

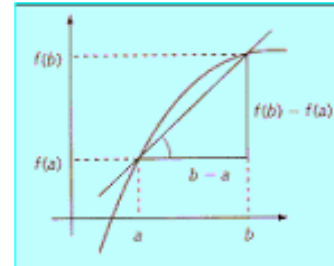
INICIACIÓN AO CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIÓNES.

CRECEMENTO DUNHA FUNCIÓN NUN DUN INTERVALO. TAXA DE VARIACIÓN MEDIA.

Chámase **taxa de variación media (TMV)** dunha función $y=f(x)$ nun intervalo $[a, b]$, ao cociente:

$$TVM[a, b] = \frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A TVM de $f(x)$ en $[a, b]$, é a pendente do segmento que une os puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Si el eje X se representase el tiempo y en el Y la distancia recorrida, la TVM $[a, b]$, sería la velocidad media entre $x=a$ y $x=b$.

Exemplo.-

Calcula T.V.M. de $f(x)=5x-x^2$ en $[1, 2]$ e $[1, 4]$.

Resolución:

$$TVM[1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 4}{1} = 2 = \text{pendente da recta que une } (1, f(1)) \text{ e } (2, f(2))$$

$$TVM[1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(5 \cdot 4 - 4^2) - (5 \cdot 1 - 1^2)}{3} = \frac{4 - 4}{3} = 0 = \text{pendente da recta que une } (1, f(1)) \text{ e } (4, f(4))$$

Se lle chamamos h a lonxitude do intervalo $[a, b]$, podemos expresalo da forma $[a, a+h]$, e a TVM quedaría na forma:

$$T.V.M.[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$TVM[1, 1+h] = \frac{f(1+h) - f(1)}{2 - 1} = \frac{[5(1+h) - (1+h)^2] - 4}{1} = \frac{5 + 5h - 1 - h^2 - 2h - 4}{h} = \frac{-h^2 + 3h}{h} = 3 - h$$

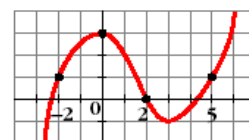
$$\text{Se } h=1 \rightarrow T.V.M.[1, 2] = 3 - 1 = 2$$

$$\text{Se } h=3 \rightarrow T.V.M.[1, 4] = 3 - 3 = 0$$

A TVM de $f(x)$ nun intervalo $[a, b]$, mide o crecemento medio da función no intervalo. Se a función é crecente en $[a, b]$ a súa taxa de variación é positiva; e se é decrecente negativa.

1.- Calcula a taxa de variación media desta función nos intervalos:

- a) $[-2, 0]$ b) $[0, 2]$ c) $[2, 5]$



2.- Indica a T.V.M. da función $y = x^2 - 8x + 12$ nos seguintes intervalos $[1, 2]$, $[1, 5]$, $[1, 8]$.

3.- Indica a T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ no intervalo variable $[1, 1 + h]$. Comproba, dándolle a h os valores axeitados, que se obteñen os resultados do exercicio anterior.

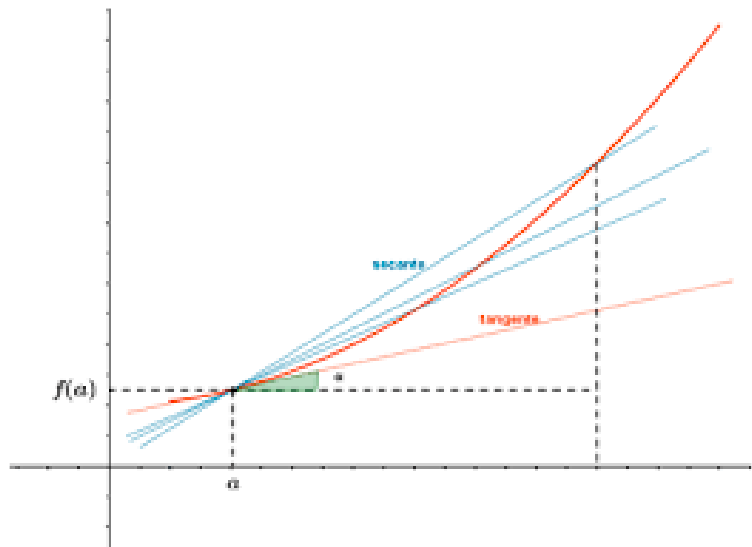
4.- Dada a función $f(x) = x^2 - 1$, indica a taxa de variación media no intervalo $[2, 2 + h]$.

5.- Comproba que a TVM da función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ no intervalo $[1, 1 + h]$ é igual a $-h + 3$. Calcula a TVM desa función nos intervalos $[1, 2]$ e $[1; 1,5]$, utilizando a expresión anterior.

6.- Compara a TVM da función $f(x) = x^3$ e $f(x) = e^x$ nos intervalos $[2, 3]$ e $[3, 4]$, e di cal das dúas crece máis en cada intervalo.

DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO. MEDIDA DA VARIACIÓN INSTANTÁNEA DUNHA MAGNITUDE CON RESPECTO A OUTRA.

O crecemento dunha función nun punto vén dado, de xeito natural, polo crecemento (pendente) da recta tanxente a curva nese punto.



$$\text{CRECIMENTO PUNTUAL DE } f \text{ EN } a = \lim_{x \rightarrow a} \text{TVM}[a, x] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou, o que é o mesmo,}$$

$$\text{CRECIMENTO PUNTUAL DE } f \text{ EN } a = \lim_{h \rightarrow 0} \text{TVM}[a, a + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

A este valor, se existe, chámase derivada de $f(x)$ en $x=a$ e se designa por $f'(a)$.

Se existe, dise que f é derivable en $x=a$.

A derivada dunha función $y=f(x)$ no punto $x=a$ é o límite:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

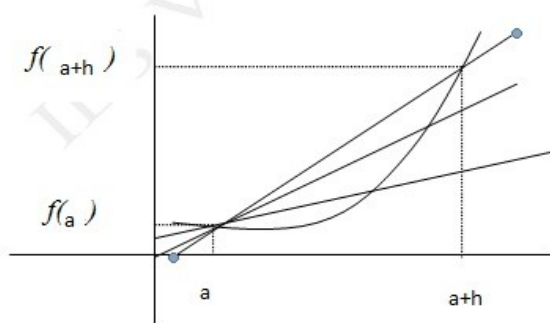
Exemplo:

Calcula a derivada da función $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en $x=4$, utilizando a definición da derivada.

Resolución:

$$\begin{aligned}
 f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(4+h)^2 - 6(4+h) + 11] - [4^2 - 24 + 11]}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{16} + 8h + h^2 - \cancel{24} - 6h + \cancel{11} - \cancel{16} + \cancel{24} - \cancel{11}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \\
 &= \left[\frac{0}{0} \right] = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h'(h+2)}{h'} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2
 \end{aligned}$$

INTERPRETACIÓN XEOMÉTRICA DA DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO



Calquera recta secante a gráfica de $f(x)$ que pase por a ten por pendente:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Canto máis pequeno sexa o valor de h (cando h tende a cero), o punto $a+h$ máis cerca está de a e a recta secante achégase á recta tanxente en $x=a$ sendo a súa pendente:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente da curva nese punto.

ECUACIÓN DA RECTA TANXENTE A UNHA FUNCIÓN NUN PUNTO $x=x_0$.

Dado que a derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente á gráfica da función nese punto $m = \text{pendente recta tanxente en } x_0 = f'(x_0)$.

Utilizando a ecuación punto-pendente da recta, a recta tanxente a $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ é a recta de ecuación:

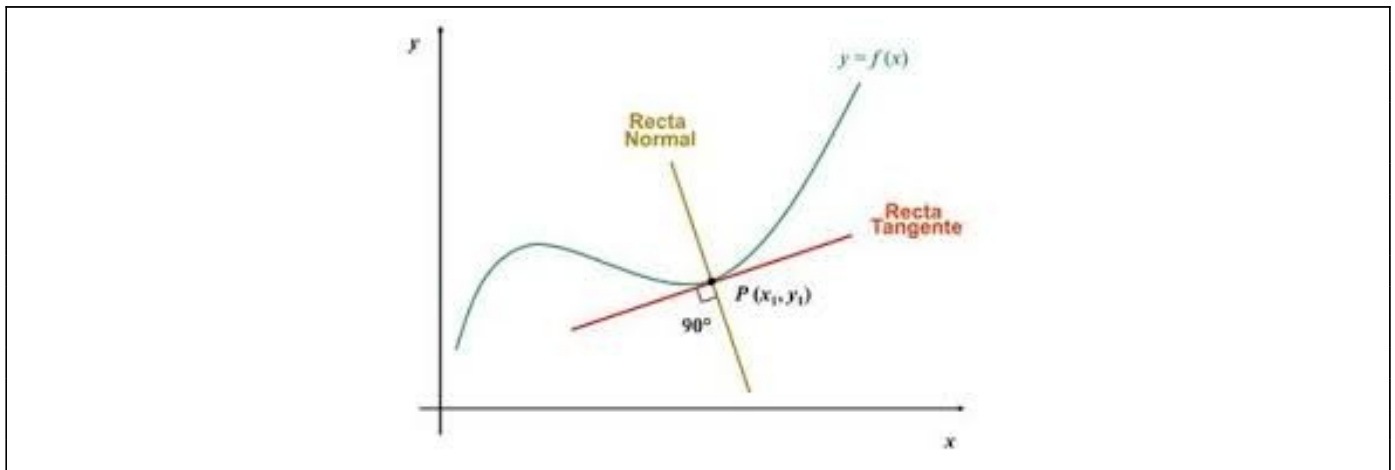
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ECUACIÓN DA RECTA NORMAL A UNHA FUNCIÓN NUN PUNTO $x=x_0$.

A recta normal en $x=x_0$ é a recta perpendicular á recta tanxente en $x=x_0$.

Por ser perpendicular, $m = \text{pendente recta normal en } x_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}$. Utilizando a ecuación da recta en forma punto-pendente, a ecuación da recta normal en $(x_0, f(x_0))$, é:

$$y = f(x_0) + \left(\frac{-1}{f'(x_0)} \right) (x - x_0)$$



Exemplo: Escribe a ecuación da recta tanxente e da recta normal á curva $f(x) = x^2 - 6x + 11$ para $x=4$.

Resolución:

Calculamos o punto $P(4, f(4)) = (4, 3)$ pq $f(4) = 16 - 24 + 11 = 3$

Recta tanxente en $x=4$.

$$y = f(4) + f'(4)(x - 4) \quad \text{Como } f'(x) = 2x - 6 \text{ entón } f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$y = 3 + 2(x - 4) \quad y = 2x - 5$$

Recta normal en $x=4$.

$$y = f(4) - \frac{1}{f'(4)}(x - 4) \quad \text{Como } f'(x) = 2x - 6 \text{ entón } f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}(x - 4) \quad y = -\frac{x}{2} + 5$$

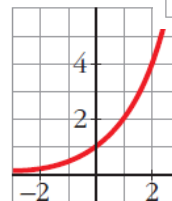
7.- Acha f' nos puntos de abscisa -3, 0 e 4

■ *Determina as pendentes das rectas tanxentes trazadas neses puntos.*

8.- Indica, na gráfica do exercicio anterior, os puntos nos que a derivada é cero. En $x = 1$, a derivada é positiva ou negativa? E en $x = 3$?



9.- Existe algún punto nesta función no que a derivada sexa negativa? Ordena de menor a maior os valores de $f'(-2)$, $f'(2)$ e $f'(0)$.



10.- Determina a derivada de $y = 5x - x^2$ nos puntos de abscisas 4 e 5.

11.- Determina a derivada de $y = \frac{3}{x-2}$ nos puntos de abscisas -1 e 5.

12.- Determina a derivada de $y = \frac{1}{x}$ nos puntos de abscisas -1, e 2.

13.- Aplicando a definición de derivada, calcula $f'(-2)$ e $f'(3)$, onde: $f(x) = \frac{2x-3}{5}$.

14.- Indica a derivada das seguintes funcións en $x = 1$, utilizando a definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x+1)^2$

c) $f'(x) = 3/x$

d) $f'(x) = 1/(x+2)$

15.- Determina a pendente da tanxente á curva $y = x^2 - 5x + 1$ no punto de abscisa $x = -2$, utilizando a definición de derivada e escribe a ecuación da recta tanxente nese punto.

16.- Determina a pendente da tanxente á curva $y = 4x - x^2$ no punto de abscisa $x = 2$, aplicando a definición de derivada, e escribe a ecuación da recta tanxente nese punto.

FUNCIÓN DERIVADA DOUTRA FUNCIÓN

Chámase **función derivada de $f(x)$** , a función que asocia a cada abscisa x , a derivada de f nese punto, $f'(x)$, é dicir a pendente da curva $y = f(x)$ en x . A derivada de f chamarémola f' ou Df e a súa expresión ven dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplo.- Determina a derivada da función $f(x) = 5x - x^2$ e comproba que, a partir de ela, se poden obter os valores concretos determinados no exercicio 10.

Resolución.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h) - (x+h)^2] - [5x - x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{5x} + 5h - \cancel{x^2} - 2xh - h^2 - \cancel{5x} + \cancel{x^2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h - 2xh - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(5 - 2x - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 - 2x - h) = 5 - 2x \end{aligned}$$

$$f'(4) = 5 - 2 \cdot 4 = -3$$

$$f'(5) = 5 - 2 \cdot 5 = -5$$

17.- Calcula a derivada de $f(x) = x^2$.

18.- Calcula a derivada de $f(x) = x^3$.

19.- Comproba, utilizando a definición, que la función derivada en cada caso:

a) $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$

b) $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 14x$

c) $f(x) = x^2 + x \rightarrow f'(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \frac{3}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2}$

REGRAS PARA OBTENIR AS DERIVADAS D'ALGUNHAS FUNCIÓNS.-

DERIVADA DUN NÚMERO POR UNHA FUNCIÓN	$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x) \quad k \in \mathbb{R}$
DERIVADA DA SUMA OU DIFERENCIA DE FUNCIÓNS	$D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
DERIVADA DO PRODUTO DE FUNCIÓNS	$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
DERIVADA DO COCIENTE DE FUNCIÓNS	$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
DERIVADA DA COMPOSICIÓN DE FUNCIÓNS	$D[(g \circ f)(x)] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

POTENCIA

$$D(x^n) = n \cdot x^{n-1} \quad D[(f(x))^n] = n \cdot f(x) \cdot f'(x)$$

EXPONENCIAIS

$$D(e^x) = e^x \quad D[e^{f(x)}] = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$D(a^x) = a^x \cdot \ln a \quad D[a^{f(x)}] = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$$

LOGARÍTMICAS

$$D(\ln x) = \frac{1}{x} \quad D[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$D(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \quad D[\log_a f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$$

TRIGONOMÉTRICAS

$$D(\sin x) = \cos x \quad D[\sin f(x)] = f'(x) \cdot \cos f(x)$$

$$D(\cos x) = -\sin x \quad D[\cos f(x)] = -f'(x) \cdot \sin f(x)$$

$$D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad D(\tan f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x) [1 + \tan^2 f(x)]$$

FUNCIÓNS ARCO

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad D(\arcsin f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$$

$$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad D(\arccos f(x)) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$$

$$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \quad D(\arctan f(x)) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$$

20.- Calcula (UTILIZANDO AS REGRAS DE DERIVACIÓN , XA NON COA DEFINICIÓN DE DERIVADA (sen facer límites)):

$$\begin{aligned} a) f(x) &= 3x^2 - 6x + 5 \\ f'(x) &= \\ f'(1) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f(x) &= \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \\ f'(x) &= \\ f'(2) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) f(x) &= 2x^3 - 3x^2 - 6 \\ f'(x) &= \\ f'(-2) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) f(x) &= \frac{-2}{x^5} \\ f'(x) &= \\ f'(1) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \\ f'(x) &= \\ f'(-1) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) f(x) &= 2 \cdot \sqrt{x} + 5 \cdot \sqrt[3]{x} \\ f'(x) &= \\ f'(1) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) f(x) &= \frac{x}{3} + \sqrt{2} \\ f'(x) &= \\ f'\left(\frac{-17}{3}\right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) f(x) &= \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} \\ f'(x) &= \\ f'(2) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i) f(x) &= \frac{1}{x\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \\ f'(4) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l) f(x) &= \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \\ f'(x) &= \\ f'(-1) &= \end{aligned}$$

21.- Indica a función derivada das seguintes funcións (UTILIZANDO AS REGRAS DE DERIVACIÓN DA SUMA E RESTA DE FUNCIÓNS):

$$a) f(x) = 2e^x - 3 \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$$

$$b) f(x) = \frac{e^x}{5} - \ln x$$

$$c) f(x) = -x^3 + 7x^2 - 3x + \log 5 - \frac{2}{x^2}$$

$$d) f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$e) f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x - \arctan x$$

$$f) f(x) = \operatorname{arcsen} x + 3^x + \log x$$

$$g) f(x) = \sqrt[3]{3x} + \tan x = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \tan x$$

$$h) f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2}$$

22.- Indica a función derivada das seguintes funcións (UTILIZANDO AS REGRAS DE DERIVACIÓN DO PRODUTO E DO COCIENTE DE FUNCIÓNS):

$$a) f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$b) f(x) = \frac{x}{4^x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 1}$$

$$d) f(x) = \operatorname{sen} x \cdot (1 - \cos x)$$

$$e) f(x) = \tan x \cdot (1 + \operatorname{sen} x)$$

$$f) f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$g) f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$h) f(x) = (3x + 2) \cdot \operatorname{sen} x$$

$$i) f(x) = (x + 1) \cdot e^x$$

$$l) f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$$

$$m) f(x) = \frac{1 - e^x}{e^x}$$

$$n) f(x) = (x - 1) \cdot 2^x$$

$$o) f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$$

$$p) f(x) = \frac{x - \ln x}{1 + \ln x}$$

$$q) f(x) = x^2 \cdot \operatorname{arcsen} x$$

$$r) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$s) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$$

$$t) f(x) = \frac{\log x}{x^3}$$

$$u) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x - 2}$$

$$v) f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$$

23.- Indica a función derivada das seguintes funcións (UTILIZANDO A REGRA DE DERIVACIÓN DA COMPOSICIÓN DE FUNCIÓNS. REGRA DA CADEA):

$$a) y = e^{3x-1}$$

$$b) y = \ln(x^2 - 5x + 1)$$

$$c) y = \operatorname{sen}(4x^3 - 5x + 7)$$

$$c) y = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{\frac{2}{3}}$$

$$d) y = \cos(3x - \pi)$$

$$e) y = (x^4 - 3x^3 + 2x^2 + \sqrt{2})^7$$

$$f) y = 2^{\operatorname{sen} x}$$

$$h) y = \sqrt[3]{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$i) y = 3(\operatorname{sen} x - \cos x)^4$$

$$l) y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(x^{-1})$$

$$m) y = (\ln x + e^x)^4$$

$$n) y = \sqrt{x^2 - 4x + 1} = (x^2 - 4x + 1)^{1/2}$$

$$o) y = e^{-x^2 + x}$$

$$p) y = \sqrt{3e^x - \ln x} = (3e^x - \ln x)^{1/2}$$

$$q) y = \cos(x^3 - 3x^2 + 5x - 1)$$

$$r) y = \log\left(3x^4 - \frac{2}{x}\right)$$

$$s) y = \ln(\ln x)$$

$$t) y = \cos(\operatorname{sen} x)$$

$$u) y = \tan(2x - 3)$$

$$v) y = \operatorname{arcsen}(-x + 10)$$

$$w) y = \operatorname{sen}^2\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x) y = \operatorname{sen} x^3 = \operatorname{sen}(x^3)$$

$$y) y = \operatorname{sen}^3 x = (\operatorname{sen} x)^3$$

$$z) y = \left(\frac{3x}{2} - 5\right)^4$$

Para as seguintes aplica primeiro as propiedades dos logaritmos e despois deriva !!!

Así as derivadas saen moito máis fácil!!!

$$a') y = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$b') y = \ln\left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right)$$

24.- Acha a función derivada das seguintes funcións.

$$a) y = 3x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[5]{x} + \frac{3}{x^2} + \sqrt{2} + \log 7$$

$$b) y = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$c) y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$d) y = \operatorname{sen}(3x + 1) \cos(3x + 1)$$

$$e) y = \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 + x - 1)^2}$$

$$f) y = \ln(3x) + e^{\sqrt{x}}$$

$$g) y = e^{2x+1} \tan x$$

$$h) y = (x^2 - 1) \ln(x^2 - 1)$$

$$i) y = \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x^2 + 5 \operatorname{sen} x$$

$$j) y = \frac{x^2 - 5x}{(x - 1)^3}$$

$$k) y = 5^{\frac{x^2}{(2x-1)^2}}$$

$$l) y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

$$m) y = \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x}$$

$$n) y = \frac{\log x^2}{x}$$

$$o) y = \arccos e^{-x}$$

$$p) y = (x^2 - 3)^3$$

$$q) y = \arctan \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$r) y = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2$$

$$s) y = \operatorname{arcsen} \sqrt{x} + \frac{7}{\tan x}$$

$$t) y = x e^{2x+1}$$

$$u) y = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$$

$$v) y = x \operatorname{sen}(\pi - x)$$

$$w) y = \frac{2}{(x+3)^3}$$

Aplica as propiedades dos logaritmos e despois deriva!!!

$$x) y = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$y) y = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1}} = \ln \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$z) y = \ln(x e^{-x})$$

$$a') y = \log \frac{(3x-5)^3}{x}$$

$$b') y = \log(\tan x)^2$$

$$c') y = \ln x^x$$

25.- Indica a función derivada destas funcións:

$$a) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$b) y = \frac{x^3 - x^2}{x^2} = x - 1 \text{ se } x \neq 0$$

$$c) y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$d) y = \sqrt[3]{(x+6)^2}$$

$$e) y = \frac{1}{7x+1}$$

$$f) y = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g) y = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$$

$$h) y = \frac{1}{3x} + \frac{x}{3}$$

$$i) y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

$$j) y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$k) y = \frac{x+3}{x-3}$$

$$l) y = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$$

$$m) y = \left(\frac{x}{2} \right)^3 \cdot e^{1-x}$$

$$n) y = \ln 5$$

$$o) y = \log \frac{x^2}{3-x}$$

$$p) y = tg^3 x^2$$

q) $y = \sqrt{\ln x}$

r) $y = \arcsen \frac{x^2}{3}$

s) $y = \arctg(x^2 + 1)$

t) $y = \frac{x^3 - 2x}{(2x - 1)^2}$

u) $y = \frac{\sqrt{\arctan x}}{3}$

v) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

w) $y = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

APLICACIÓNS DAS DERIVADAS.-**CÁLCULO DA RECTA TANXENTE E DA RECTA NORMAL NUN PUNTO A UNHA FUNCIÓN (A RECTA NORMAL NUN PUNTO É A RECTA PERPENDICULAR Á RECTA TANXENTE NESE NUN PUNTO).**Exemplo:

Escrebe a ecuación da recta tanxente a cada unha das seguintes funcións nos puntos que se indica:

a) $f(x) = xe^x$ en $x=0$

b) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $x=0$ e $x=\ln 4$

Resolución:

a) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x) \cdot e^x$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = (1+0) \cdot e^0 = 1$ A ecuación da recta tanxente é $y = x$

b) $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Facemos primeiro a recta tanxente en $x = 0$

$$f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad f'(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

A ecuación da recta tanxente neste caso é:

$$y - 1 = 0 \quad \text{ou sexa} \quad y = 1$$

Imos achar agora a ecuación da recta tanxente en $x = \ln 4$

$$f(\ln 4) = \frac{e^{\ln 4} + e^{-\ln 4}}{2} = \frac{e^{\ln 4} + \frac{1}{e^{\ln 4}}}{2} = \frac{4 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{17}{8}; \quad \text{de xeito análogo} \quad f'(\ln 4) = \frac{15}{8}$$

e a ecuación da recta tanxente é agora:

$$y - \frac{17}{8} = \frac{15}{8} \cdot (x - \ln 4)$$

26.- Indica a ecuación da recta tanxente á curva $y = x^2 - 5x + 6$ no punto de abscisa $x = 2$.

27.- Escrebe a ecuación da recta tanxente a $y = -x^2 + 2x + 5$ no punto de abscisa $x = -1$.

- 28.- Escribe a ecuación da tanxente a $y = x^2 + 4x + 1$, cuxa pendente sexa igual a 2.
- 29.- Indica a ecuación da recta tanxente á curva $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.
- 30.- Escribe as ecuacións das rectas tanxentes á curva $y = x^3 - 3x$ que sexan paralelas á recta $6x - y + 10 = 0$. **A pendente da recta é o coeficiente de x cando y está despexado.**
- 31.- Escribe as ecuacións das rectas tanxentes á función $y = 4 - x^2$ nos puntos de corte co eixe de abscisas.
- 32.- En que puntos a recta tanxente a $y = x^3 - 4x$ ten a pendente igual a 8?
- 33.- Escribe as ecuacións das rectas tanxentes á curva $y = \frac{2x}{x-1}$ que son paralelas á recta $2x + y = 0$.
- 34.- Indica os puntos de tanxente horizontal da función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.
- 35.- En que puntos de $y = 1/x$ a recta tanxente é paralela á bisectriz do segundo cuadrante? Existe algún punto de tanxente horizontal nesa función?
- 36.- A ecuación da recta tanxente a unha función $f(x)$ no punto de abscisa $x = 2$ é $4x - 3y + 1 = 0$. Cal é o valor de $f'(2)$? E o de $f(2)$?
- 37.- Indica unha función de segundo grao se sabes que pasa por $(0, 1)$ e que a pendente da recta tanxente no punto $(2, -1)$ vale 0. **Chámalle á función $f(x) = ax^2 + bx + c$ e ten en conta que $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ e $f'(2) = 0$.**
- 38.- Indica o vértice da parábola $y = x^2 + 6x + 11$ tendo en conta que nese punto a tanxente é horizontal.
- 39.- Determina a parábola $y = ax^2 + bx + c$ que é tanxente á recta $y = 2x - 3$ no punto $A(2, 1)$ e que pasa polo punto $B(5, -2)$.
- 40.- Determina o valor de x para o que as tanxentes ás curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sexan paralelas e escribe as ecuacións desas tanxentes.
- 41.- Indica a , b e c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que a gráfica de f teña tanxente horizontal en $x = -4$ e en $x = 0$ e que pase por $(1, 1)$.

APLICACIÓNES DAS DERIVADAS.-

CÁLCULO DOS INTERVALOS DE CRECEMENTO E DE DECRECEMENTO DUNHA FUNCIÓN E DOS EXTREMOS RELATIVOS.

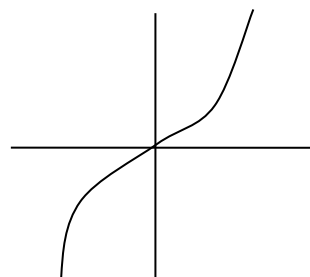
.-

TEOREMA: (CONDICIÓN NECESARIA PERO NON SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS)

Se $f(x)$ é derivable en $x_0 \in (a, b)$ e $f(x)$ ten un extremo relativo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Este teorema dámos unha condición necesaria para que unha función teña máximo ou mínimo relativo nun punto, pero non suficiente, como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo: A función $f(x) = x^3$ en $x=0$ non ten extremo relativo, segundo podes ver na gráfica adxunta. Nembargantes a súa derivada en $x=0$ é cero, como xa sabes $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$.



Os puntos x_0 que cumpren que $f'(x_0)=0$, chámanse puntos críticos ou singulares de f e son POSIBLES EXTREMOS RELATIVOS.

TEOREMA:

$f(x)$ é derivable nun punto $x_0 \in (a, b)$.

Entón, cúmprese que:

Se $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ é crecente en x_0

Se $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ é decrecente en x_0

CONSECUENCIA:

Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ é crecente en (a, b)

Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ é decrecente en (a, b)

TEOREMA: (CONDICIÓN SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS)

$f(x)$ admite derivada segunda nun punto $x_0 \in (a, b)$. Entón:

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ ten un mínimo relativo en x_0

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ ten un máximo relativo en x_0

42.- Comproba que as seguintes funcións non teñen puntos singulares:

a) $y = x^3 + 3x$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \ln x$

43.- Obtén os intervalos de crecemento e de decrecemento de cada unha das seguintes funcións:

a) $y = \frac{3x+1}{2}$

b) $y = 5 - 2x$

c) $y = x^2 - 3x + 2$

d) $y = 2x - x^2$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

f) $y = x^3 - 3x$

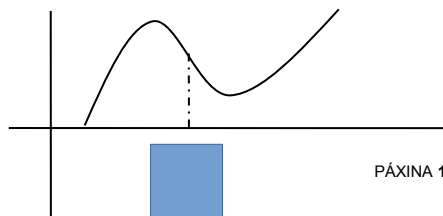
44.- Dada a función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén a súa función derivada e estuda o seu signo. Cales son os intervalos de crecemento e de decrecemento de f ? Ten f máximo ou mínimo relativo?

45.- Se $f'(2) = 0$, cal destas afirmacións é correcta?

- a) A función f ten máximo ou mínimo en $x = 2$.
- b) A tanxente en $x = 2$ é horizontal.
- c) A función pasa polo punto $(2, 0)$

APLICACIÓNES DAS DERIVADAS.-**CÁLCULO DOS INTERVALOS DE CONCAVIDADE E CONVEXIDADE DUNHA FUNCIÓN E DOS PUNTOS DE INFLEXIÓN.**

Diremos que unha función $f(x)$ derivable en x_0 , é **cóncava** en x_0 , se recta tanxente a $f(x)$ en x_0 está situada por riba da gráfica nun entorno de x_0 .



Diremos que unha función $f(x)$ derivable en x_0 , é **convexa** en x_0 , se a recta tanxente a $f(x)$ en x_0 está situada por debaixo da gráfica nun entorno de x_0 .

Un punto x_0 dunha función $f(x)$ no que a función é derivable, é un **punto de inflexión**, se a función cambia en el de cóncava a convexa ou viceversa.

Una función é cóncava ou convexa nun intervalo, se é cóncava ou convexa, respectivamente, en tódolos puntos do intervalo.

TEOREMA:

Se $f(x)$ admite derivada segunda en $x_0 \in (a, b)$.

Cúmprese que :

Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ é convexa en x_0

Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ é cóncava en x_0

TEOREMA: (CONDICIÓN NECESARIA PERO NON SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DUN PUNTO DE INFLEXIÓN)

Se $f(x)$ admite derivada segunda en $x_0 \in (a, b)$.

Cúmprese que :

Se f ten un punto de inflexión en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

O recíproco non é certo.

TEOREMA: (CONDICIÓN SUFICIENTE PARA A EXISTENCIA DUN PUNTO DE INFLEXIÓN)

Se $f(x)$ admite derivada segunda e terceira en $x_0 \in (a, b)$.

Cúmprese que :

Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ é un punto de inflexión

46.- Obtén os intervalos de concavidade e convexidade e os puntos de inflexión de cada unha das seguintes funcións:

a) $y = 2x - x^2$

b) $y = x^4 - 6x^2$

c) $y = \frac{x}{e^x}$

APLICACIÓNES DAS DERIVADAS .-

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIÓNS POLINÓMICAS E RACIONAIS.

Construír a curva que representa graficamente a función $y = f(x)$, consiste en determinar as propiedades características da mesma e os seus elementos notables, de xeito que aínda non coñecendo tódolos seus puntos, podamos debuxar a súa gráfica. Temos que estudar os seguintes aspectos:

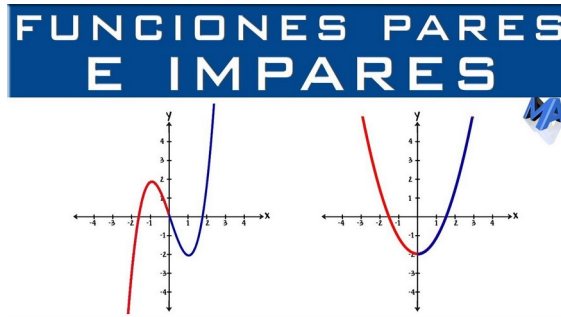
Dominio: Conxunto de valores da x para os que y toma valores reais

- As funcións polinómicas teñen por dominio tódolos números reais.
- As funcións racionais están definidas en todo $\mathbb{R}$ excepto nos valores que fan o denominador igual a cero.

Cortes cos eixos: Son os puntos nos que a gráfica corta aos eixos coordenados.

- Cortes co eixo X: Basta facer $y = 0$ e obter os valores da x correspondentes. Estes puntos son por tanto da forma $(x,0)$.
- Corte co eixo Y: Basta facer $x = 0$ e obter o valor correspondente da y que, neste caso, **se existe é único**. O punto será da forma $(0,y)$.

Simetrías:



Se $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ impar $\Rightarrow$ A gráfica de $f(x)$ é simétrica respecto a orixe de coordenadas $(0,0)$. Por ex. $f(x) = x^3$

Se $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ par $\Rightarrow$ A gráfica de $f(x)$ é simétrica respecto ao eixo Y
Por ex. $f(x) = x^2$

Asíntotas: Son rectas ás que a gráfica da función se achega cada vez máis, cando x ou y tenden a $\pm\infty$, pero non chega a tocalas. Segundo a súa posición con respecto a os eixos coordenados se clasifican en horizontais, verticais e oblicuas.

As función **polinómicas** non teñen asíntotas, pero si RAMAS PARABÓLICAS. Hai que estudar para elas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ que será } +\infty \text{ ou } -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ que será } +\infty \text{ ou } -\infty$$

As función **racionais** poden ter:

Asíntotas horizontais: A súa ecuación é, da forma $y=n$ onde $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

Asíntotas verticais: A súa ecuación é da forma $x=k$ onde k é calquera valor da x que cumpra que:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas oblicuas: A súa ecuación é da forma $y=mx+n$.

Para que unha función teña asíntota oblicua o grao do numerador ten que ser unha unidade máis co do denominador. Para calcular a ecuación da asíntota tes que dividir o numerador entre o denominador. O cociente é a ecuación da asíntota oblicua.

Monotonía: E o estudo dos intervalos de crecemento e decrecemento dunha función.

Calculamos a primeira derivada e estudamos o seu signo. Nos intervalos nos que a derivada é positiva a función é crecente e nos que a derivada é negativa, é decrecente.

Extremos relativos: E o estudo dos máximos e mínimos relativos dunha función.

Os extremos relativos, se existen, están entre os puntos singulares da función, é dicir, os puntos nos que a primeira derivada é cero. Se a función pasa de crecente a decrecente no punto, hai un máximo; se pasa de decrecente a crecente, hai un mínimo, e se non hai cambio de monotonía, non hai extremo.

Curvatura: É o estudo dos intervalos de concavidade e convexidade da función

Sabemos que a condición suficiente para que unha función sexa convexa ou cóncava é que a súa segunda derivada sexa, respectivamente, maior ou menor que cero. Debemos calcular polo tanto a segunda derivada e estudar o seu signo.

Puntos de inflexión: Son, como xa estudamos no tema anterior, os puntos onde a función cambia de convexa a cóncava ou de cóncava a convexa.

Sabemos que a condición necesaria para que unha función teña un punto de inflexión é que a súa segunda derivada sexa cero. Estudaremos polo tanto os valores que anulan a segunda derivada. Este estudo xunto co estudo da curvatura, vaimos indicar onde a función ten os puntos de inflexión.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓNS POLINÓMICAS.

47.- Representa as seguintes funcións polinómicas

$$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$b) f(x) = (x+1)^3(x-3)$$

$$c) f(x) = -x^4 + 2x^2$$

$$d) f(x) = (x-2)^2(x-1)$$

$$e) f(x) = x^4 + 4x^3$$

$$f) f(x) = 1 + (1-x)^3$$

$$g) f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$$

$$h) f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$i) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓNS RACIONAIS.

48.- Representa as seguintes funcións racionais, seguindo os pasos da páxina anterior:

$$a) y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

$$b) y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

$$c) y = \frac{x}{x^2 - 16}$$

$$d) y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

$$e) y = \frac{2x^2}{x-1}$$

$$j) y = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

49.- Estuda e representa as seguintes funcións:

$$a) y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$b) y = \frac{x}{1 - x^2}$$

$$c) y = \frac{x+2}{x^2 - 6x + 5}$$

$$d) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$e) y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

$$f) y = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$g) y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$h) y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

$$i) y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$j) y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$k) y = \frac{x^2 - 5}{2x - 4}$$

APLICACIÓNES DAS DERIVADAS .-

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

Con moita frecuencia aparecen problemas físicos, xeométricos, económicos, biolóxicos..., nos que se trata de **OPTIMIZAR unha función** (CALCULAR O MÁXIMO OU O MÍNIMO DUNHA FUNCIÓN) (facer máximo un volume, uns beneficios, unha poboación,; facer mínimos uns custos ou unha área...). A dificultade destes problemas normalmente non estriba en optimizar unha función coñecida, senón en atopar a expresión analítica da función que temos que optimizar.

Nos problemas de optimización, o que interesa non son os **extremos** relativos da función senón os **absolutos**.

Se $f(x)$ é derivable en (a,b) , os MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS están:

- **NOS PUNTOS SINGULARES (os puntos x que verifican que $f'(x)=0$)**
- **NOS PUNTOS CORRESPONDENTES AOS EXTREMOS DO INTERVALO.**

Por tanto, para determinalos:

- Resólvese $f'(x)=0$.**
- Selecciónanse as raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ que están entre a e b (puntos singulares).**
- Calcúlase $f(x_1), f(x_2), f(x_n), f(a), f(b)$ para saber cal deles é o máximo e cal o mínimo absoluto.**

Tamén se pode recurrir a este teorema para saber se os puntos singulares son máximos ou mínimos relativos ou nin máximos nin mínimos relativos.

Teorema:

Sexa $f(x)$ unha función con derivada segunda en un punto $x_0 \in (a, b)$, cúmprese que:

- Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x)$ ten un mínimo relativo en x_0
- Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x)$ ten un máximo relativo en x_0

Exemplo:

Dispoñemos dunha cerca de 100 m de lonxitude. Queremos delimitar a máxima área posible. Cales serán as dimensións do rectángulo de área máxima delimitado pola cerca?

Solución:

Chamámoslle x a unha das dimensións do rectángulo e y a outra.

Como o perímetro do rectángulo é 100 m $\Rightarrow 2x + 2y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

O que queremos é ver que valores de x e y fan máxima a área do rectángulo:

A función que temos que maximizar é: $\text{Área}_{\text{rectángulo}} = xy$ Perímetro do rectángulo = 100m
 $y = 50 - x$ $= x(50 - x) = 50x - x^2 \quad x \in (0, 50)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, 50)$ $x \in (0, 50)$ (x : unha das dimensións do rectángulo de perímetro 100).

$$A'(x) = 50 - 2x$$

$$A'(x) = 50 - 2x = 0 \Rightarrow 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ PUNTO SINGULAR}$$

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $A''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $A''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(25) = -2 < 0 \Rightarrow x = 25 \text{ é o único máximo relativo.}$$

Para saber se é o máximo absoluto, calculamos a súa i max e a i max e dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} A(25) = 625 \\ A(0) = 0 \\ A(50) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 25 \text{ (Entón } y = 50 - 25 = 25 \text{) está o máximo absoluto da función.}$$

O rectángulo de perímetro 100m que ten área máxima é o que ten dimensións 25×25 (resultou ser o cadrado).

$$A_{\text{máx. máx}} = 25 \times 25 = 625 \text{ m}^2.$$

Exemplo:

Dispoñemos dunha cerca de 100 m de lonxitude. Queremos delimitar a máxima área posible. Cales serán as dimensións do rectángulo de área máxima delimitado pola cerca se un dos lados queda contra un río polo que por ese lado non imos colocar a cerca?

Solución:

Chamámolles x (a que queda contra o río) a unha das dimensións do rectángulo e y a outra.

Como a cerca empregada é 100 m $\Rightarrow x + 2y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - x}{2} = 50 - \frac{x}{2}$

O que queremos é ver que valores de x e y fan máxima a área do rectángulo:

A función que temos que maximizar é: $\text{Área}_{\text{rectángulo}} = xy$ Cerca empregada = 100 m
 $y = 50 - \frac{x}{2}$ $= x \left(50 - \frac{x}{2} \right) = 50x - \frac{x^2}{2} \quad x \in (0, 100)$

Para calcular os máximos e mínimos ABSOLUTOS temos que buscar nos puntos singulares e nos extremos do intervalo onde está definida a función. A función definida no intervalo $D = (0, 100)$ $x \in (0, 100)$ (x : dimensión do rectángulo de perímetro 100 m que só se suma unha vez porque un dos lados do rectángulo queda pegado ao río e non se cerca).

$$A'(x) = 50 - x$$

$$A'(x) = 50 - x = 0 \Rightarrow 50 - x = 0 \Rightarrow x = 50 \text{ PUNTO SINGULAR}$$

Hai un teorema (está na teoría) que nos di que se $A''(\text{no punto singular}) > 0 \Rightarrow$ O punto singular é mínimo relativo, e se $A''(\text{no punto singular}) < 0 \Rightarrow$ O punto singular é máximo relativo.

$$A''(x) = -1 \Rightarrow A''(50) = -1 < 0 \Rightarrow x = 50 \text{ é o único máximo relativo.}$$

Para saber se é o máximo absoluto, calculamos a súa i max e a i max e dos extremos.

$$\left. \begin{array}{l} A(25) = 625 \\ A(0) = 0 \\ A(100) = 0 \end{array} \right\} \text{Definitivamente en } x = 50 \left(\text{Entón } y = 50 - \frac{50}{2} = 25 \right) \text{ está o máximo absoluto da función.}$$

O rectángulo delimitado cos 100 m e cumprindo as condicións expostas no enunciado do problema que ten área máxima é o que ten dimensións 50×25 .

$$A_{\text{máxima}} = 50 \times 25 = 1250 \text{ m}^2.$$

Exemplo:

Un arame de 170 cm. de lonxitude divídese en dúas partes. Con unha das partes quérese formar un cadrado e coa outra un rectángulo de xeito que a base mida o dobre da altura. Calcula as lonxitudes das partes nas que se ten que dividir o arame para que a suma das áreas do cadrado e do rectángulo sexa mínima.

Solución:

Se lle chamamos x a parte do arame para facer o cadrado, a parte coa que faremos o rectángulo é $170 - x$

x é o perímetro do cadrado, polo tanto a lado do cadrado é $\frac{x}{4}$ e a súa superficie: $\left(\frac{x}{4}\right)^2$

O perímetro do rectángulo é $170 - x$. Como a base é o dobre da altura a altura ten que ser $\frac{170 - x}{6}$ e a base $\frac{170 - x}{3}$. A superficie do rectángulo é: $\frac{170 - x}{6} \cdot \frac{170 - x}{3}$.

A función a optimizar é:

$$f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{170 - x}{6} \cdot \frac{170 - x}{3} = \frac{x^2}{16} + \frac{(170 - x)^2}{18}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{16} - \frac{2(170 - x)}{18}$$

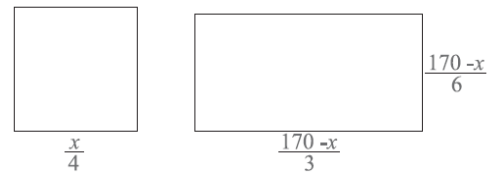
$$\frac{2x}{16} - \frac{2(170 - x)}{18} = 0 \implies x = 80$$

$$f''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 0 \forall x \text{ en } x = 80 \text{ hai un mínimo relativo}$$

que é ademais o mínimo absoluto (basta con substituír en $x = 0$ e $x = 170$ para comprobar que iso é así).

A suma das áreas é mínima cando $x = 80$ e a área mínima é 850 cm^2 D=(0,170)

Debemos dividir o arame en 80 cm para o cadrado e 90 cm para o rectángulo.



PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

1.- O custo total (en dólares) de fabricación de q unidades de certo artigo $C(q)=3q^2+5q+75$
 O custo medio por unidade é: $M(q)=\frac{C(q)}{q}$

- Cantas unidades se deben fabricar para que o custo medio por unidade sexa mínimo?
- Calcula $C(q)$ e $M(q)$ para o valor de q que indicaches na epígrafe a).

2.- A función $f(x)=\frac{60x}{x^2+9}$ indica os beneficios obtidos por unha empresa desde que comezou a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en anos).

- Representaa graficamente.
- Ao cabo de canto tempo obtén a empresa o beneficio máximo? Cal é ese beneficio?
- Perderá diñeiro a empresa nalgún momento?

3.- Descompoñer o número 16 en dous sumandos positivos tales que o seu produto sexa máximo.

4.- Observouse que nunha carreteira de saída dunha grande cidade a velocidade dos coches entre as 2 horas e as 6 horas da tarde vén dada por: $v(t)=t^3-15t^2+72t+18$ para $t \in [2,6]$.
 ¿A que hora circulan os coches a maior velocidade? ¿A que hora ca menor velocidade? Xustifica a resposta.

5.- Dispónse dunha barra de ferro de 10 m para construír unha portería, de maneira que a portería teña a máxima superficie interior posible. Que lonxitude deben ter os postes e o larguero? Que superficie máxima interior ten a portería?

6.- Descompoñer o número 81 en dous sumandos de maneira que o produto do primeiro sumando polo cadrado do segundo sexa máximo.

7.- A concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, nunha cidade vén dada pola función $C(x)=90+15x-0,6x^2$, onde x é o tempo transcurrido dende o 1 de xaneiro de 1990 contado en anos. Ata que ano vai crecer a concentración de ozono? Cal vai ser esa concentración máxima?

8.- Os beneficios dunha empresa, expresados en centos de milleiros de euros, cando transcurren t anos, veñen dados pola función: $f(t)=\frac{75t}{t^2+100}$ ¿Cales son os seus máximos beneficios e cando se producen?

9.- Los costes de fabricación, $C(x)$ en euros, de cierta variedad de salchichas, dependen de la cantidad elaborada (x en kilos) de acuerdo con la siguiente expresión: $C(x)=10+2x$.
 El fabricante estima que el precio de venta en euros de cada kilogramo de salchichas viene dado por: $P(x)=20-\frac{6x^2}{800}$.

Obtener la función de ganancias ¿Qué cantidad de salchichas interesa producir para maximizar ganancias? Calcular en este caso, el precio de venta y la ganancia que se obtiene.

10.- Determinar la mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.

11.- La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Hallar los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

12.- Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?

13.- Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

14.- Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 metros. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.