(x) \cdot e^{f(x)} \\ D(a^x) &= a^x \cdot \ln a & D[a^{f(x)}] &= a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x) \end{aligned}$$

LOGARÍTMICAS

$$\begin{aligned} D(\ln x) &= \frac{1}{x} & D[\ln f(x)] &= \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \\ D(\log_a x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} & D[\log_a f(x)] &= \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a} \end{aligned}$$

TRIGONOMÉTRICAS

$$\begin{aligned} D(\operatorname{sen} x) &= \cos x & D[\operatorname{sen} f(x)] &= f'(x) \cdot \cos f(x) \\ D(\cos x) &= -\operatorname{sen} x & D[\cos f(x)] &= -f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) \\ D(\tan x) &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x & D(\tan f(x)) &= \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x) [1 + \tan^2 f(x)] \end{aligned}$$

FUNCIÓNS ARCO

$$\begin{aligned} D(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & D(\operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x)) &= \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \\ D(\operatorname{arccos} x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & D(\operatorname{arccos} f(x)) &= \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \\ D(\operatorname{arc} \tan x) &= \frac{1}{1+x^2} & D(\operatorname{arctan} f(x)) &= \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} \end{aligned}$$

APLICACIÓNS DAS DERIVADAS.-**CÁLCULO DA RECTA TANXENTE E DA RECTA NORMAL NUN PUNTO A UNHA FUNCIÓN (A RECTA NORMAL NUN PUNTO É A RECTA PERPENDICULAR Á RECTA TANXENTE NESE NUN PUNTO).****Exemplo:**

Escribe a ecuación da recta tanxente a cada unha das seguintes funcións nos puntos que se indica:

a) $f(x) = xe^x$ en $x=0$

b) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $x = 0$ e $x = \ln 4$

Resolución:

a) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x) \cdot e^x$

$f(0) = 0$ $f'(0) = (1+0) \cdot e^0 = 1$ A ecuación da recta tanxente é $y = x$

b) $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Facemos primeiro a recta tanxente en $x = 0$

$f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $f'(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$

A ecuación da recta tanxente neste caso é:

$y - 1 = 0$ ou sexa $y = 1$

Imos achar agora a ecuación da recta tanxente en $x = \ln 4$

$f(\ln 4) = \frac{e^{\ln 4} + e^{-\ln 4}}{2} = \frac{e^{\ln 4} + \frac{1}{e^{\ln 4}}}{2} \stackrel{e^{\ln x} = x}{=} \frac{4 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{17}{8}$; de xeito análogo $f'(\ln 4) = \frac{15}{8}$

e a ecuación da recta tanxente é agora:

$y - \frac{17}{8} = \frac{15}{8} \cdot (x - \ln 4)$

CÁLCULO DOS INTERVALOS DE CRECEMENTO E DE DECRECEMENTO DUNHA FUNCIÓN E DOS EXTREMOS RELATIVOS.

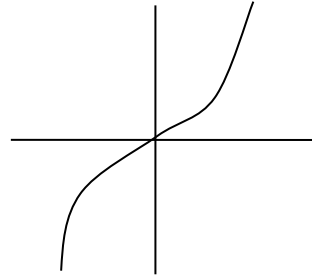
.-

TEOREMA: (CONDICIÓN NECESARIA PERO NON SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS)

Se $f(x)$ é derivable en $x_0 \in (a, b)$ e $f(x)$ ten un extremo relativo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Este teorema dámos unha condición necesaria para que unha función teña máximo ou mínimo relativo nun punto, pero non suficiente, como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo: A función $f(x)=x^3$ en $x=0$ non ten extremo relativo, segundo podes ver na gráfica adxunta. Nembargantes a súa derivada en $x=0$ é cero, como xa sabes $f'(x)=3x^2$, $f'(0) = 0$.



Os puntos x_0 que cumpren que $f'(x_0)=0$, chámanse puntos críticos ou singulares de f e son POSIBLES EXTREMOS RELATIVOS.

TEOREMA:

$f(x)$ é derivable nun punto $x_0 \in (a, b)$.

Entón, cúmprese que:

Se $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ é crecente en x_0

Se $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ é decrecente en x_0

CONSECUENCIA:

Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ é crecente en (a, b)

Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ é decrecente en (a, b)

TEOREMA: (CONDICIÓN SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS)

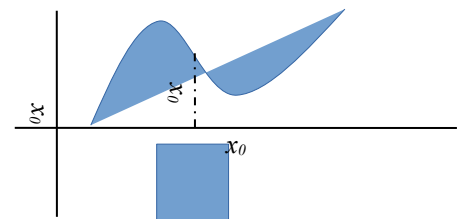
$f(x)$ admite derivada segunda nun punto $x_0 \in (a, b)$. Entón:

Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ ten un mínimo relativo en x_0

Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ ten un máximo relativo en x_0

CÁLCULO DOS INTERVALOS DE CONCAVIDADE E CONVEXIDADE DUNHA FUNCIÓN E DOS PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Diremos que unha función $f(x)$ derivable en x_0 , é **cóncava** en x_0 , se a recta tanxente a $f(x)$ en x_0 está situada por riba da gráfica nun entorno de x_0 .



Diremos que unha función $f(x)$ derivable en x_0 , é **convexa** en x_0 , se a recta tanxente a $f(x)$ en x_0 está situada por debaixo da gráfica nun entorno de x_0 .

Un punto x_0 dunha función $f(x)$ no que a función é derivable, é un **punto de inflexión**, se a función cambia en el de cóncava a convexa ou viceversa.

Una función é cóncava ou convexa nun intervalo, se é cóncava ou convexa, respectivamente, en tódolos puntos do intervalo.

TEOREMA:

Se $f(x)$ admite derivada segunda en $x_0 \in (a, b)$.

Cúmrese que :

Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ é convexa en x_0

Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ é cóncava en x_0

TEOREMA: (CONDICIÓN NECESARIA PERO NON SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DUN PUNTO DE INFLEXIÓN)

Se $f(x)$ admite derivada segunda en $x_0 \in (a, b)$.

Cúmrese que :

Se f ten un punto de inflexión en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

O recíproco non é certo.

TEOREMA: (CONDICIÓN SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DUN PUNTO DE INFLEXIÓN)

Se $f(x)$ admite derivada segunda e terceira en $x_0 \in (a, b)$.

Cúmrese que :

Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ é un punto de inflexión

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINÓMICAS E RACIONAIS.

Construír a curva que representa graficamente a función $y = f(x)$, consiste en determinar as propiedades características da mesma e os seus elementos notables, de xeito que aínda non coñecendo tódolos seus puntos, podamos debuxar a súa gráfica. Temos que estudar os seguintes aspectos:

Dominio: Conxunto de valores da x para os que y toma valores reais

- As funcións polinómicas teñen por dominio tódolos números reais.
- As funcións racionais están definidas en todo $\mathbb{R}$ excepto nos valores que fan o denominador igual a cero.

Cortes cos eixos: Son os puntos nos que a gráfica corta aos eixos coordenados.

- Cortes co eixo X : Basta facer $y = 0$ e obter os valores da x correspondentes. Estes puntos son por tanto da forma $(x, 0)$.
- Corte co eixo Y : Basta facer $x = 0$ e obter o valor correspondente da y que, neste caso, **se existe é único**. O punto será da forma $(0, y)$.

Simetrías:



Se $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ impar $\Rightarrow$ A gráfica de $f(x)$ é simétrica respecto a orixe de coordenadas $(0,0)$. Por ex. $f(x) = x^3$

Se $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ par $\Rightarrow$ A gráfica de $f(x)$ é simétrica respecto ao eixo Y
Por ex. $f(x) = x^2$

Asíntotas: Son rectas ás que a gráfica da función se achega cada vez máis, cando x ou y tenden a $\pm\infty$, pero non chega a tocalas. Segundo a súa posición con respecto a os eixos coordenados se clasifican en horizontais, verticais e oblicuas.

As función **polinómicas** non teñen asíntotas, pero si RAMAS PARABÓLICAS. Hai que estudar para elas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ que será } +\infty \text{ ou } -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ que será } +\infty \text{ ou } -\infty$$

As función **racionais** poden ter:

Asíntotas horizontais: A súa ecuación é, da forma $y=n$ onde $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

Asíntotas verticais: A súa ecuación é da forma $x=k$ onde k é calquera valor da x que cumpra que:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas oblicuas: A súa ecuación é da forma $y=mx+n$.

Para que unha función teña asíntota oblicua o grao do numerador ten que ser unha unidade máis co do denominador. Para calcular a ecuación da asíntota tes que dividir o numerador entre o denominador. O cociente é a ecuación da asíntota oblicua.

Monotonía: É o estudo dos intervalos de crecemento e decrecemento dunha función.

Calculamos a primeira derivada e estudamos o seu signo. Nos intervalos nos que a derivada é positiva a función é crecente e nos que a derivada é negativa, é decrecente.

Extremos relativos: É o estudo dos máximos e mínimos relativos dunha función.

Os extremos relativos, se existen, están entre os puntos singulares da función, é dicir, os puntos nos que a primeira derivada é cero. Se a función pasa de crecente a decrecente no punto, hai un máximo; se pasa de decrecente a crecente, hai un mínimo, e se non hai cambio de monotonía, non hai extremo.

Curvatura: É o estudo dos intervalos de concavidade e convexidade da función
Sabemos que a condición suficiente para que unha función sexa convexa ou cóncava é que a súa segunda derivada sexa, respectivamente, maior ou menor que cero. Debemos calcular polo tanto a segunda derivada e estudar o seu signo.

Puntos de inflexión: Son, como xa estudamos no tema anterior, os puntos onde a función cambia de convexa a cóncava ou de cóncava a convexa.

Sabemos que a condición necesaria para que unha función teña un punto de inflexión é que a súa segunda derivada sexa cero. Estudaremos polo tanto os valores que anulan a segunda derivada. Este estudo xunto co estudo da curvatura, vainos indicar onde a función ten os puntos de inflexión.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

Con moita frecuencia aparecen problemas físicos, xeométricos, económicos, biolóxicos..., nos que se trata de **OPTIMIZAR unha función** (CALCULAR O MÁXIMO OU O MÍNIMO DUNHA FUNCIÓN) (facer máximo un volume, uns beneficios, unha poboación,; facer mínimos uns custos ou unha área...). A dificultade destes problemas normalmente non estriba en optimizar unha función coñecida, senón en atopar a expresión analítica da función que temos que optimizar.

Nos problemas de optimización, o que interesa non son os **extremos** relativos da función senón os **absolutos**.

Se $f(x)$ é derivable en (a,b) , os MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS están:

- **NOS PUNTOS SINGULARES** (os puntos x que verifican que $f'(x)=0$)
- **NOS PUNTOS CORRESPONDENTES AOS EXTREMOS DO INTERVALO.**

Por tanto, para determinalos:

- **Resólvese $f'(x)=0$.**
- **Selecciónanse as raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ que están entre a e b (puntos singulares).**
- **Calcúlase $f(x_1), f(x_2), f(x_n), f(a), f(b)$ para saber cal deles é o máximo e cal o mínimo absoluto.**

Tamén se pode recurrir a este teorema para saber se os puntos singulares son máximos ou mínimos relativos ou nin máximos nin mínimos relativos.

Teorema:

Sexa $f(x)$ unha función con derivada segunda en un punto $x_0 \in (a, b)$, cúmprese que:

- Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x)$ ten un mínimo relativo en x_0
- Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x)$ ten un máximo relativo en x_0

Exemplo:

Dispoñemos dunha cerca de 100 m de lonxitude. Queremos delimitar a máxima área posible. Cales serán as dimensións do rectángulo de área máxima delimitado pola cerca?

Solución:

Chamámoslle x a unha das dimensións do rectángulo e y a outra.

Como o perímetro do rectángulo é 100 m $\Rightarrow 2x + 2y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

O que queremos é ver que valores de x e y fan máxima a área do rectángulo:

A función que temos que maximizar é: $\overset{\substack{\text{Perímetro do} \\ \text{rectángulo} = 100\text{m} \\ y = 50 - x}}{\text{Área}_{\text{rectángulo}}} = xy = x(50 - x) = 50x - x^2 \quad x \in (0, 50)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, 50)$ $x \in (0, 50)$ (x : unha das dimensións do rectángulo de perímetro 100).

$$A'(x) = 50 - 2x$$

$$A'(x) = 50 - 2x = 0 \Rightarrow 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ PUNTO SINGULAR}$$

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $A''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $A''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(25) = -2 < 0 \Rightarrow x = 25 \text{ é o único máximo relativo.}$$

Para saber se é o máximo absoluto, calculamos a súa i max e a i max e dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} A(25) = 625 \\ A(0) = 0 \\ A(50) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 25 \text{ (Entón } y = 50 - 25 = 25 \text{) está o máximo absoluto da función.}$$

O rectángulo de perímetro 100m que ten área máxima é o que ten dimensións 25×25 (resultou ser o cadrado).

$$A_{\text{máx. máx}} = 25 \times 25 = 625 \text{ m}^2.$$

Exemplo:

Dispoñemos dunha cerca de 100 m de lonxitude. Queremos delimitar a máxima área posible. Cales serán as dimensións do rectángulo de área máxima delimitado pola cerca se un dos lados queda contra un río polo que por ese lado non imos colocar a cerca?

Solución:

Chamámolles x (a que queda contra o río) a unha das dimensións do rectángulo e y a outra.

Como a cerca empregada é 100 m $\Rightarrow x + 2y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - x}{2} = 50 - \frac{x}{2}$

O que queremos é ver que valores de x e y fan máxima a área do rectángulo:

A función que temos que maximizar é: $\text{Área}_{\text{rectángulo}} = xy$ Cerca empregada = 100 m
 $y = 50 - \frac{x}{2}$ $= x \left(50 - \frac{x}{2} \right) = 50x - \frac{x^2}{2} \quad x \in (0, 100)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, 100)$ $x \in (0, 100)$ (x : dimensión do rectángulo de perímetro 100 m que só se suma unha vez porque un dos lados do rectángulo queda pegado ao río e non se cerca).

$$A'(x) = 50 - x$$

$$A'(x) = 50 - x = 0 \Rightarrow 50 - x = 0 \Rightarrow x = 50 \text{ PUNTO SINGULAR}$$

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $A''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $A''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$A''(x) = -1 \Rightarrow A''(50) = -1 < 0 \Rightarrow x = 50 \text{ é o único máximo relativo.}$$

Para saber se é o máximo absoluto, calculamos a súa i max e a i min dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} A(25) = 625 \\ A(0) = 0 \\ A(100) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 50 \left(\text{Entón } y = 50 - \frac{50}{2} = 25 \right) \text{ está o máximo absoluto da función.}$$

O rectángulo delimitado cos 100 m e cumprindo as condicións expostas no enunciado do problema que ten área máxima é o que ten dimensións 50×25 .

$$A_{\text{máxima}} = 50 \times 25 = 1250 \text{ m}^2.$$

Exemplo:

Un arame de 170 cm. de lonxitude divídese en dúas partes. Con unha das partes quérese formar un cadrado e coa outra un rectángulo de xeito que a base mida o dobre da altura. Calcula as lonxitudes das partes nas que se ten que dividir o arame para que a suma das áreas do cadrado e do rectángulo sexa mínima.

Solución:

Se lle chamamos x a parte do arame para facer o cadrado, a parte coa que faremos o rectángulo é $170 - x$

x é o perímetro do cadrado, polo tanto a lado do cadrado é $\frac{x}{4}$ e a súa superficie: $\left(\frac{x}{4}\right)^2$

O perímetro do rectángulo é $170 - x$. Como a base é o dobre da altura a altura ten que ser $\frac{170 - x}{6}$ e a base

$\frac{170 - x}{3}$. A superficie do rectángulo é: $\frac{170 - x}{6} \cdot \frac{170 - x}{3}$.

A función a optimizar é:

$$f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{170 - x}{6} \cdot \frac{170 - x}{3} = \frac{x^2}{16} + \frac{(170 - x)^2}{18}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{16} - \frac{2(170 - x)}{18}$$

$$\frac{2x}{16} - \frac{2(170 - x)}{18} = 0 \implies x = 80$$

$$f''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 0 \forall x \text{ en } x=80 \text{ hai un mínimo relativo}$$

que é ademais o mínimo absoluto (basta con substituír en $x=0$ e $x=170$ para comprobar que iso é así).

A suma das áreas é mínima cando $x=80$ e a área mínima é 850 cm^2 D=(0,170)

Debemos dividir o arame en 80 cm para o cadrado e 90 cm para o rectángulo.

