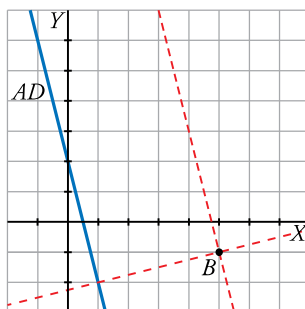


3. Rectas paralelas y perpendiculares a una dada

Hazlo tú. Del cuadrado $ABCD$ conocemos el vértice $B(5, -1)$ y la ecuación del lado AD , $y = -4x + 2$. Halla la ecuación de los lados BC y AB .



El lado BC es paralelo a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AD : $m = -4$

Pendiente de BC : $m = -4$. Vector de dirección de BC : $\vec{d} = (1, -4)$

$$\text{Ecuación de } BC: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{-4}$$

El lado AB es perpendicular a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AB : $m = \frac{1}{4}$. Vector de dirección de BC : $\vec{d}' = (4, 1)$

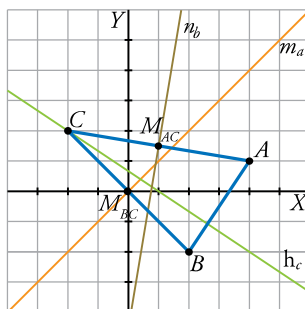
$$\text{Ecuación de } AB: \frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{1}$$

Página 205

4. Rectas notables en un triángulo

➔ **Hazlo tú.** En el triángulo de vértices $A(4, 1)$, $B(2, -2)$ y $C(-2, 2)$ calcula la mediatriz relativa al lado BC , la altura que parte de C y la mediana relativa al lado AC .

Usamos la misma notación que en el ejercicio resuelto.



a) La mediatriz relativa al lado BC , m_a , es la perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por M_{BC} .

$$\overrightarrow{BC} = (-2, 2) - (2, -2) = (-4, 4)$$

$$M_{BC} = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2-2}{2} \right) = (0, 0)$$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$: $\vec{d}' = (4, 4)$

$$\text{Ecuación de } m_a: \frac{x}{4} = \frac{y}{4} \rightarrow x = y$$

b) La altura que parte de C , h_C , es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por C .

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2) - (4, 1) = (-2, 3)$$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$: $\vec{d}' = (3, 2)$

$$\text{Ecuación de } h_C: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{2}$$

c) La mediana relativa al lado AC , n_b , es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y pasa por M_{AC} .

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 2) - (4, 1) = (-6, 1)$$

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+1}{2} \right) = \left(1, \frac{3}{2} \right)$$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$: $\vec{d}' = (1, 6)$

$$\text{Ecuación de } n_b: \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{6}$$

5. Rectas paralelas a una dada a una distancia determinada

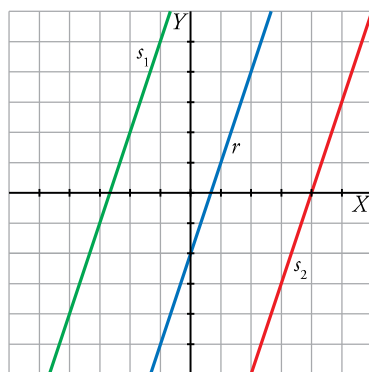
Hazlo tú. Halla las ecuaciones de las rectas que distan $\sqrt{10}$ unidades de $r: y = 3x - 2$.

$$s_k: 3x - y + k = 0$$

Punto de r : $P = (0, -2)$

$$\text{dist}(P, s_k) = \sqrt{10} \rightarrow \frac{|3 \cdot 0 - (-2) + k|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \rightarrow |k+2| = 10 \rightarrow \begin{cases} k+2=10 \rightarrow k=8 \\ k+2=-10 \rightarrow k=-12 \end{cases}$$

Las rectas buscadas son $s_1: 3x - y + 8 = 0$ y $s_2: 3x - y - 12 = 0$.



6. Distancias y área en un triángulo

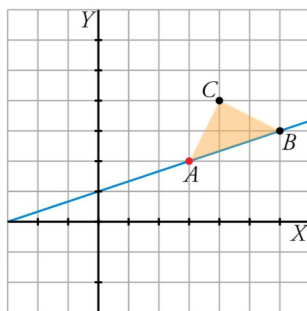
Hazlo tú. Resuelve este mismo ejercicio para $r: x - 3y + 3 = 0$, $B(6, 3)$ y $C(4, 4)$.

a) Sustituimos las coordenadas de los vértices B y C en la ecuación de r . Obtenemos que $B \in r$ y $C \notin r$. Por tanto, el lado desigual es AB : $\text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \neq \text{dist}(A, B)$.

Como $A \in r$, sus coordenadas deben cumplir su ecuación, es decir, $A = (3y - 3, y)$.

$$\text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \rightarrow \sqrt{(4 - (3y - 3))^2 + (4 - y)^2} = \sqrt{4 + 1} \rightarrow 10y^2 - 50y + 65 = 5 \rightarrow y_1 = 3, y_2 = 2$$

Obtenemos dos soluciones, $A(3, 2)$ y $A'(6, 3)$, pero $A' = B$ no es válida.



b) Tomando como base AB , Área = $\frac{1}{2}$ base · altura = $\frac{1}{2} \cdot \text{dist}(A, B) \cdot \text{dist}(C, r)$

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10} \text{ u}$$

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|4-12+3|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \sqrt{10} \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$$

Página 206

8. Recta que pasa por un punto y forma un ángulo determinado con otra recta dada

Hazlo tú. Halla la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y forme un ángulo de 60° con la recta $r: y = x + 3$.

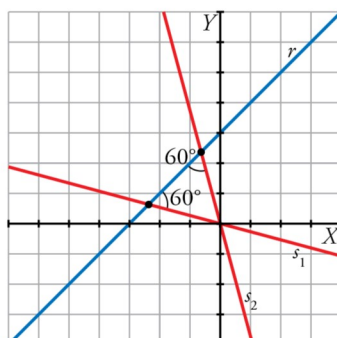
Pendiente de $r: m_r = 1$

Pendiente de $s: m_s$

$$\text{tg } 60^\circ = \left| \frac{1-m_s}{1+m_s} \right| \rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{1-m_s}{1+m_s} \right| \rightarrow \begin{cases} \frac{1-m_s}{1+m_s} = \sqrt{3} \rightarrow m_s = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\ \frac{1-m_s}{1+m_s} = -\sqrt{3} \rightarrow m_s = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Como pasa por $O = (0, 0)$:

$$s_1: y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x; \quad s_2: y = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}x$$



Página 207

9. Recta simétrica a otra respecto a una tercera recta dada

Hazlo tú. Halla la recta t , simétrica de la recta $r: -2x + 3y + 2 = 0$ respecto de la recta $s: -5x + y + 18 = 0$.

Calculamos A , el punto de intersección de r y t :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow A = (4, 2)$$

Ahora, tomamos un punto P de r : $P = (1, 0)$

Calculamos la recta a perpendicular a s que pasa por $P = (1, 0)$:

$$\vec{d}_s = (-1, -5) \rightarrow \vec{d}_a = (5, -1)$$

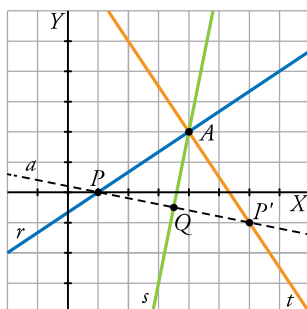
$$a: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-1} \rightarrow -x + 1 = 5y \rightarrow -x - 5y + 1 = 0$$

Determinamos Q , punto de corte de a y s :

$$\begin{cases} -x - 5y + 1 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow Q = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculamos $P' = (x, y)$, simétrico de P respecto a Q :

$$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \rightarrow P' = (6, -1)$$



La recta t pasa por $A = (4, 2)$ y por P' .

$$\overrightarrow{AP'} = (6, -1) - (4, 2) = (2, -3)$$

$$t: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{-3}$$

10. Cálculo del circuncentro de un triángulo

Hazlo tú. Halla el circuncentro del triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(9, -3)$.

Calculamos la mediatriz m_c del lado AB , que pasa por el punto medio de AB :

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \rightarrow \vec{d}_{m_c} = (1, -1)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$m_c: \frac{x-\frac{7}{2}}{1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-1} \rightarrow -x + \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \rightarrow -x - y + 5 = 0$$

Calculamos m_b , mediatriz del lado AC que pasa por el punto medio de AC :

$$\overrightarrow{AC} = (6, -4) \rightarrow \overrightarrow{d_{m_b}} = (4, 6)$$

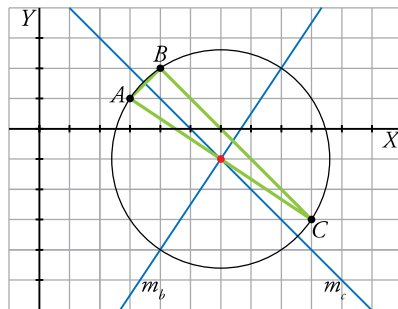
$$M_{AC} = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (6, -1)$$

$$m_b: \frac{x-6}{4} = \frac{y+1}{6} \rightarrow 6x - 36 = 4y + 4 \rightarrow 6x - 4y - 40 = 0$$

Hallamos el circuncentro calculando el punto de corte de m_c y m_b :

$$\begin{cases} -x - y + 5 = 0 \\ 6x - 4y - 40 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6, y = -1$$

El circuncentro es el punto $(6, -1)$.



51 Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:

a) $r: 3x + 5 = 0$; $r': \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 4k \end{cases}$

b) $r: y = \frac{-2}{3}x + 1$; $r': \frac{1-x}{3} = \frac{y+1}{2}$

a) $P' = (0, 0) \in r'$

$$\text{dist}(r, r') = \text{dist}(P', r) = \frac{|5|}{\sqrt{9+0}} = \frac{5}{3} \text{ u}$$

b) Las rectas son paralelas.

$$P' = (1, -1) \in r'$$

$$r: 2x + 3y - 1 = 0$$

$$\text{dist}(r, r') = \text{dist}(P', r) = \frac{|2 - 3 - 1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{13}\sqrt{13} \text{ u}$$

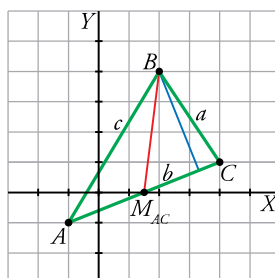
52 Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.

Veamos si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\vec{AC}| &= \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\vec{BC}| &= \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{aligned} \right\} 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2 \rightarrow \text{Por tanto, el triángulo es rectángulo.}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ u}^2$$

53 En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de B .



a) Longitud de la mediana $= \text{dist}(B, M_{AC})$

$$M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\text{dist}(B, M_{AC}) = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (4 - 0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

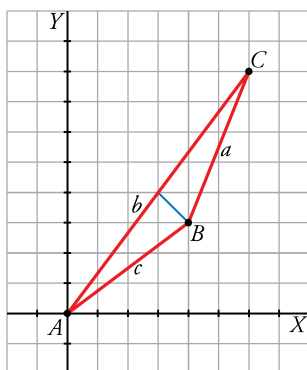
b) Longitud de la altura $= \text{dist}(B, \text{lado } AC)$

$$\vec{AC} = (5, 2)$$

$$r: \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} \rightarrow 2x+2=5y+5 \rightarrow \text{lado } AC: 2x-5y-3=0$$

$$\text{dist}(B, r) = \frac{|2 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{4+25}} = \frac{19}{29}\sqrt{29} \text{ u}$$

54 Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 8)$, calcula su área.



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Base} = \text{dist}(A, C) = \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2} = 10 \text{ u}$$

$$\text{Altura} = \text{dist}(B, \text{lado } AC)$$

Lado AC :

$$\overrightarrow{AC} = (6, 8)$$

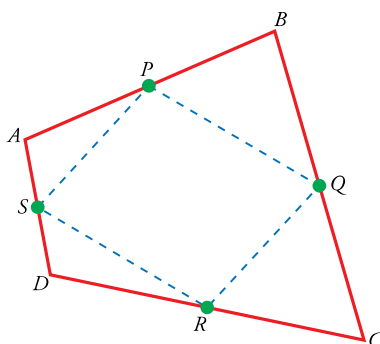
$$r: \frac{x}{6} = \frac{y}{8} \rightarrow 8x - 6y = 0 \rightarrow 4x - 3y = 0$$

$$\text{dist}(B, \text{lado } AC) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5} \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5} = 7 \text{ u}^2$$

Para resolver

55 Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices $A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$ y $D(-1, 6)$.



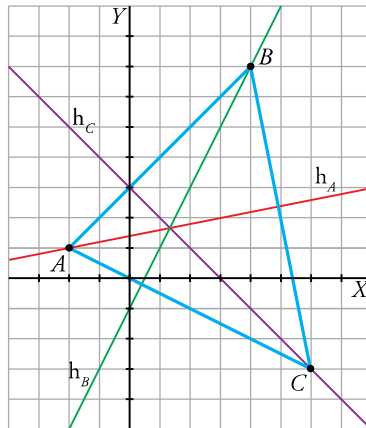
$$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 5)$$

$$Q(3, 1); R(0, 3); S(1, 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (3-4, 1-5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0-1, 3-7) = (-1, -4) \end{array} \right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = (4-1, 5-7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3-0, 1-3) = (3, -2) \end{array} \right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$$

- **58** Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$.
 Halla el ortocentro.



- h_A es perpendicular a BC y pasa por $A = (-2, 1)$.

$$\overrightarrow{BC} = (2, -10) = 2(1, -5)$$

h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (5, 1)$ y pasa por $A = (-2, 1)$.

$$h_A: \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1} \rightarrow x+2 = 5y-5 \rightarrow x-5y+7=0$$

- h_B es perpendicular a AC y pasa por $B = (4, 7)$.

$$\overrightarrow{AC} = (8, -4) = 4(2, -1)$$

h_B tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $B = (4, 7)$.

$$h_B: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{2} \rightarrow 2x-8 = y-7 \rightarrow 2x-y-1=0$$

- h_C es perpendicular a AB y pasa por $C = (6, -3)$.

$$\overrightarrow{AB} = (6, 6) = 6(1, 1)$$

h_C tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 1)$ y pasa por $C = (6, -3)$.

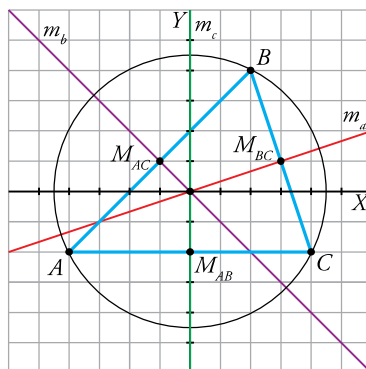
$$h_C: \frac{x-6}{-1} = \frac{y+3}{1} \rightarrow x-6 = -y-3 \rightarrow x+y-3=0$$

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas. Como las tres alturas se cortan en el mismo punto, para calcular el ortocentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las alturas.

$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$$

Las coordenadas del ortocentro son $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

- **59** Da las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(2, 4)$.
Halla el circuncentro.



- m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC} .

BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (-2, 6) = 2(-1, 3)$.

$$M_{BC} = (3, 1)$$

m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $M_{BC} = (3, 1)$.

$$m_a: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} \rightarrow x-3y=0$$

- m_b es perpendicular a AC y pasa por M_{AC} .

AC tiene vector de dirección $\overrightarrow{AC} = (6, 6) = 6(1, 1)$.

$$M_{AC} = (-1, 1)$$

m_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -1)$ y pasa por $M_{AC} = (-1, 1)$.

$$m_b: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow x+y=0$$

- m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB} .

AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (8, 0) = 8(1, 0)$.

$$M_{AB} = (0, -2)$$

m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (0, -2)$.

$$m_c: x=0$$

El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices. Como las tres mediatrices se cortan en el mismo punto, para calcular el circuncentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las mediatrices.

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow x=0, y=0$$

Las coordenadas del circuncentro son: $(0, 0)$.