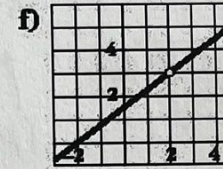
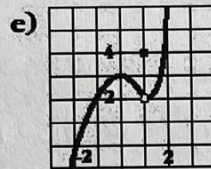
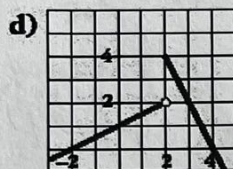
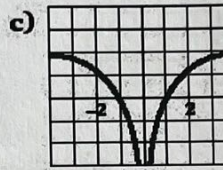
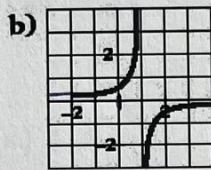
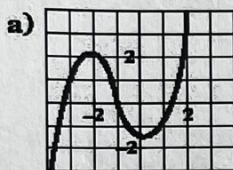


EXERCICIOS LÍMITES E CONTINUIDADE

VISIÓN INTUITIVA DA CONTINUIDADE. TIPOS DE DESCONTINUIDADE.-

- 1.- a) Cal das seguintes gráficas corresponde a unha función continua?
b) Sinala, en cada unha das outras cinco, a razón da súa descontinuidade.



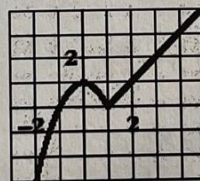
- a) f continua en $\mathbb{R}$
b) f continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. En $x=1$ descontinuidade salto infinito.
c) f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x=0$ descontinuidade salto infinito.
d) f continua en $\mathbb{R} - \{2\}$. En $x=2$ descontinuidade salto finito.
e) f continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. En $x=1$ descontinuidade evitable (punto desprazado).
f) f continua en $\mathbb{R} - \{2\}$. En $x=2$ descontinuidade evitable (falta punto).

- 2.- Comproba que as gráficas destas funcións corresponden á expresión analítica dada e di se son continuas ou descontinuas en $x=1$.

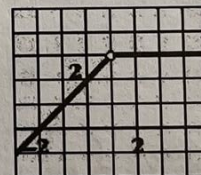
a) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

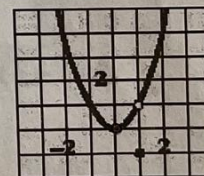
c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



(a)
 f continua en $\mathbb{R}$



(b)
 f descontinua en $x=1$
descontinuidade evitable (falta punto)



(c)
 f descontinua en $x=1$
descontinuidade evitable (punto desprazado)

As funcións definidas por expresións analíticas elementais (as que estudamos ata agora: polinómicas, de proporcionalidade inversa, radicais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas,...) son continuas en tódolos puntos nos que están definidas, é dicir, en tódolos puntos do seu dominio.

3.- Determina os puntos de descontinuidade, se os hai, das seguintes funcións:

a) $y = x^2 + x - 6$

f continua en $\mathbb{R}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R}$)

(función polinómica)

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

f continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$)

c) $y = \frac{x-1}{2x+1}$

f continua en $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$)

d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

$x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \notin \mathbb{R}$

f continua en $\mathbb{R}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R}$)

e) $y = \frac{2}{5x - x^2}$

f continua en $\mathbb{R} - \{0, 5\}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 5\}$)

$5x - x^2 = 0 \Rightarrow x(5-x) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$

f) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$

f continua en $\mathbb{R}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R}$)

$x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4.- Indica para que valores de R son continuas as seguintes funcións:

a) $y = 5 - \frac{x}{2}$

f continua en $\mathbb{R}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R}$)

(función polinómica)

b) $y = \sqrt{x-3}$

$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

f continua en $[3, \infty)$

(p.g. $D(f) = [3, \infty)$)

c) $y = \frac{1}{x}$

$x \neq 0$

f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$)

d) $y = \sqrt{-3x}$

f continua en $(-\infty, 0]$

(p.g. $D(f) = (-\infty, 0]$)

$-3x \geq 0 \Rightarrow 3x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

e) $y = \sqrt{5-2x}$

$5-2x \geq 0$

$-2x \geq -5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$

f continua en $(-\infty, \frac{5}{2}]$

(p.g. $D(f) = (-\infty, \frac{5}{2}]$)

f) $y = x^2 - x$

f continua en $\mathbb{R}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R}$)

(función polinómica)

g) $y = \frac{x+2}{x-3}$

$x-3 \neq 0, x \neq 3$

f continua en $\mathbb{R} - \{3\}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$)

h) $y = \frac{x^2 - 3x}{x}$

$x \neq 0$

f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$)

i) $y = \frac{x^2 - 3}{x}$

$x \neq 0$

f continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

(p.g. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$)

LÍMITE DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO.-

5.- Sobre a gráfica da función $f(x)$, indica:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

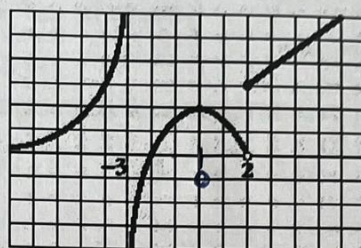
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

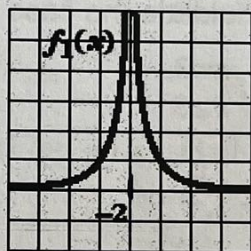
h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$



6.- Estas son, respectivamente, as gráficas das funcións:

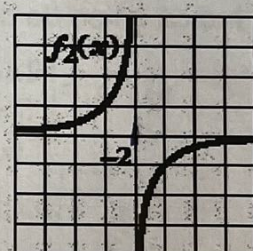
$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

Cal é o límite de cada unha destas funcións cando $x \rightarrow -2$?



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty$$

DEFINICIÓN DE CONTINUIDADE DUNHA FUNCIÓN $f(x)$ NUN PUNTO x_0 .-

Unha función $f(x)$ é continua nun punto x_0 cando se cumpre que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

TIPOS DE DESCONTINUIDADES

Unha función ten unha **DESCONTINUIDADE EVITABLE** nun punto cando existe o límite no punto pero non está definida nel, ou cando existe límite e está definida no punto pero ámbolos dous valores non coinciden.

Unha función ten unha **DESCONTINUIDADE NON EVITABLE**:

-DE SALTO FINITO cando os límites laterais son finitos pero distintos (non ten límite no punto)

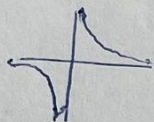
-DE SALTO INFINITO (cando algún ou os dous límites laterais é infinito.)

7.- Se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, podemos afirmar que f é continua em $x = 2$?

Non. Para afirmalo ten que existir $f(2)$ e ademais $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, é dicir, $f(2)$ ten que ser 5.

8.- Pódese calcular o límite dunha función nun punto no que a función non estea definida? Pode ser a función continua nese punto?

Si.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Non. f continua en $x=a$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(ten que existir $f(a)$)

9.- Representa as seguintes funcións e explica se son descontínuas nalgún dos seus puntos. Indica o tipo de discontinuidade (no caso de que a teña).

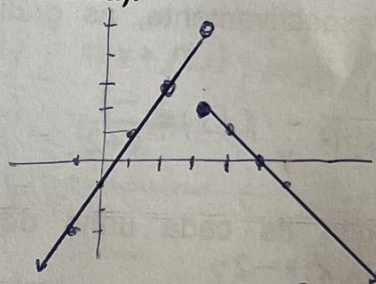
a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x < 3 \\ 5-x & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

$y = 2x-1$ $x < 3$
recta

x	y
3	5
2	3
1	1
0	-1
-1	-3

$y = 5-x$ $x \geq 3$
recta

x	y
3	2
4	1
5	0
6	-1



f descontínua en $x=3$
(DESCONTINUIDADE DE SALTO FINITO)

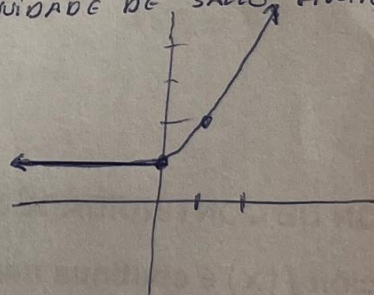
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$y = 1$ $x \leq 0$
recta horizontal

x	y
0	1
-1	1
-2	1

$y = x^2+1$ $x > 0$
parábola CONVEXA
 $V(0,1)$
NON CORTA EIXO X

x	y
0	1
1	2
2	5
3	10



f continua en $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{se } x < 2 \\ x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

$y = x^2-2$ $x < 2$
parábola CONVEXA
 $V(0,-2)$

$$x^2-2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

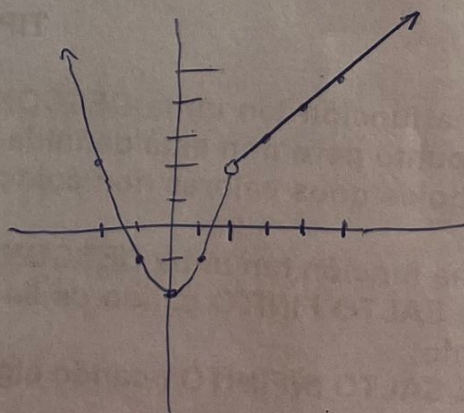
CORTA EIXO X

en $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

x	y
2	2
1	-1
0	-2
-1	-1
-2	2

$y = x$ $x \geq 2$
recta

x	y
2	2
3	3
4	4
5	5



f descontínua en $x=2$
(DESCONTINUIDADE EVITABLE)

CÁLCULO DO LÍMITE DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO.-

10.- Sabendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

Calcula o límite (sempre que poidas) cando $x \rightarrow \infty$ das seguintes expresións:

$$\begin{array}{lcl} a) f(x) - h(x) & b) f(x)^{f(x)} & c) f(x) + h(x) \\ = +\infty - (-\infty) & = \infty^\infty & = +\infty + (-\infty) \\ = \infty + \infty & = \infty & = \infty - \infty \\ = \infty & & \text{INDETERMINACIÓN} = \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} f) u(x)^{u(x)} & g) f(x) / h(x) & h) (-h(x))^{h(x)} \\ = 0^0 & \frac{+\infty}{-\infty} & = -(-\infty)^{-\infty} \\ \text{INDETERMINACIÓN} & & = \infty^{-\infty} \\ & & \text{INDETERMINACIÓN} \\ & & = \frac{1}{\infty^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} m) f(x) / u(x) & n) h(x) / u(x) & ñ) g(x) / u(x) \\ = \frac{+\infty}{0} = & = \frac{-\infty}{0} = & = \frac{4}{0} = \\ = +\infty \cdot \infty & = -\infty \cdot \frac{1}{0} & = \pm \infty \\ = +\infty & = +\infty \cdot \infty & \\ = \pm \infty & = \pm \infty & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o) x + f(x) & p) f(x)^{h(x)} & q) x + h(x) \\ = \infty + (+\infty) & = (+\infty)^{-\infty} & = \infty + (-\infty) \\ = \infty + \infty & = \frac{1}{\infty^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 & = \infty - \infty \\ = \infty & & \text{INDETERMINACIÓN} = 0 \end{array}$$

LÍMITE NUN PUNTO NO QUE A FUNCIÓN É CONTINUA.-

11.- Calcula o valor dos seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

12.- Calcula estes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5} = \sqrt{4 - 6 + 5} = \sqrt{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0,1} \log x = \log 0,1 = -1$$

13.- Calcula os seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2} \right) = 5 - \frac{0}{2} = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2} = \frac{1-3}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x = 2^{0,5} = \sqrt{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2} = \sqrt{10-2-(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x = \log_2 4 = 2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} e^x = e^2$$

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES DEFINIDAS A ANACOS.-

14.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ halla:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2+1) = 4+1 = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

15.- Comproba se as seguintes funcións son continuas nos puntos que se indican:

$$a) f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad \text{en } x = -1$$

$$\stackrel{1^\circ}{=} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3-x}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x+4) = 2$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

$$\stackrel{2^\circ}{=} f(-1) ?$$

$$\neq f(-1)$$

f DESCONTINUA EN $x = -1$
(DESCONTINUIDADE EVITABLE)

$$b) f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

$$\stackrel{1^\circ}{=} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x^2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x}{2} - 3 \right) = -2$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$$

$$\stackrel{2^\circ}{=} f(2) ?$$

$$\exists f(2) = \frac{2}{2} - 3 = -2$$

$$\stackrel{3^\circ}{=} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Entón, f CONTINUA EN $x = 2$.

$$c) f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en $x = 1$

1º ¿ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+3) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Entón, f DESCONTINUA EN $x = 1$

(DESCONTINUIDADE DE SALTO FINITO)

16.- Estuda a continuidade destas funcións e represéntaa:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$x=1$

1º ¿ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

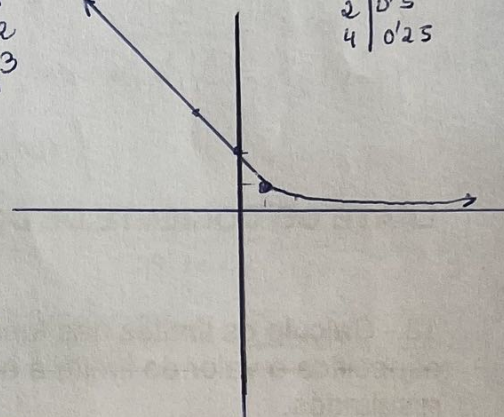
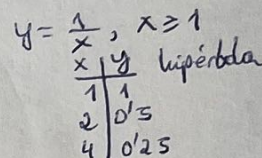
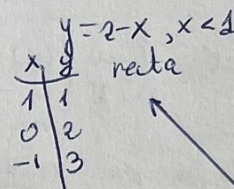
2º ¿ $f(1)$?

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

Entón f CONTINUA EN $x=1$
 $\Rightarrow f$ CONTINUA EN $\mathbb{R}$

f CONTINUA EN $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
(RECTA) (HIPÉRBOLA)
(denominador non se anula en $(1, \infty)$)



$$b) f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$x=-1$

1º ¿ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x^2) = 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

2º ¿ $f(-1)$?

$$f(-1) = -(-1)-1 = 1-1 = 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$$

f CONTINUA EN $x=-1$

$x=1$

1º ¿ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

2º ¿ $f(1)$?

$$f(1) = 1-1 = 0$$

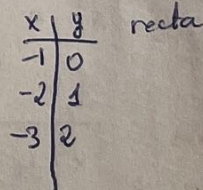
$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

f CONTINUA EN $x=1$

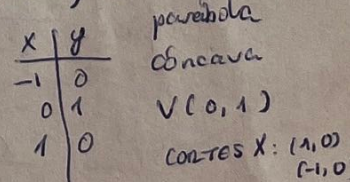
f CONT. EN $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
recta paráb. recta

f CONT EN $\mathbb{R}$

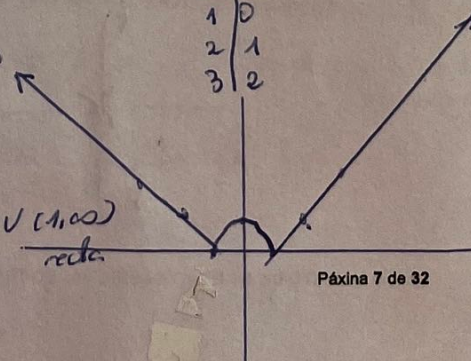
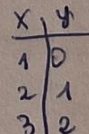
$$y = -x-1; x \leq -1$$



$$y = 1-x^2; -1 < x < 1$$



$$y = x-1; x \geq 1$$



c) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\boxed{x=0}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x^2) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{x+1} = 2$
 $\Rightarrow \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

+ non cont. en $x=0$
 $\downarrow$ f cont. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 paráb. expon.
 f cont. en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

17.- Calcula k para que $y = \begin{cases} x^3 - 2x + k & x \neq 3 \\ 7 & x = 3 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

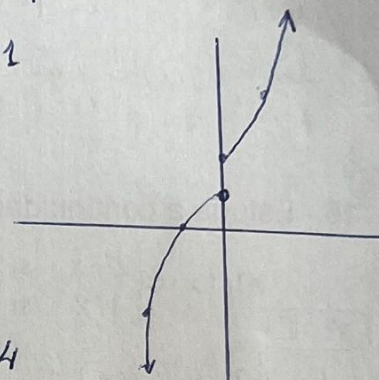
$\boxed{x=3}$
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 27 - 6 + k = k + 21$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = k + 21 = f(3) = 7$

Para f continua en $x=3 \Rightarrow k + 21 = 7 \Rightarrow k = 7 - 21 = -14$

f cont. en $\mathbb{R} \Rightarrow k = -14$



$y = 1 - x^2, x \leq 0$
 • parábola cóncava
 • $V(0,1)$
 • cortes $(1,0) (-1,0)$

LÍMITE DEL COCIENTE DE DOS POLINOMIOS P(X)/Q(X) :-

18.- Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2 y 0

b) $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en $2, 0$ y 3

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{0^3}{0^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 12}{(x - 2)^2} = \frac{-4}{0} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^3}{(-2)^2 - 4} = \frac{-8}{0} = \pm \infty$

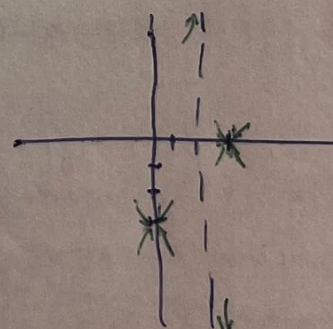
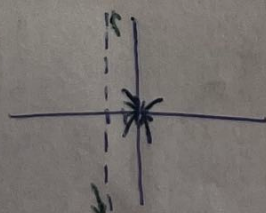
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x - 12}{(x - 2)^2} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 12}{(x - 2)^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$
 $x = -2.01 \Rightarrow f(x) = \frac{(-2.01)^3}{(-2.01)^2 - 4} = \frac{-8.12}{0.0401} \approx -201.25$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 12}{(x - 2)^2} = \frac{-12}{4} = -3$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$
 $x = -1.99 \Rightarrow f(x) = \frac{(-1.99)^3}{(-1.99)^2 - 4} = \frac{-7.94}{-0.0401} \approx 198$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 12}{(x - 2)^2} = \frac{0}{1} = 0$



c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 e -3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1 - 2 + 1}{1 + 2 - 3} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{9 + 6 + 1}{9 - 6 - 3} = \frac{16}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)} = \frac{+}{-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)} = \frac{+}{+} = +\infty$$

d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 e -3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3 + 3x^2} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4}{x^3 + 3x^2} = \frac{(-3)^4}{(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2} = \frac{81}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^4}{x^2(x+3)} = \frac{+}{-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^4}{x^2(x+3)} = \frac{+}{+} = +\infty$$

19.- Resolva os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \frac{(-1)^3 + 1}{(-1)^2 + (-1)} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \frac{1 + 1 + 1}{-1} = -3$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-4}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 + 4x + 3} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-2}$$

$$\begin{array}{c|ccc} -3 & 1 & 4 & 3 \\ & & -3 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1^4 - 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ INDET.}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{1+1+1+1}{1+1} = 2$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

20.- Calcula, en cada caso, o valor de k para que a función f(x) sexa continua en todo R.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq 3 \\ x + k & \text{se } x > 3 \end{cases}$

1º. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + k) = 3 + k$$

2º. $f(3) = 3^2 - 4 = 5$?

f continua en $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
(funciones polinómicas)

Para que f continua en $\mathbb{R} \Rightarrow$

f continua en $x = 3 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Rightarrow$$

$$5 = 3 + k \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{x}{2} & \text{se } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

1º é $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(6 - \frac{x}{2}\right) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + kx) = 4 + 2k$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1º é $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1$$

$$2^\circ f(2) = 2^2 + k \cdot 2 = 4 + 2k$$

Para f continua em $\mathbb{R} \Rightarrow f$ continua em $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ (funções polinómicas)

$\Rightarrow f$ continua em $x = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow 5 = 4 + 2k \Rightarrow 1 = 2k \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$2^\circ f(0) = k$$

Para f continua em $\mathbb{R} \Rightarrow f$ cont. em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 $+ \alpha(x) = x + 1 \quad x \neq 0$

$\Rightarrow f$ continua em $x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = k}$$

21.- Calcula a para que as seguintes funções sejam contínuas em $x = 1$:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1º é $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - ax^2) = 4 - a$$

$$2^\circ f(1) = 1 + 1 = 2$$

Para f continua em $x = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - a = 2 \Rightarrow \underline{a = 2}$$

1º é $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$$b) f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$2^\circ f(1) = a$$

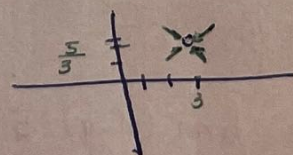
Para f continua em $x = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \boxed{2 = a}$

22.- Calcula os seguintes limites e representa os resultados que obténs:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{3^2 - 3 - 6}{3^2 - 3 \cdot 3} = \frac{0}{0} \text{ ind.}$$

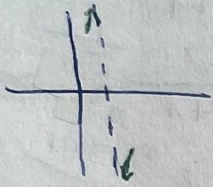
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 15 - 6} \\ \underline{3} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$



$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = \frac{0}{0} \checkmark \neq \text{ND.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{0} = \pm \infty$$



$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 1 - 3 - 2} \\ \underline{1 - 2 } \\ 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

23.- Existe algún valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$

Justifica tu respuesta.

$$1^\circ \text{ ¿} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

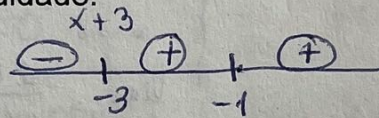
$$2^\circ \text{ ¿} f(0) = k ?$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

f no continua en $x = 0$
(DESCONT. SALTO INFINITO)

24.- Dibuja la función e estudia la continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{se } x \leq -1 \\ -x^2 + 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \leq -3 \\ x+3, & -3 < x \leq -1 \\ -x^2+4, & x > -1 \end{cases}$$

f continuo en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, \infty)$

$$\text{en } x = -3 \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (-x-3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (x+3) = 0$$

$$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$$

$$f \text{ continua en } x = -3 \text{ p.p.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = 0$$

en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2+4) = 3$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ no existe} \Rightarrow f \text{ no continua en } x = -1$$

25.- Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$1^\circ \text{ ¿} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + kx - 1) = 1 + k - 1 = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2^x) = 2^1 = 2$$

$$2^\circ f(1) ?$$

$$f(1) = 1^2 + k \cdot 1 - 1 = k$$

Para f continua en $\mathbb{R}$
(como f cont. en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
por ser función polin. e exp.)

$$\Rightarrow f \text{ continua en } x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 2}$$

(DESCONT. SALTO FINITO)

26.- Calcula os seguintes límites e representa os resultados que obteñas:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x^2(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{-2}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(-1)^3 + (-1)^2}{(-1)^2 + 2(-1) + 1} = \frac{-1+1}{1-2+1} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} =$$

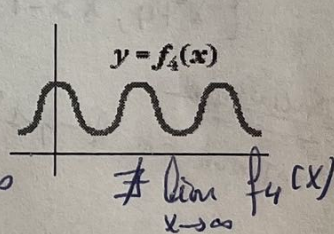
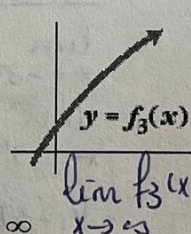
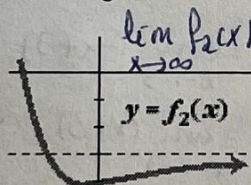
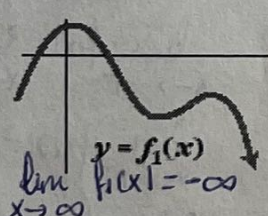
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{x-2} = \frac{2 \cdot 4}{0} = \frac{8}{0} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x+2)}{x-2} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x+2)}{x-2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

COMPORTAMENTO DUNHA FUNCIÓN CANDO $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$

27.- Di o límite cando $x \rightarrow +\infty$ das seguintes funcións dadas polas súas gráficas:



CÁLCULO DE LÍMITES CANDO $x \rightarrow +\infty$ OU $x \rightarrow -\infty$

28.- Di o valor do límite cando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ das seguintes funcións:

$$a) f(x) = -x^2 + 3x + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -(-\infty)^2 = -\infty$$

$$c) f(x) = x - 3x^4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^4) = -3 \cdot \infty^4 = -3 \cdot \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -3 \cdot (-\infty)^4 = -3 \cdot \infty = -\infty$$

$$b) f(x) = 5x^3 + 7x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 = 5 \cdot \infty^3 = 5 \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = 5 \cdot (-\infty)^3 = 5 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$d) f(x) = \frac{1}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = \frac{1}{3 \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x} = \frac{1}{3(-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$e) f(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\infty^2} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(-\infty)^2} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$f) f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-5} = \frac{\infty^3}{-5} = \frac{\infty}{-5} = -\infty$$

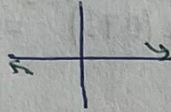
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-5} = \frac{(-\infty)^3}{-5} = \frac{-\infty}{-5} = \infty$$

29.- Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e representa as suas ramais:

$$a) f(x) = \frac{1}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$$

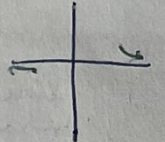
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$



$$b) f(x) = \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{-\infty} = 0^-$$



$$c) f(x) = \frac{-1}{x^2}$$

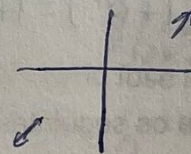
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\infty^2} = \frac{-1}{\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(-\infty)^2} = \frac{-1}{\infty} = 0^-$$

$$d) f(x) = 3x - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x) = 3 \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = 3 \cdot (-\infty) = -\infty$$



30.- Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e representa as suas ramais:

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-5} = \frac{\infty}{-5} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-5} = \frac{(-\infty)^3}{-5} = \frac{-\infty}{-5} = \infty$$

$$c) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$$

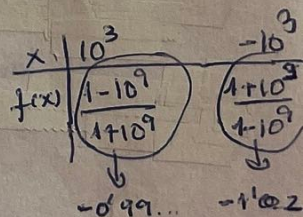
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

$$d) f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1^-$$



31.- Determina $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e representa a rama correspondente: $f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + 7x^4 - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} 7x^4 = 7 \cdot (\infty)^4 =$$

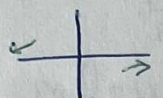
$$= 7 \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + 7x^4 - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} 7x^4 = 7 \cdot \infty^4 =$$

$$= 7 \cdot \infty = \infty$$

32.- Determina $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e traza as ramas correspondentes:

a) $f(x) = \frac{x^2+3}{-x^3}$



b) $f(x) = \frac{-x^3}{x^2+3}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = 0^-$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = \infty$

33.- Calcula os límites cando $x \rightarrow +\infty$ e cando $x \rightarrow -\infty$ das seguintes funcións:

a) $f(x) = 2^{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x-1} = 2^{\infty} = \infty$ (BASE > 1)

b) $f(x) = 0,75^x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (0,75)^x = (0,75)^{\infty} = 0^+$ (0 < BASE < 1)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x-1} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,75)^x = (0,75)^{-\infty} = \frac{1}{(0,75)^{\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty$

c) $f(x) = 1+e^x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+e^x) = 1+e^{\infty} = 1+\infty = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+e^x) = 1+e^{-\infty} = 1+0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{-\infty}} = e^{\infty} = +\infty$

34.- Calcula os seguintes límites e representa as ramas que obteñas:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2-2x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{\infty^2} = \frac{3}{\infty} = 0^+$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-x^3} = \frac{1}{-\infty^3} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\infty^2} = \frac{-1}{\infty} = 0^-$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x = -\infty$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{-2x} = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x} = -3^+$$

x	1000
f(x)	$\frac{2-3000}{1003} = -\frac{2998}{1003} \approx -2'989$

x	1000
f(x)	$\frac{3-2000}{5-2000} = \frac{-1997}{-1995} \approx +1'001$

35.- Nunha empresa fanse montaxes en cadea. O número de montaxes realizadas por un traballador sen experiencia depende dos días de adestramento segundo a función

$$M(t) = \frac{30t}{t+4} \quad (t \text{ en días}).$$

a) Cantas montaxes realiza o primeiro día? E o décimo?

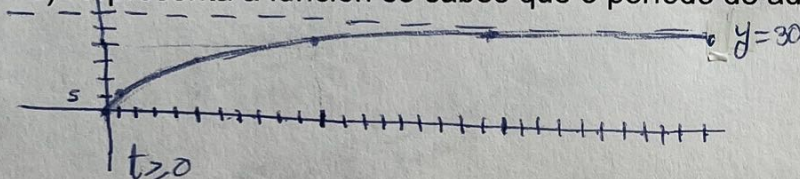
$$M(1) = \frac{30 \cdot 1}{1+4} = \frac{30}{5} = 6 \text{ montaxes}$$

1º día

$$M(10) = \frac{30 \cdot 10}{10+4} = \frac{300}{14} \approx 21'4286$$

Aproximadamente 22 montaxes

b) Representa a función se sabes que o período de adestramento é dun mes.



t	M(t)	t	M(t)
1	6	20	25
0	0		
10	21'4286	30	26'47
11	22		
5	16'667		

c) Que ocorrería co número de montaxes se o adestramento fose moito máis longo?

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{30t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{30t}{t} = 30$$

36.- Os gastos mensuais en euros que unha familia ten en alimentación veñen dados pola función:

$$f(x) = \begin{cases} 0,4x + k & \text{se } 0 \leq x \leq 1000 \\ \frac{2000x}{x+3000} & \text{se } x > 1000 \end{cases} \quad \text{onde } x \text{ son os ingresos da familia en euros}$$

a) Calcula o valor de k para que os gastos sexan continuos; é dicir, non haxa salto en $x=1000$.

$$\lim_{x \rightarrow 1000^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1000^-} (0,4x + k) = 400 + k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1000^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1000^+} \frac{2000x}{x+3000} = \frac{2000 \cdot 1000}{4000} = 500$$

Para que f continua en $x=1000$
 $\Rightarrow 400 + k = 500 \Rightarrow \boxed{k=100}$

b) Cara que valor se estabilizan os gastos de alimentación das familias coa renda máis alta?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2000x}{x+3000} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2000x}{x} = 2000$$

Estabilízanse cara os 2000 €