

LÍMITES E CONTINUIDADE

VISIÓN INTUITIVA DA CONTINUIDADE. TIPOS DE DESCONTINUIDADE.-

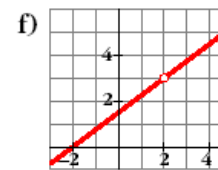
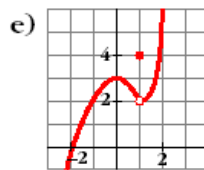
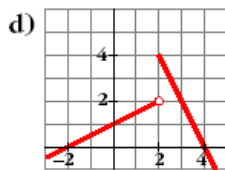
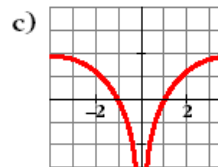
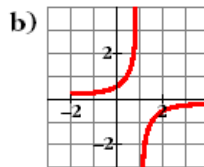
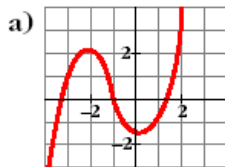
Intuitivamente una función é continua se se pode debuxar dun só trazo.

Imos buscar criterios que nos permitan saber de forma precisa cando una función é continua.

Por que non podemos debuxar a gráfica dun só trazo?. Por que unha función pode ser descontinua nun punto?

- Porque ten unha asíntota nese punto: proporcionalidade inversa, tanxente,....
- Porque presenta un salto nese punto: función a anacos
- Porque lle “falta” ese punto: función a anacos ou cociente de polinomios que se poida simplificar.
- Porque ten ese punto “desprazado”: función a anacos.

- 1.- a) Cal das seguintes gráficas corresponde a unha función continua?
b) Sinala, en cada unha das outras cinco, a razón da súa descontinuidade.

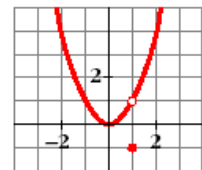
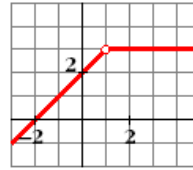
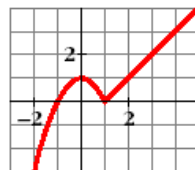


- 2.- Comproba que as gráficas destas funcións corresponden á expresión analítica dada e di se son continuas ou descontinuas en $x = 1$.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



As funcións definidas por expresións analíticas elementais (as que estudamos ata agora: polinómicas, de proporcionalidade inversa, radicais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas,...) son continuas en tódolos puntos nos que están definidas, é dicir, en tódolos puntos do seu dominio.

$f(x) = x^3 - 3x + 5$ Do $\text{minio}(f) = \mathbb{R}$ e, por tanto, continua en tódolos puntos de $\mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{x+5}{x+3}$ Do $\text{minio}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ e, por tanto, continua en tódolos puntos de $\mathbb{R} - \{-3\}$.

$h(x) = \sqrt{x-4}$ Do $\text{minio}(f) = [4, +\infty)$ e, por tanto, continua en tódolos puntos de $[4, +\infty)$.

$i(x) = \log(x-3)$ Do $\text{minio}(f) = (3, +\infty)$ e, por tanto, continua en tódolos puntos de $(3, +\infty)$.

3.- Determina os puntos de discontinuidade, se os hai, das seguintes funcións:

a) $y = x^2 + x - 6$

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \frac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$

4.- Indica para que valores de R son continuas as seguintes funcións:

a) $y = 5 - \frac{x}{2}$

b) $y = \sqrt{x-3}$

c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y = \sqrt{-3x}$

e) $y = \sqrt{5-2x}$

f) $y = x^2 - x$

g) $y = \frac{x+2}{x-3}$

h) $y = \frac{x^2 - 3x}{x}$

i) $y = \frac{x^2 - 3}{x}$

LÍMITE DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO.-

Para o estudo da continuidade dunha función nun punto é necesario saber a que valores se achega a y cando a x toma valores próximos a un determinado valor c , é dicir, é necesario o concepto de límite.

Non sempre cando a x toma valores próximos a un determinado valor c , a y toma valores próximos a un valor único, por iso falaremos de:

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ que é o valor ao que se aproxima y , cando x se aproxima a c por valores menores que c

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ que é o valor ao que se aproxima y , cando x se aproxima a c por valores maiores que c

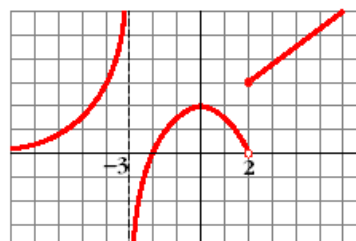
Se os valores destes dous límites, chamados límites laterais, coinciden diremos que existe o límite cando x tende a c de $f(x)$ e escribiremos:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Se os valores destes dous límites non coinciden diremos que $f(x)$ non ten límite cando x tende a c .

5.- Sobre a gráfica da función $f(x)$, indica:

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS IES VAL DO TEA

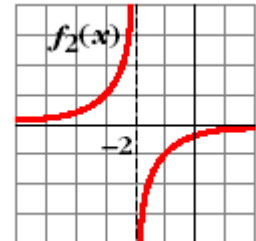
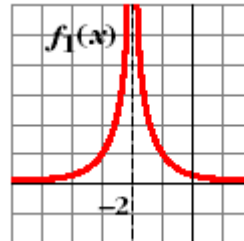


- a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

6.- Estas son, respectivamente, as gráficas das funcións:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

Cal é o límite de cada unha destas funcións cando $x \rightarrow -2$?



DEFINICIÓN DE CONTINUIDADE DUNHA FUNCIÓN $f(x)$ NUN PUNTO x_0 .-

Unha función $f(x)$ é continua nun punto x_0 cando se cumpre que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Para que isto se ocorra son necesarias as seguintes condicións:

- 1.- Ten límite finito cando x tende a x_0 . É dicir , $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ finito.
- 2.- O punto x_0 está no dominio, e dicir, $\exists f(x_0)$.
- 3.- O límite coincide co valor da función no punto. É dicir, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

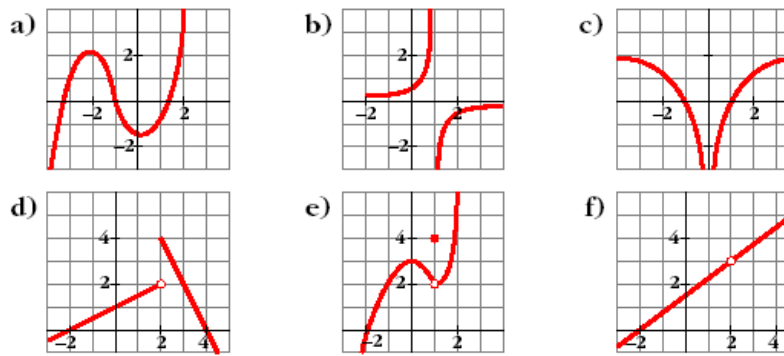
Se non se cumpre unha destas tres condicións a función $f(x)$ non é continua en x_0 ou o que é o mesmo $f(x)$ é descontinua no punto x_0 .

TIPOS DE DESCONTINUIDADES

Unha función ten unha **DESCONTINUIDADE EVITABLE** nun punto cando existe o límite no punto pero non está definida nel, ou cando existe límite e está definida no punto pero ámbolos dous valores non coinciden.

Unha función ten unha **DESCONTINUIDADE NON EVITABLE**:

- DE SALTO FINITO cando os límites laterais son finitos pero distintos (non ten límite no punto)
- DE SALTO INFINITO (cando algún ou os dous límites laterais é infinito.)



a) Función continua

b) e c) Presenta unha discontinuidade non evitable de salto infinito

d) Presenta unha discontinuidade non evitable de salto finito

e) e f) Presenta unha discontinuidade evitable

7.- Se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, podemos afirmar que f é continua en $x = 2$?

8.- Pódese calcular o límite dunha función nun punto no que a función non estea definida?
Pode ser a función continua nese punto?

9.- Representa as seguintes funcións e explica se son discontinuas nalgún dos seus puntos.
Indica o tipo de discontinuidade (no caso de que a teña).

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x < 3 \\ 5-x & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{se } x < 2 \\ x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

CÁLCULO DO LÍMITE DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO.-

PROPIEDADES DOS LÍMITES:

Se f e g dúas funcións tales que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$. Entón :

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot l_1$$

$$4. \text{ Se } l_2 \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = l_1^n \text{ e como caso particular } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} (g(f(x))) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) \text{ se } g \text{ é unha función continua}$$

OPERACIÓNS CON EXPRESIÓNS INFINITAS. INDETERMINACIÓNS.

SUMAS

$$\infty + l = \infty$$

$$-\infty + l = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

PRODUTOS

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\infty \cdot l = \begin{cases} \infty & \text{se } l > 0 \\ -\infty & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

COCIENTES

$$\frac{l}{(\pm\infty)} = 0$$

$$\frac{l}{0} = \pm\infty$$

$$\frac{(\pm\infty)}{0} = \pm\infty$$

$$\frac{0}{(\pm\infty)} = 0$$

POTENCIAS

$$\infty^x = \infty ; \quad \infty^{-x} = 0$$

$$\infty^l = \begin{cases} \infty & \text{se } l > 0 \\ 0 & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

$$l^x = \begin{cases} \infty & \text{se } l > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < l < 1 \end{cases}$$

$$l^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{se } l > 1 \\ \infty & \text{se } 0 < l < 1 \end{cases}$$

Unha INDETERMINADA ou INDETERMINACIÓN é o recoñecemento de que con só coñecer os límites das funcións que interveñen non podemos asignarlle límite ao resultado da operación. Hai que efectuar unha investigación máis fonda que nos permita chegar ao valor dese límite.

$$\infty - \infty \text{ INDETERMINADA}$$

$$(\pm\infty) \cdot 0 \text{ INDETERMINADA}$$

$$\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)} \text{ INDETERMINADA}$$

$$\frac{0}{0} \text{ INDETERMINADA}$$

$$\infty^0 \text{ INDETERMINADA}$$

$$0^0 \text{ INDETERMINADA}$$

$$1^{(\pm\infty)} \text{ INDETERMINADA}$$

$$(\pm\infty)^0 \text{ INDETERMINADA}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$$

10.- Sabendo que

Calcula o límite (sempre que poidas) cando $x \rightarrow \infty$ das seguintes expresións:

$$a) f(x) - h(x) \quad b) f(x)^{f(x)} \quad c) f(x) + h(x) \quad d) f(x)^x \quad e) f(x) \cdot h(x)$$

$$f) u(x)^{u(x)} \quad g) f(x) / h(x) \quad h) (-b(x))^{b(x)} \quad i) g(x)^{h(x)} \quad l) u(x) / h(x)$$

$$m) f(x) / u(x) \quad n) h(x) / u(x) \quad ñ) g(x) / u(x) \quad o) x + f(x) \quad p) f(x)^{h(x)}$$

$$q) x + h(x) \quad r) x^{-x} \quad s) f(x) / h(x) \quad t) f(x)^{h(x)} \quad u) g(x)^{f(x)}$$

LÍMITE NUN PUNTO NO QUE A FUNCIÓN É CONTINUA.-

Se $f(x)$ é continua no punto x_0 , entón $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dado que as funcións que utilizamos habitualmente mediante a súa expresión analítica son continuas en tódolos puntos do seu dominio, se existe $f(x_0)$, o $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ é $f(x_0)$.

11.- Calcula o valor dos seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$$

12.- Calcula estes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0,1} \log x$$

13.- Calcula os seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10 + x - x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES DEFINIDAS A ANACOS.-**Exemplo:**

Calcular os límites da función $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x < 3 \\ -x + 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ nos puntos 3, 1 e 7.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= -3 + 2 = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Non coinciden} \rightarrow \text{Por tanto, non existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow f(x) \text{ non é continua en } x = 3$$

DESCONTINUIDADE DE SALTO FINITO EN $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3 \text{ pois } f(x) \text{ é continua en } x = 1$$

(f(x) é continua en $(-\infty, 3)$ pois é unha función lineal)

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7) = -7 + 2 = -5 \text{ pois } f(x) \text{ é continua en } x = 7$$

(f(x) é continua en $(3, \infty)$ pois é unha función lineal)

14.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ halla:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

15.- Comproba se as seguintes funcións son continuas nos puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

16.- Estuda a continuidade destas funcións e represéntaa:

a) $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

17.- Calcula k para que $y = \begin{cases} x^3 - 2x + k & x \neq 3 \\ 7 & x = 3 \end{cases}$ sexa continua en $\mathbb{R}$.

LÍMITE DO COCIENTE DE DOUS POLINOMIOS $P(X)/Q(X)$.-

Se $Q(c) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

CASO1.-

Se $P(c) \neq 0$ e $Q(c) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

CASO2.- (Neste caso hai que estudar os límites laterais, para saber se a expresión tende a $a \infty$ ou $a - \infty$ pola dereita e pola esquerda de c)

CASO3.-

Se $P(c) = 0$ e $Q(c) = 0$, entón o cociente pode simplificarse dividindo numerador e denominador por $x - c$:

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x-c) \cdot P_1(x)}{(x-c) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ Para calcular este novo límite, analizaremos en cal dos tres casos se atopa.

18.- Calcula os límites das funcións seguintes nos puntos que se indican. Onde conveña, especifica o valor do límite á esquerda e a dereita do punto. Representa graficamente os resultados.

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2 e 0

b) $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en 2 , 0 e 3

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 e -3

d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 e -3

19.- Resolve os seguintes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

20.- Calcula, en cada caso, o valor de k para que a función $f(x)$ sexa continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq 3 \\ x + k & \text{se } x > 3 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 6 - \frac{x}{2} & \text{se } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

21.- Calcula a para que as seguintes funcións sexan continuas en $x = 1$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

22.- Calcula os seguintes límites e representa os resultados que obteñas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

23.- Existe algún valor de k para o cal a función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sexa continua en $x = 0$?
Xustifica a túa resposta.

24.- Debuxa a función e estuda a continuidade:

$$f(x) = \begin{cases} |x + 3| & \text{se } x \leq -1 \\ -x^2 + 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

25.- Calcula o valor de k para que a seguinte función sexa continua en todo $\mathbb{R}$

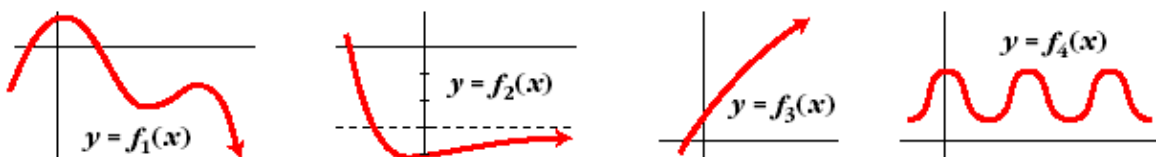
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

26.- Calcula os seguintes límites e representa os resultados que obteñas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

COMPORTAMENTO DUNHA FUNCIÓN CANDO $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$

27.- Di o límite cando $x \rightarrow +\infty$ das seguintes funcións dadas polas súas gráficas:



CÁLCULO DE LÍMITES CANDO $x \rightarrow +\infty$ OU $x \rightarrow -\infty$

LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS

O límite cando $x \rightarrow +\infty$ dunha función polinómica é $+\infty$ ou $-\infty$ segundo que o coeficiente do termo de maior grao sexa positivo ou negativo.

p.ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4 - 5x^3) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^3 + 7x^2 + 9) = -\infty$

LÍMITES DE FUNCIONES INVERSAS DE POLINÓMICAS

Se $P(x)$ é función polinómica, entón $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{P(x)} = 0$

p.ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^4 - 5x^3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-5x^3 + 7x^2 + 9} = 0$

LÍMITES DE FUNCIONES RACIONALES :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$$

1. Se grado de $P >$ grado de Q (i.e. $m > n$), entón $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ (o signo é o de $\frac{a}{b}$)

2. Se grado de $P <$ grado de Q (i.e. $m < n$), entón $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

3. Se grado de $P =$ grado de Q (i.e. $m = n$), entón $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b}$

p.ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - x}{3x^4 - 5x^3} = \frac{5}{3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 8x^2}{-5x^3 + 7x^2 + 9} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^3 + 7x^2 + 9}{7x^5 - 8x^2} = 0$

En xeral, todos os límites cando $x \rightarrow -\infty$, resólvense de maneira similar aos de $x \rightarrow +\infty$, tendo en conta a regra dos signos.

NOTA : Se n par $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$, e se n impar $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

28.- Di o valor do límite cando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ das seguintes funcións:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

29.- Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e representa as súas ramas:

a) $f(x) = \frac{1}{3x}$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$

c) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

d) $f(x) = 3x - 5$

30.- Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e representa as súas ramas:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$

31.- Determina $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e representa a rama correspondente: $f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$

32.- Determina $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e traza as ramas correspondentes:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{-x^3}$

b) $f(x) = \frac{-x^3}{x^2 + 3}$

33.- Calcula os límites cando $x \rightarrow +\infty$ e cando $x \rightarrow -\infty$ das seguintes funcións:

a) $f(x) = 2^{x-1}$

b) $f(x) = 0,75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$

d) $f(x) = \frac{1}{e^x}$

34.- Calcula os seguintes límites e representa as ramas que obteñas

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

35.- Nunha empresa fanse montaxes en cadea. O número de montaxes realizadas por un traballador sen experiencia depende dos días de adestramento segundo a función

$$M(t) = \frac{30t}{t+4} \quad (t \text{ en días}).$$

- Cantas montaxes realiza o primeiro día? E o décimo?
- Representa a función se sabes que o período de adestramento é dun mes.
- Que ocorrería co número de montaxes se o adestramento fose moito máis longo?

36.- Os gastos mensuais en euros que unha familia ten en alimentación veñen dados pola función:

$$f(x) = \begin{cases} 0,4x + k & \text{se } 0 \leq x \leq 1000 \\ \frac{2000x}{x+3000} & \text{se } x > 1000 \end{cases} \quad \text{onde } x \text{ son os ingresos da familia en euros}$$

- Calcula o valor de k para que os gastos sexan continuos; é dicir, non haxa salto en $x=1000$.
- Cara que valor se estabilizan os gastos de alimentación das familias coa renda máis alta?

RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

RAMAS INFINITAS EN $x = c$. ASÍNTOTAS VERTICAIS

Nunha función hai asíntota vertical en $x = c$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$

NAS FUNCIÓNS POLINÓMICAS NON HAI ASÍNTOTAS VERTICAIS.

NAS FUNCIÓNS RACIONAIS:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$$

Se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ é unha función racional simplificada (cociente de polinomios sen raíces comúns), as súas asíntotas verticais atópanse nos valores de x que son raíces do denominador. Áchanse resolvendo a ecuación $Q(x) = 0$.

37.- Determina as asíntotas verticais e sitúa a curva respecto a elas:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

RAMAS INFINITAS CANDO $x \rightarrow +\infty$.

Hai varios tipos de ramas infinitas cando $x \rightarrow +\infty$.

ASÍNTOTA HORIZONTAL

Nunha función hai asíntota horizontal en $y = l$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$

ASÍNTOTA OBLICUA

Nunha función hai asíntota oblicua en $y = mx + n$; $m \neq 0$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = n \quad m \neq 0$$

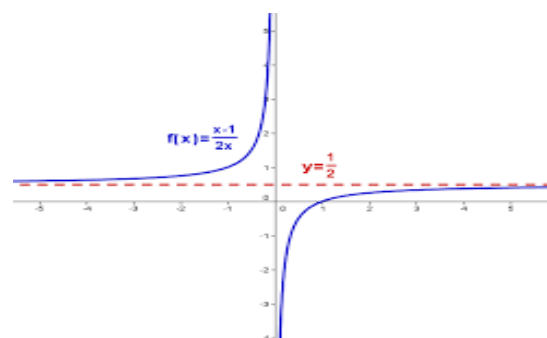
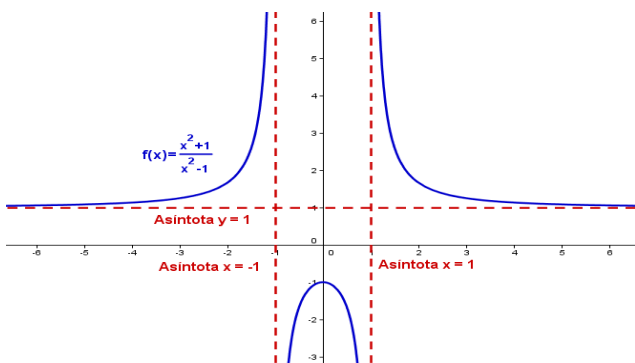
RAMAS PARABÓLICAS

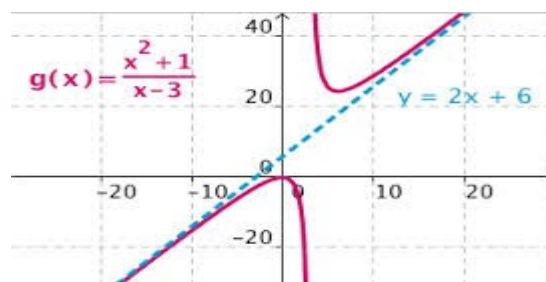
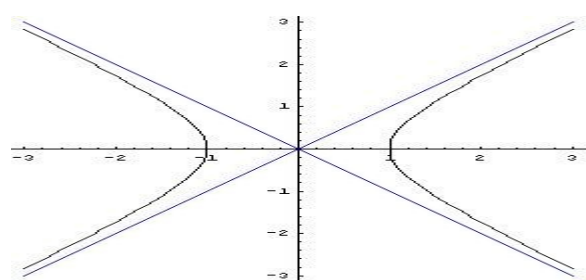
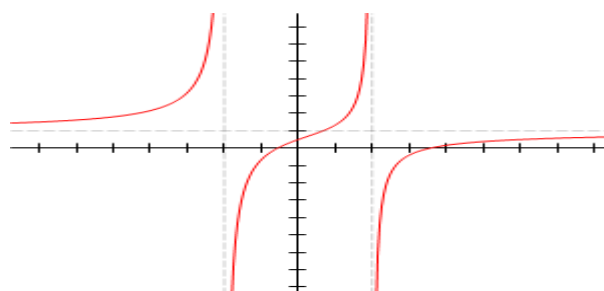
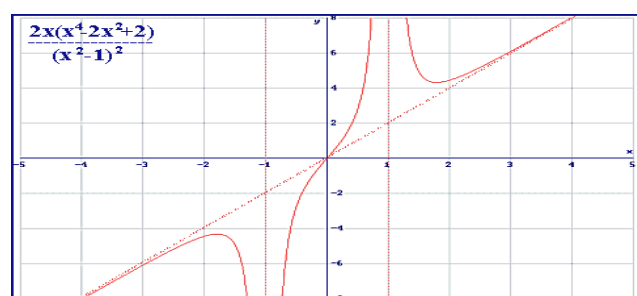
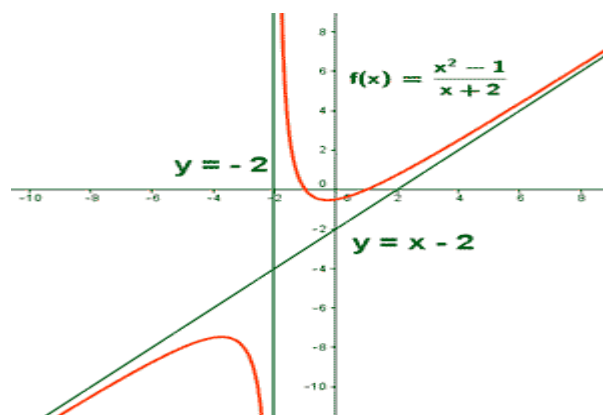
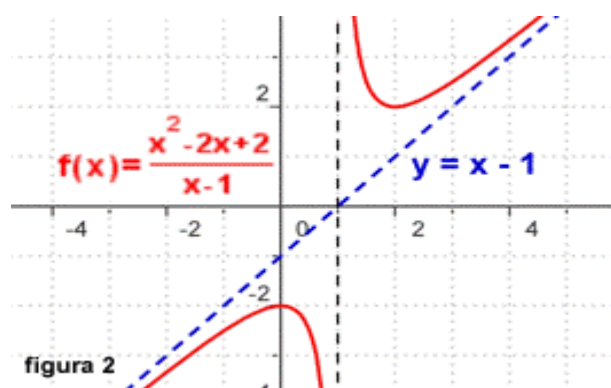
Unha función presenta unha rama parabólica $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e non ten asíntota oblicua

NAS FUNCIÓNS POLINÓMICAS NON HAI ASÍNTOTAS NIN HORIZONTAIS NIN OBLICUAS.

NAS FUNCIÓNS RACIONAIS :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$$





Nas funcións racionais : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

1. Se $\text{grado de } P < \text{grado de } Q$, entón $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ $y = 0$ é ASÍNTOTA HORIZONTAL

2. Se $\text{grado de } P = \text{grado de } Q$, entón $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b} = l$ $y = l$ é ASÍNTOTA HORIZONTAL

3. Se $\text{grado de } P = (\text{grado de } Q) + 1$, entón $\frac{P(x)}{Q(x)} = mx + n + \frac{R(x)}{Q(x)}$ $y = mx + n$ é ASÍNTOTA OBLICUA

4. Se $\text{grado de } P \geq (\text{grado de } Q) + 2$, entón hai unha RAMA PARABÓLICA, cara arriba ou cara abaixo
segundo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ sexa $+\infty$ ou $-\infty$

Exemplo 1.-

ASÍNTOTAS OU RAMAS: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$

ASÍNTOTAS VERTICAIS :

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x}{x^2 - 16} = \frac{-4}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -4 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{-}{- \cdot -} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{-}{- \cdot +} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x^2 - 16} = \frac{4}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = 4 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{+}{- \cdot +} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{+}{+ \cdot +} = +\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ASÍNTOTA HORIZONTAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 16} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 16} = 0^-$$

Exemplo 2.-

ASÍNTOTAS OU RAMAS: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

ASÍNTOTAS VERTICAIS :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{9}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -2 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{+}{+} = +\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTAIS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow \text{NON HAI ASÍNTOTAS HORIZONTAIS}$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x-1)^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = m \neq 0$$

(Hai A.O. e a súa pendente é 1)

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x} = -4$$

ASÍNTOTA OBLICUA: $y = x - 4$

Para saber situar a curva respecto da asíntota :

$$f(x) - A.O. = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+2} - (x - 4) = \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 2x + 8}{x+1} = \frac{9}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x+1} = 0^+ \Rightarrow f(x) > A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow \infty, \text{ a función por arriba da A.O.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x+1} = 0^- \Rightarrow f(x) < A.O. \text{ (Cando } x \rightarrow -\infty, \text{ a función por debaixo da A.O.)}$$

38.- Determina as asíntotas e sitúa a curva respecto a elas:

a) $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$

b) $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x+1}$

39.- Determina as ramas destas funcións. Sitúa a curva respecto da asíntota:

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$

b) $y = \frac{x^3}{1+x^2}$

40.- Determina as ramas destas funcións. Sitúa a curva respecto da asíntota:

a) $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$

b) $y = \frac{2x^3-3x^2+7}{x}$

41.- Determina as ramas infinitas, e se teñen asíntotas, sitúa a curva respecto a elas:

a) $y = \frac{1}{x^2+1}$

b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

42.- Determina as ramas infinitas destas funcións, e se teñen asíntotas, sitúa a curva respecto a elas :

a) $y = \frac{x^4}{x^2+1}$

b) $y = \frac{x^2+3x}{x+1}$

43.- Proba que a función $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ só ten unha asíntota vertical e outra horizontal.

44.- Cada unha das seguintes funcións ten unha asíntota oblicua. Determinaa e estuda a posición da curva respecto a ela:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$

d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$

f) $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

45.- Determina as asíntotas das seguintes funcións e sitúa a curva respecto a cada unha de elas:

a) $y = \frac{(3-x)^2}{2x+1}$

b) $y = \frac{5x-2}{2x-7}$

c) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$

d) $y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

f) $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$

46.- Determina as ramas infinitas destas funcións. Cando teñan asíntotas, sitúa a curva:

a) $y = \frac{x^4-1}{x^2}$

b) $y = \frac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$

c) $y = \frac{1}{9-x^2}$

d) $y = \frac{x^2-1}{2x^2+1}$

e) $y = \frac{2x^2}{x+3}$

f) $y = \frac{x^3}{2x-5}$

47.- Pode ter unha función máis de dúas asíntotas verticais? E máis de dúas asíntotas horizontais?. Pon exemplos.

48.- O denominador dunha función $f(x)$ anúlase en $x = a$. Existe necesariamente unha asíntota vertical en $x = a$? Pon exemplos.

49.- Nunha cidade faise un censo inicial e sábese que o número de habitantes evoluciona segundo a función :

$$P(t) = \frac{t^2 + 500t + 2500}{(t+50)^2} \quad \text{onde } t \text{ é o número de anos transcurridos dende que se fai o censo}$$

e $P(t)$ o número de habitantes en millóns.

- Cantos habitantes hai cando se realiza o censo inicial?
- Cantos habitantes habrá dentro de 50 anos?
- Co paso do tempo, cara que poboación se estabilizará? Calcula a asíntota horizontal para comprobalo.

50.- Calcula o límite da función $y = \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ nos puntos nos que non é continua e interprétao graficamente.

51.- Calcula o valor de a para que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 3x}{2x^2 - 5} = 3$.

52.- Calcula o valor de m e n para que a seguinte función sexa continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ mx + n & \text{se } -1 < x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

53.- Calcula o valor de m e n para que a seguinte función sexa continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 1 \\ mx + n & \text{se } 1 < x < 2 \\ \log_2 x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

54.- Unha determinada especie evoluciona segundo a función:

$f(t) = 5 + 2^{-t}$ onde t é o número de anos e $f(t)$ os millóns de unidades existentes

Representa a gráfica e contesta: ¿a especie está en vías de extinción?

55.- Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 4x^3}{2x^3 + 3x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x} - \frac{x^2 - x + 3}{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$